УДК 519.21

Н. С. Братийчук, Д. В. Гусак

Эргодическое распределение осциллирующего процесса с независимыми приращениями

1. Пусть $\xi_i(t)$, $t \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\xi_i(0) = 0$, — однородные процессы с независимыми приращениями с кумулянтами

$$k_i(s) = a_i s + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{sx} - 1)\, \Pi\{dx\}, \tag{1}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Траектории процессов предполагаются непрерывными справа. Для функционалов от процессов $\xi(t)$ введем следующие обозначения:

$$\tau_i^{\pm}(x) = \inf\{t: \pm\xi_i(t) \geqslant \pm x\},\ (\pm x \geqslant 0),\ \xi_i^{+}(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi_i(u),$$

$$\xi_i^{-}(t) = \inf_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi_i(u),\ \xi_i^{+} = \xi_i^{+}(\infty),\ \xi_i^{-} = \xi_i^{-}(\infty),$$

$$\gamma_i^{\pm}(x) = \pm(\xi_i(\tau_i^{\pm}(x)) - x),\ (\pm x \geqslant 0).$$

Обозначим также $m_i^{\pm} = M\tau_i^{\pm}(0)$, $\mu_i^{\pm} = M\gamma_i^{\pm}(0)$, $i = 1, 2$. Определим для произвольного $z \geqslant 0$ осциллирующий процесс соотношениями

$$\zeta_z(t) = \begin{cases} z + \xi_1(t), \quad 0 \leqslant t < \tau_1^{-}(-z), \\ -\gamma_1^{-}(-z) + \xi_2(t - \tau_1^{-}(-z)),\ \tau_1^{-}(z) \leqslant t < \tau_*, \\ \zeta_{\gamma_2^{+}(\gamma_1^{-}(-z))}(t - \tau_*),\ t \geqslant \tau_*, \end{cases} \tag{2}$$

$$\tau_* = \tau_1^{-}(-z) + \tau_2^{+}(\gamma_1^{-}(-z)).$$

Аналогично можно определить $\zeta_z(t)$ и для $z < 0$.

Пусть выполняются условия А:

$$-\infty < m_1 = M\xi_1(1) < 0,\ 0 < m_2 = M\xi_2(1) < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} x^2 \Pi_2\{dx\} < \infty,\ \int_{-\infty}^{0} x^2 \Pi_1\{dx\} < \infty.$$

Теорема 1. *В условиях* А *для всякого* z *существует независящий от* z *предел* $\lim\limits_{t\to\infty} P\{\zeta_z(t) < x\} = G(x)$, $-\infty < x < \infty$.

Вид функции $G(\cdot)$ устанавливается в ходе доказательства.

Теорема 2. *Для* $\operatorname{Re} s = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dG(x) = pMe^{s(\xi_1^{+} + \gamma_2^{+}(\infty))} + (1 - p)\, Me^{s(\xi_2^{-} + \gamma_1^{-}(-\infty))},$$

где $p = (m_1^{+}\mu_1^{-} + m_1^{-}\mu_2^{+})^{-1}\mu_2^{+} m_1$.

Осциллирующие случайные блуждания рассматривались в работах [1—5]. В [1—2] в основном изучался вопрос о возвратности, а в [3]—

вопрос существования эргодического распределения. В отличие от работ [1—3], в которых объектами исследования были осциллирующие суммы независимых случайных слагаемых, в [4—5] рассматривались осциллирующие обобщенные пуассоновские процессы и изучались распределения их граничных функционалов. Там же установлено соотношение для интегрального преобразования эргодического распределения в предположении его существования.

В данной работе рассматривается вопрос существования эргодического распределения. При этом устанавливаются некоторые вспомогательные предложения для однородных процессов с независимыми приращениями, представляющие самостоятельный интерес.

2. Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$,— произвольный однородный процесс с независимыми приращениями с $m = M\xi(1) > 0$. Будем также предполагать, что процесс $\xi(t)$ не ступенчатый. Это позволяет избежать дополнительных аналитических сложностей, вызванных тем, что для ступенчатых процессов многие из встречающихся ниже распределений могут оказаться разрывными. Так, определяемая ниже функция $F(x)$ для ступенчатых процессов, вообще говоря, разрывна. Однако нетрудно заметить, что большинство полученных в этом пункте результатов справедливо и без этого предположения. Так что «неступенчатость» процесса $\xi(t)$ вызвана скорее стремлением к аналитической простоте изложения, нежели существом дела.

Положим $F(x) = \int\limits_0^\infty P\{\xi^+(t) < x\}\, dt$. В [6] получена формула

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x) = c/\psi(\lambda), \tag{3}$$

где $c = \int\limits_0^\infty e^{-u} M\tau(u)\, du$, $\tau(u)$ — момент первого достижения процессом $\xi(t)$ уровня $u > 0$, $\psi(\lambda) \doteq t^{-1}\ln Me^{-\lambda\xi^*(t)}$, причем $\xi^*(t)$ — некоторый однородный монотонно возрастающий процесс с независимыми приращениями и $M\xi^*(1) = mc$. Поскольку

$$1/\psi(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-t\psi(\lambda)} dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} d_x \int\limits_0^\infty P\{\xi^*(t) < x\}\, dt,$$

то в силу непрерывности справа функций $F(x)$ и $\int\limits_0^\infty P\{\xi^*(t) < x\}\, dt$ и того, что $P\{\xi^*(t) < +0\} = 0$, из (3) следует

$$F(x) - F(+0) = c\int\limits_0^\infty P\{\xi^*(t) < x\}\, dt. \tag{4}$$

Пусть $R_+ = [0, \infty[$ и $\mathfrak{B}_+$ — σ-алгебра борелевских множеств из R_+. Функция $H(A) = \int\limits_0^\infty P\{\xi^*(t) \in A\}\, dt$, $A \in \mathfrak{B}_+$, называется функцией восстановления процесса $\xi^*(t)$. Поэтому, согласно теореме восстановления, для процессов с независимыми приращениями [6] имеем

$$F(x+u) - F(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} cu/M\xi^*(1) = u/m. \tag{5}$$

Известно, что (5) равносильно тому, что для любой непосредственно интегрируемой по Риману функции $f(\cdot)$ выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t f(t-x)\, dF(x) = m^{-1}\int\limits_0^\infty f(x)\, dx. \tag{6}$$

Пусть γ^x обозначает величину перескока уровня $x > 0$ процессом $\xi(t)$ и $\xi(0) = 0$. Известно [7, с. 494], что при $M\xi(1) > 0$ γ^x — собственная случайная величина.

Лемма 1. *При $m = M\xi(1) > 0$ и $y > 0$*

$$\lim_{x\to\infty} P\{\gamma^x > y) = m^{-1} \int_{-\infty}^{+0}\int_0^{\infty} M(y + z - u)\, dz dP\{\xi^- < u\},$$

где $M(x) = \Pi\{[x, \infty[\}$, $x > 0$, $\Pi\{\cdot\}$—спектральная мера в представлении Леви—Хинчина для $M \exp(-s\xi(t))$.

Доказательство. Для первого перескока γ^x справедливо соотношение (см. [8], формула (36))

$$P\{\gamma^x > y\} = \int_{-\infty}^{+0}\int_{-0}^{x} M(y - u + x - z)\, dF(z)\, dP\{\xi^- < u\}. \tag{7}$$

При фиксированных y, u функция $M(y-u+x)$ непосредственно интегрируема по Риману, поскольку она монотонно убывает по x и

$$\int_0^{\infty} M(y - u + x)\, dx < \infty$$

в силу условия $0 < M\xi(1) < \infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x M(y - u + x - z)\, dF(z) = m^{-1} \int_0^{\infty} M(y - u + z)\, dz.$$

Теперь из (7) при $x \to \infty$ с учетом (6) следует требуемое.

