УДК 519.41/47

О. Д. Артемович

О конечных неабелевых p-группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями

Наличие в группе достаточно широкой системы дополняемых подгрупп позволяет, вообще говоря, описать ее строение; многие результаты, полученные в этом направлении, можно найти в [1]. В частности, оказалось, что группы с дополняемыми абелевыми подгруппами вполне факторизуемы [1, 2]. В связи с этим С. Н. Черников [3] рекомендовал изучать группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Локально конечные группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами описал П. П. Барышовец [4]; при этом он детально изучил конечные неабелевы p-группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами. В связи с этим возник вопрос о строении конечных неабелевых p-групп, в которых условие дополняемости налагается не на все неабелевы подгруппы, а только на инвариантные неабелевы подгруппы.

В работе [5] показано, что в конечной неабелевой p-группе G с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями выполняется неравенство $|G:C_G(G')| \leqslant p^2$. Там же конструктивно описаны случаи, когда $G = C_G(G')$ или $C_G(G')$ — абелева максимальная подгруппа группы G. В настоящей работе изучен случай, когда $C_G(G')$ — неабелева максимальная подгруппа, а также получено полное описание конечных неабелевых 2-групп с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями. При этом используются следующие свойства произвольных групп с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями.

1. Если в произвольной неабелевой группе G дополняемы все ее неабелевы нормальные делители, то неабелева фактор-группа G/H, где H — нормальный делитель из G, также обладает этим свойством, а фактор-группа G/Q, где Q — неабелев нормальный делитель группы G, нормально факторизуема.

2. Если в произвольной неабелевой группе G дополняемы неабелевы нормальные делители, а F — абелева вполне факторизуемая группа, то $G \times F$ — группа с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями.

Лемма 1. *Пусть G — конечная неабелева прямо неразложимая (т. е. не представима в виде двух своих собственных подгрупп) p-группа, в которой централизатор коммутанта $C_G(G')$ неабелев и имеет индекс p. Если в группе G дополняемы неабелевы нормальные делители, то $G = A \leftthreetimes B$, где $B = \langle b_1 \rangle \times \langle b \rangle$ — элементарная абелева группа порядка p^2, $C_G(G') = A\langle b_1 \rangle$, а A — такая абелева нормальная подгруппа, что $|A:G'| = p$, $C_G(A) = A$, $(A\langle b \rangle)' = G'$, $A\langle b \rangle$ — группа с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями, $|Z(G)| = |Z(A\langle b \rangle)| = p$.*

Доказательство. Так как $G' \not\subseteq Z(G)$, то для некоторого элемента $a \in G$ нормальный делитель $G'\langle a \rangle$ неабелев и потому $G = G'\langle a \rangle \leftthreetimes L$, где L — некоторая элементарная абелева подгруппа из G. Поскольку группа G не содержит абелевых подгрупп индекса p, то вследствие леммы 2.2 [5] $[G', L] \neq 1$

Пусть d — такой элемент порядка p из L, что $[G', \langle d \rangle] \neq 1$. Тогда $G = G'\langle d \rangle \leftthreetimes B$ для некоторой элементарной абелевой подгруппы B, причем ввиду неабелевости максимальных подгрупп группы G выполняется соотношение $[G', B] \neq 1$.

Очевидно, что $G = C_G(G')B$. Пусть $B_1 = B \cap C_G(G')$. Поскольку $|C_G(G') : G' \times B_1| = |B : B_1| = |G : C_G(G')| = p$, $G' \times B_1 \subseteq C_G(G')$, то $C_G(G') = (G' \times B_1)\langle g\rangle$ для некоторого элемента g, причем $g^p \in G'$. Кроме того, $g \in C_G(G')$ и потому подгруппа $A = G'\langle g\rangle$ абелева и $|A : G'| = p$. Так как $B_1 \subseteq C_G(G')$ и $|G : AB_1| = p$, то $C_G(G') = AB_1$. Легко показать, что $G'\langle g\rangle \cap \cap B = 1$.