Замечание. Для неступенчатых процессов $P\{\xi^+(t) = x\} = 0$ для почти всех t (по мере Лебега) (см., например, [7, с. 442]). Следовательно функция $F(x) = \int_0^{\infty} P\{\xi^+(t) < x\}\, dt$ непрерывна по $x > 0$. Если $A \in \mathfrak{B}_+$, то через A_x, $x \geqslant 0$, обозначим множество $\{z{:}z = y + x,\ y \in A\}$. Имеем

$$P\{\gamma^x \in A\} = \int_{-\infty}^{+0}\int_{-0}^{x} \Pi\{A_{x-z-u}\}\, dF(z)\, dP\{\xi^- < u\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+0}\int_{-0}^{x} \Pi\{A_{z-u}\}\, dF(x - z)\, dP\{\xi^- < u\}.$$

Отсюда следует, что функция $P\{\gamma^x \in A\}$ непрерывна по x для всякого $A \in \mathfrak{B}_+$. Очевидно,

$$\lim_{x\to\infty} P\{\gamma^x \in A\} = m^{-1} \int_{-\infty}^{+0}\int_{-0}^{\infty} \Pi\{A_{z-u}\}\, dz dP\{\xi^- < u\} \equiv \varphi(A), \tag{8}$$

причем $\varphi(A)$ — мера на $(R_+, \mathfrak{B}_+)$ и $\varphi(R_+) = 1$.

Лемма 2. *Если $\int_0^{\infty} t^2 \Pi\{dt\} < \infty$, то*

$$\sup_{u \geqslant 0} \int_0^{\infty} zP\{\gamma^u \in dz\} < \infty. \tag{9}$$

Доказательство. Из формулы (7) следует

$$\int_0^{\infty} zP\{\gamma^u \in dz\} = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\int_{-0}^{u} M(z - t + u - v)\, dF(v)\, dP\{\xi^- < t\}\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\infty}\int_{-0}^{u} M(z + u - v)\, dF(v)\, dz. \tag{10}$$

Имеем

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^\infty\int_{-0}^u M(z+u-v)\,dF(v)\,dz = m^{-1}\int_0^\infty\int_{-0}^\infty M(z+v)\,dv dz =$$

$$= (2m)^{-1}\int_0^\infty z^2\Pi\{dz\} < \infty.$$

Из равенства в (10) следует, что функция $\int_0^\infty zP\{\gamma^u\in dz\}$ непрерывна по u. Кроме того, $\overline{\lim_{u\to\infty}}\int_0^\infty zP\{\gamma^u\in dz\}\leqslant(2m)^{-1}\int_0^\infty z^2\Pi\{dz\}<\infty$. Из этих замечаний, очевидно, вытекает (9).

Лемма 3. *Пусть* $\tau(u)=\inf\{t:\xi(t)>u\}$, $u>0$. *Существует такое* $c>0$, *что* $M\tau(u)<c(u+1)$ *и* $\lim_{t\to\infty}(M\tau(u+t)-M\tau(t))=u/m$.

Доказательство. Действительно, имеем $P\{\tau(u)>t\}=P\{\xi^+(t)\leqslant\leqslant u\}$ и, следовательно, $M\tau(u)=\int_0^\infty P\{\xi^+(t)\leqslant u\}\,dt=F(u)$. Теперь требуемое следует из (4), (5) и известных результатов теории восстановления.