Пусть $B_1 = \langle b_1\rangle \times \langle b_2\rangle \times \ldots \times \langle b_k\rangle$ для некоторых элементов $b_1, b_2, \ldots, b_k$ порядка p и положительного целого числа k. Обозначим через H_i подгруппу $A\langle b_i\rangle$ (здесь и в дальнейшем $i = 1, 2, \ldots, k$). Нетрудно показать, что $|H_i'| = p$, $H_i' \lhd G$ и подгруппы $H_1', H_2', \ldots, H_k'$ все различные.

Предположим, что $(A\langle b\rangle)' \neq G'$. Тогда в силу соотношений $(A\langle b\rangle)' \lhd G$ и $[G, \langle b\rangle] \subseteq (A\langle b\rangle)'$ получим $(A\langle b\rangle)'\langle b\rangle \lhd G$. Понятно, что $G' = (A\langle b\rangle)' \times \times (A\langle b_1\rangle)' \not\subseteq Z(G)$. Отсюда следует, что $(A\langle b\rangle)' \not\subseteq Z(G)$ и, значит, $(A\langle b\rangle)' \times \times \langle b\rangle$ — неабелев нормальный делитель группы G. Но тогда ввиду предложения 1.1 [5], теоремы 7.9 [1] и теоремы 3.14 [6, гл. III] $(A\langle b\rangle)'\langle b\rangle \supseteq \supseteq G'$ и потому $|(A\langle b\rangle)'||b| = |(A\langle b\rangle)'\langle b\rangle| \geqslant |G'\langle b\rangle| = |G'||b|$. Отсюда следует, что $|(A\langle b\rangle)'| \geqslant |G'|$ вопреки предположению. Поэтому $(A\langle b\rangle)' = G'$.

Пусть Q — произвольный неабелев нормальный делитель из $A\langle b\rangle$. Тогда подгруппа $(A\langle b\rangle)'Q = G'Q$ дополняема в группе G, а значит, и в подгруппе $A\langle b\rangle$. Если D — какое-либо ее дополнение в $A\langle b\rangle$, то ввиду следствия 10.3.3 [7]

$$A\langle b\rangle = (A\langle b\rangle)'Q \leftthreetimes D = Q \leftthreetimes D$$

и, таким образом, $A\langle b\rangle$ — группа с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями.

Далее, так как $[G', \langle b\rangle] \neq 1$, то $(A\langle b\rangle)' = G' \not\subseteq Z(G)$, и потому $A\langle b\rangle$ — группа одного из типов условия теоремы 4.1 [5]. Если при этом подгруппа Фраттини $\Phi(A) \neq 1$, то $|Z(G)| = |Z(A\langle b\rangle)| = p$. Предположим, что $\Phi(A) = 1$. Тогда $A = G' \times \langle a\rangle$, $G' = \langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_t\rangle$ для некоторых элементов $a, a_1, \ldots, a_t$ порядка p и целого числа $t, t \geqslant 2$. Если $|Z(A\langle b\rangle)| = p^\alpha$, где α — целое число, $1 \leqslant \alpha < t$, и $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha \in Z(G)$, то $p^t = |G'| \leqslant \leqslant p^{t-\alpha+1}$ и, значит, $\alpha = 1$.

Таким образом, $|Z(G)| = |Z(A\langle b\rangle)| = p$. Учитывая, что $H_i' \subseteq (AB_1)' \subseteq \subseteq Z(G)$, получаем $|H_1'H_2' \ldots H_k'| = p$. Теперь легко показать, что $|B_1| = p$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если G — конечная неабелева прямо неразложимая 2-группа с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями, причем $G' \subseteq Z(G)$, то централизатор коммутанта $C_G(G')$ — абелева подгруппа индекса 2 группы G.*

Доказательство. Нетрудно показать, что $G = G'\langle t\rangle \leftthreetimes L$, где t — некоторый элемент порядка 2, L — элементарная абелева подгруппа из G. Как следует из доказательства леммы 2.5 [5], в группе G существует такая абелева нормальная подгруппа N индекса 4, что $|L : N \cap L| = 2$. Если через L_1 обозначим пересечение $L \cap N$, то $L = L_1 \times \langle f\rangle$ для некоторого элемента f порядка 2. Тогда ввиду соотношений $G' \subseteq N$, $G' = \Phi(G)$ (см. лемму 2.3 [5]), $L_1 \subseteq N$, $N' = 1$ получим $[G', L_1] = 1$, $[G', \langle f\rangle] \neq 1$, и, значит,

$$G = G'\langle f\rangle \leftthreetimes Q, \tag{1}$$

где Q — некоторая элементарная абелева подгруппа группы G, причем $Q = \langle d\rangle \times Q_1$, $\| d \| = 2$, $[Q_1, G'] = 1$.