Лемма 4. *Пусть процесс* $\xi(t)$ *с* $M\xi(1)>0$ *имеет кумулянту*

$$k(s)=as+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{sx}-1)\,\Pi\{dx\},$$

где $a<0$. *Для всякого фиксированного* $0<\varepsilon<1$ *найдется независящее от* x *натуральное* k *такое, что* $P(\gamma^x\in A)\leqslant 1-\varepsilon\cdot 2^{-k}$, $x\geqslant 0$, *как только* $\varphi(A)\leqslant\varepsilon\cdot 2^{-k}$, *где* $\varphi(\cdot)$ *определено в формуле* (8) *и* $A\in\mathfrak{B}_+$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. для всякого натурального k найдутся такие $A_k\in\mathfrak{B}_+$ и x_k, что $P\{\gamma^{x_k}\in A_k\}>1-\varepsilon\cdot 2^{-k}$, хотя $\varphi(A_k)\leqslant\varepsilon\cdot 2^{-k}$. Положим $B_k=\bigcup_{i=1}^k A_i$. Очевидно, B_k монотонно возрастает по k и пусть $B=\lim_{k\to\infty}B_k$. Тогда

$$\varphi(B)=\lim_{k\to\infty}\varphi(B_k)\leqslant\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^k\varphi(A_i)=\sum_{i=1}^\infty\varphi(A_i)\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^\infty 2^{-i}=\varepsilon. \qquad (11)$$

Можно считать (переходя в случае надобности к подпоследовательности), что $\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$, где x_0 может быть равно ∞. Если $x_0=\infty$, то из (8) и (11) следует $1=\lim_{k\to\infty}(1-\varepsilon\cdot 2^{-k})\leqslant\lim_{k\to\infty}P\{\gamma^{x_k}\in B\}=\varphi(B)\leqslant\varepsilon<1$. Пришли к противоречию. Пусть теперь $x_0<\infty$. Согласно замечанию к лемме 1 и (11), имеем $P\{\gamma^{x_0}\in B\}=\lim_{k\to\infty}P\{\gamma^{x_k}\in B\}=1$. Итак,

$$P\{\gamma^{x_0}\in B\}=1. \qquad (12)$$

Соотношение (12) возможно только в следующих случаях:

а) положительные скачки процесса $\xi(t)$ ограничены некоторой постоянной $N>0$ и $B\supset[0,N]$;

б) B отличается от $[0,\infty[$ на множество лебеговой меры нуль. Действительно, используя результаты работ [7, с. 442] и [9], нетрудно показать, что в наших условиях функция $P\{\gamma^{x_0}<u\}$ непрерывна по $u>0$, причем $P\{\gamma^{x_0}<v\}>0\ \forall\, v>0$. Отсюда легко следует а), б). Поэтому в обоих случаях $P(\gamma^x\in B\}=1$, $x>0$. Следовательно, $\varepsilon>\varphi(B)=\lim_{x\to\infty}P\{\gamma^x\in\in B\}=1$. Опять пришли к противоречию.

Рассмотрим теперь процесс $\zeta_z(t)$. Пусть $\tau_0 = 0,\ \tau_1,\ \tau_2, \ldots$ — занумерованные в порядке возрастания моменты возвращения процесса $\zeta_z(t)$ на положительную полуось при $z > 0$. В наших предположениях $P\{\tau_i > \tau_{i-1}\} = 1$, причем $\tau_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$ п. н. Положим $\varkappa_n = \zeta_z(\tau_n)$.

Лемма 5. *Последовательность $\varkappa_n$, $n \geqslant 0$, — эргодическая цепь Маркова, и если $\pi_+(\cdot)$ — ее стационарное распределение, то* $\int\limits_0^\infty z\pi_+\{dz\} < \infty$.