Предположим, что $|G : C_G(G')| = 4$. Поскольку $L_1, Q_1 \subseteq C_G(G')$, то $G' \times L_1 = G \times Q_1$. Вследствие (1) найдем

$$G' = (G'\langle f\rangle)'[G'\langle f\rangle, Q], \; [G'\langle f\rangle, Q] = [G'\langle f\rangle, d]\,[G'\langle f\rangle, Q_1]. \tag{2}$$

В силу равенства $G' \times L_1 = G' \times Q_1$ также справедливы соотношения

$$[G'\langle f\rangle, Q_1] \subseteq [\langle f\rangle, G' \times Q_1] = [\langle f\rangle, G'] = (G'\langle f\rangle)'.$$

Отсюда ввиду (2) следует, что $G' = (G'\langle f\rangle\langle d\rangle)'$.

Пусть $G_1 = G'\langle f\rangle\langle d\rangle$ и K — ее произвольный неабелев нормальный делитель. Тогда делитель $G_1K = G'K$ дополняем в G, а следовательно, и в подгруппе G_1. Если F — какое-либо его дополнение в G_1, то в силу следствия 10.3.3 [7] $G_1 = G_1' K \rtimes F = K \rtimes F$. Таким образом, G_1 — группа с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями. По теореме 11.9 [6, гл. III] группа G_1 содержит абелеву подгруппу индекса 2, что невозможно. Значит, $|G : C_G(G')| = 2$ (см. следствие 2.1 [5]).

Предположим, что подгруппа $C_G(G')$ неабелева. Тогда в силу леммы 1 $G = A \rtimes B = A \rtimes (\langle b_1 \rangle \times \langle b \rangle)$, где A и B — подгруппы, удовлетворяющие условию леммы 1. Поскольку $(A\langle b \rangle)' \not\subseteq Z(G)$, то по теореме 4.1 [5] $A\langle b \rangle = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $a^{2^n} = b^2 = 1$, $[a, b] = a^{-2}$, $n \geqslant 3$. Учитывая, что $[a, b_1] \in Z(G) = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$, получаем $[a, b_1] = a^{2^{n-1}}$. Непосредственно проверяется, что неабелев нормальный делитель $\langle a^2, b \rangle$ недополняем в группе G. Но это противоречит условию леммы. Поэтому $C_G(G')$ — абелева подгруппа индекса 2 группы G. Лемма доказана.

Теорема 1. *В конечной неабелевой 2-группе H тогда и только тогда дополняемы неабелевы нормальные делители, когда $H = G \times F$, где F — элементарная абелева группа, а G — группа одного из следующих типов*:

1) $G = D\langle y \rangle$, *D — нормальная элементарная абелева группа*, $y^p \in Z(G)$;

2) *G — прямое произведение с объединенным центром двух групп диэдра порядка 8*;

3) *G — группа Миллера — Морено*;

4) $G = ((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $a_i^2 = a = b^2 = c^2 = 1$, $[a, b] = a_1$, $[a, c] = a_2$, $[b, c] = a_3$, $[a_i, a] = [a_i, b] = [a_i, c] = 1$, $i = 1, 2, 3$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $a^4 = b^2 = c^2 = 1$, $[b, c] = a^2$, $[a, c] = 1$;

6) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $a^4 = b^4 = c^2 = 1$, $[a, c] = a^2$, $[b, c] = b^2$;

7) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle) \rtimes \langle d \rangle$, $a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$, $[a, d] = a^2$, $[b, d] = c$, $[c, d] = 1$;

8) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $a^{2^n} = b^2 = 1$, $[a, b] = a^{-2}$, $n \geqslant 2$.

Доказательство теоремы легко получаем с помощью предложений 1.3, 1.4, теорем 3.1, 4.1 из [5] и леммы 2.