Доказательство. То, что $\varkappa_n$ — цепь Маркова в фазовом пространстве $(R_+, \mathfrak{B}_+)$, легко следует из свойства строгой марковости процесса $\zeta_z(t)$. В наших условиях $P\{\tau_1^-(-x) < \infty\} = P\{\tau_2^+(x) < \infty\} = 1\ \forall x > 0$. Используя опять свойство строгой марковости для $B \in \mathfrak{B}_+$, имеем

$$P\{\varkappa_{i+1} \in B/\varkappa_i = x\} = \int\limits_0^\infty P\{\gamma_1^-(x) \in dv\} P\{\gamma_2^+(v) \in B\} \equiv Q(x, B). \tag{13}$$

Следовательно, $\varkappa_n$, $n \geqslant 0$,— однородная цепь Маркова. Из (13) и леммы 4 вытекает, что переходная вероятность $Q(x, B)$ удовлетворяет условию Деблина, если в качестве меры $\varphi(\cdot)$ в определении в [10, с. 176] взять меру, задаваемую равенством (8). Итак, существует стационарное распределение цепи $\varkappa_n$. Обозначая его $\pi_+(\cdot)$, получаем $\pi_+(A) = \int\limits_0^\infty \pi_+\{du\} Q(u, A), A \in \mathfrak{B}_+$.

Поэтому

$$\int\limits_0^\infty z\pi_+\{dz\} = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty zP\{\gamma_2^+(v) \in dz\} P\{\gamma_1^-(u) \in dv\} \pi\{du\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{v\geqslant 0} \int\limits_0^\infty zP\{\gamma_2^+(v) \in dz\} < \infty$$

в силу леммы 2.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $\tau_0, \tau_1, \ldots$ определены, как и выше. Зададим процесс $\eta_z(t)$ равенством $\eta_z(t) = \zeta_z(\tau_i)$, $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$. Легко понять, что $\eta_z(t)$ — полумарковский процесс в фазовом пространстве $(R_+, \mathfrak{B}_+)$, а $\varkappa_i$, $i \geqslant 0$, — его вложенная цепь Маркова. Пусть $Q_z(t, x, B)$—полумарковское ядро, соответствующее процессу $\eta_z(t)$. Положим

$$Q^{(k+1)*}(t, x, A) = \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty Q(ds, x, dy) Q^{k*}(t-s, y, A),\ k \geqslant 1,$$

$$Q^{1*}(t, x, A) = Q(t, x, A),\ R(ds, z, dy) = \sum_{n=1}^\infty Q^{n*}(ds, z, dy).$$

Легко видеть, что для $x > 0$

$$P\{\zeta_z(t) < x\} = \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty R(ds, z, dy) g_+(t-s, y, x) + g_+(t, z, x), \tag{14}$$

где

$$g_+(t, z, x) = \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty P\{\tau_1^-(-z) \in dv,\ \gamma_1^-(-z) \in du\} P\{\tau_2^+(u) > t-v\} +$$

$$+ P\{\xi_1^-(t) > -z,\ \xi_1(t) < x-z\}.$$

Покажем, что для всякой вещественно значной ограниченной функции $f(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{ips}\int\limits_0^\infty f(y) Q(ds, x, dy)\right| < \sup_{y\geqslant 0} |f(y)|,\ p \neq 0. \tag{15}$$

Действительно,

$$\left|\int_0^\infty e^{ips}\int_0^\infty f(y)\,Q(ds,x,dy)\right| \leqslant \sup_{y\geqslant 0}|f(y)|\,((M\cos p\xi)^2+(M\sin p\xi)^2)^{1/2},$$

где ξ — случайная величина с распределением $Q(x,\cdot)$. Но, согласно неравенству Буняковского, $(M\cos p\xi)^2+(M\sin p\xi)^2 \leqslant M(\cos p\xi)^2+M(\sin p\xi)^2 = 1$, причем равенство здесь может достигаться только при $(M\cos p\xi)^2 = M(\cos p\xi)^2$ и $(M\sin p\xi)^2 = M(\sin p\,\xi^2)$. Последнее возможно только тогда, когда распределение $Q(x,\cdot)$ сосредоточено на решетке $p^{-1}(\pi/2+\pi k)$, $k=0,\pm 1,\ldots$, или $p^{-1}\cdot\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$ Обратимся теперь к формуле (13). Как отмечалось выше, функция $P(\gamma_2^+(v)<u\}$ непрерывна по u. Следовательно, распределение $Q(x,\cdot)$ непрерывно. Полученное противоречие доказывает (15).

Из (15) следует нерешеточность ядра $Q(ds,x,dy)$ в смысле определения работы [11].

Следующий результат является непосредственным следствием теоремы 2 в [11].

Теорема 3. *Пусть переходная функция $Q(x,\cdot)$ удовлетворяет условиям:*

1) *для $Q(x,B)$ выполняется условие Деблина;*

2) $m_+=\int_0^\infty x\pi_+\{dx\}<\infty$, *где $\pi_+\{\cdot\}$ — стационарная мера для $Q(x,B)$;*

3) *ядро $Q(ds,x,dy)$ нерешеточно.*

Тогда для всякой неотрицательной функции $g(t,y)$, $t\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, непосредственно интегрируемой по Риману по переменной t при каждом y и такой, что $\int_0^\infty \pi_+\{dy\}\int_0^\infty g(t,y)\,dt<\infty$, выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\int_0^\infty R(ds,z,dy)\,g(t-s,y)=m_+^{-1}\int_0^\infty \pi_+(dy)\int_0^\infty g(t,y)\,dt.$$

Покажем теперь, что теорема 1 следует из (14) и теоремы 3. Для этого проверим выполнение предположений теоремы 3. Первые три условия доказаны выше. Проанализируем функцию $g_+(t,y,x)$. Положим $\mu_n = \max\limits_{n-1\leqslant t\leqslant n} g_+(t,y,x)$. Поскольку $g_+(t,y,x)$ непрерывна по t и неотрицательна, то для ее непосредственной интегрируемости по Риману необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^\infty \mu_n<\infty$. Положим $\bar g_+(t,y)=\int_0^\infty P\{\gamma_1^-(y)\in dv\}P\{\tau_2^+(v)>t\}+P(\xi_1^-(t)>-y\}$. Очевидно, $P\{\tau_2^+(v)>t-u\}\leqslant P\{\tau_2^+(v)>t\}$, $t>u>0$. Поэтому из определения $g_+(t,y,x)$ следует

$$g_+(t,y,x)\leqslant \bar g_+(t,y). \tag{16}$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^\infty \mu_n \leqslant \sum_{n=1}^\infty \bar\mu_n$, где $\bar\mu_n = \max\limits_{n-1<t<n} \bar g_+(n-1,y)$. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty \bar\mu_n$ вытекает из соотношений

$$\int_0^\infty \bar g_+(t,y)\,dt=\int_0^\infty P\{\gamma_1^-(y)\in dv\}\,M\tau_2^+(v)+M\tau_1^-(y)<c(y+1), \tag{17}$$

где $c>0$ — некоторая постоянная. Неравенство в (17) следует из леммы 3.

Из (16) и (17) вытекает, что

$$\int_0^\infty g_+(t, y, x)\,dt \leqslant c(y+1),\ y \geqslant 0,\ x \geqslant 0,$$

и в силу леммы 5 $\int_0^\infty \pi_+\{dy\} \int_0^\infty g_+(t, y, x)\,dt < \infty$, где $\pi_+\{\cdot\}$ — стационарная мера переходной функции $Q(x, B)$. Итак, все условия теоремы 3 выполнены, поэтому из (14) следует

$$\lim_{t\to\infty} P\{\zeta_z(t) < x\} = m_+^{-1} \int_0^\infty \pi_+\{dy\} \int_0^\infty g_+(t, y, x)\,dt.$$

Пусть теперь $x < 0$. Имеем

$$P\{\zeta_z(t) \geqslant x\} = \int_0^t \int_0^\infty P\{\tau_1^-(z) \in ds,\ \gamma_1^-(z) \in dv\} P\{\zeta_{-v}(t-s) \geqslant x\}.$$