Теорема 2. *Пусть H — конечная нильпотентная группа, в которой централизатор коммутанта — неабелева максимальная подгруппа. В группе H тогда и только тогда дополняемы неабелевы нормальные делители, когда $H = Y \times Q$, где Q — абелева вполне факторизуемая группа, а Y — p-группа ($p > 2$) вида $Y = A \rtimes B$, где A — абелева нормальная подгруппа, $B = \langle b_1 \rangle \times \langle b \rangle$ — элементарная абелева подгруппа порядка p^2, $\| A : Y' \| = p$, $C_Y(Y') = A\langle b_1 \rangle$, $Y' = (A\langle b \rangle)'$, подгруппа $Y'\langle b \rangle$ дополняема в $A\langle b \rangle$.*

Доказательство. Необходимость следует из предложения 1.4 [5] и лемм 1 и 2.

Достаточность проверяется непосредственно.

Из теоремы 2 и теоремы 4.1 [5] получаем такое утверждение.

Следствие. *Группа Y тогда и только тогда удовлетворяет условию теоремы 2, когда она p-группа ($p > 2$) одного из следующих типов*:

а) $Y = A \rtimes (\langle b_1 \rangle \times \langle b \rangle)$, *где A—элементарная абелева группа*, $|A : Y'| = p$, $C_Y(Y') = A\langle b_1 \rangle$, $|b_1| = |b| = p$;

б) $Y = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_{p-1} \rangle) \rtimes (\langle b_1 \rangle \times \langle b \rangle)$, где $a_1^{p^m} = a_2^{p^m} = \ldots = a_{p-1}^{p^m} = b_1^p = b^p = 1$, $[a_1, b] = a_1^{pm_{p-1}} \ldots a_{p-2}^{pm_2}$, $a_{p-1}^{pm_1}$, $[a_{p-1}, b] = a_{p-2}, \ldots, [a_2, b] = a_1$, $[a_j, b_1] = 1$, $j = \overline{1, p-2}$, $[a_{p-1}, b_1] = a_1^{p^{m-1}}$, $pm_i + C_p^i \equiv 0 \times (\mathrm{mod}\, p^m)$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, $m \geqslant 2$, $m, m_1, \ldots, m_{p-1}$ — *целые числа*;

в) $Y = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_k \rangle \times \ldots \times \langle a_{p-1} \rangle) \rtimes (\langle b_1 \rangle \times \langle b \rangle)$, *где* $a_1^{p^m} = a_2^{p^m} = \ldots = a_k^{p^m} = a_{k+1}^{p^{m-1}} = \ldots = a_{p-1}^{p^{m-1}} = b_1^p = b^p = 1$, $[a_1, b] = a_{p-1}, \ldots, [a_{k+2}, b] = a_{k+1}$, $[a_{k+1}, b] = a_k^{pm_1} \ldots a_2^{pm_{k-1}} a_1^{pm_k} a_{k+1}^{pm_{p-1}} \ldots a_{p-2}^{pm_{k+2}} a_{p-1}^{pm_{k+1}}$, $[a_k, b] = a_{k-1}, \ldots, [a_2, b] = a_1$, $pm_i + C_p^i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^m)$, $1 \leqslant k < p-1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $pm_l +$

$+ C_p^l \equiv 0 \pmod{p^{m-1}}$, $k+1 \leqslant l \leqslant p-1$, $[a_k, b_1] = a_1^{p^{m-1}}$, $[a_j, b_1] = 1$, $m \geqslant 2$, $m, m_1, \ldots, m_{p-1}$ — *целые числа*, $j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, p-1$.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М.: Наука, 1980.— 384 с.
2. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та.— 1960.— Вып. 17.— С. 15—31.
3. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн.— 1969.— **21**, № 2.— С. 193—209.
4. *Барышовец П. П.* Неабелевы группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Там же.— 1980.— **32**, № 1.— С. 99—101.
5. *Артемович О. Д.* О конечных нильпотентных группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями.— Киев, 1984.— 52 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; № 84.67).
6. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I.— Berlin etc.: Springer, 1967.— 793 S.
7. *Холл М.* Теория групп.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 22.02.85