Очевидно, с помощью замены $\tilde{\zeta} = -\zeta_{-v}$ доказательство существования $\lim\limits_{t\to\infty} P\{\zeta_{-v}(t) \geqslant x\}$ сводится к изложенному выше. Поэтому

$$\lim_{t\to\infty} P\{\zeta_z(t) < x\} = 1 - \lim_{t\to\infty} P\{\zeta_z(t) \geqslant x\} = m_-^{-1} \int_{-\infty}^0 \pi_-\{dy\} \int_0^\infty g_-(t, y, x)\,dt,$$

где мера $\pi_-\{\cdot\}$ строится по процессу $\zeta_{-v}(t)$ так же, как $\pi_+(\cdot)$ по $\zeta_v(t)$, $v > 0$, а

$$g_-(t, y, x) = \int_0^t \int_0^\infty P\{\tau_2^+(-y) \in dv,\ \gamma_2^+(-y) \in du\} P\{\tau_1^-(u) > t-v\} +$$

$$+ P\{\xi_2^+(t) < -y,\ \xi_2(t) > x-y\},\ m_- = -\int_{-\infty}^0 x\pi_-\{dx\}.$$

Выше предполагалось, что $z > 0$. Теперь видно, что это условие несущественное. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Процесс $\zeta(t)$ можно задавать и с помощью приращений процессов $\xi_i(t)$. Очевидно, для достаточно малых Δt

$$\zeta_z(t+\Delta t) = \zeta_z(t) + \Delta\xi_1(t) I\{\zeta_z(t) \geqslant 0\} + \Delta\xi_2(t) I\{\zeta_z(t) \leqslant 0\}, \qquad (18)$$

где $I\{\cdot\}$ — индикаторная функция, а $\Delta\xi(t) = \xi(t+\Delta t) - \xi(t)$. Положим

$$\Phi(t, s, z) = Me^{s\zeta_z(t)},\ \Phi_+(t, s, z) = M\{e^{s\zeta_z(t)},\ \zeta_z(t) \geqslant 0\},$$

$$\Phi_-(t, s, z) = M\{e^{s\zeta_z(t)},\ \zeta_z(t) < 0\}.$$

Из представления (18) стандартными рассуждениями получаем уравнение

$$\partial\Phi(t, s, z)/\partial t + \partial\Phi_-(t, s, z)/\partial t = \Phi_+(t, s, z) k_1(s) + \Phi_-(t, s, z) k_2(s). \qquad (19)$$

Если $\tilde{\Phi}_\pm(\lambda, s, z) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi_\pm(t, s, z)\,dt$, то из (19) следует равенство

$$(\lambda - k_7(s))\tilde{\Phi}_+(\lambda, s, z) + (\lambda - k_2(s))\tilde{\Phi}_-(\lambda, s, z) = \lambda\Phi(0, s, z),$$

которое с учетом тождества безгранично делимой факторизации [8] $\lambda(\lambda - k_i(s))^{-1} = Me^{s\xi_i^+(\theta_\lambda)} Me^{s\xi_i^-(\theta_\lambda)}$, где θ_λ — показательно распределенная с параметром λ случайная величина, независящая от $\xi_i(t)$, примет вид

$$\tilde{\Phi}_+(\lambda, s, z) Me^{s\xi_2^+(\theta_\lambda)} (Me^{s\xi_1^+(\theta_\lambda)} P\{\xi_2^+(\theta_\lambda) = 0\})^{-1} +$$

$$+ \tilde{\Phi}_-(\lambda, s, z) Me^{s\xi_1^-(\theta_\lambda)} (Me^{s\xi_2^-(\theta_\lambda)} P\{\xi_1^-(\theta_\lambda) = 0\})^{-1} P\{\xi_1^-(\theta_\lambda) = 0\} \times$$

$$\times (P\{\xi_2^-(\theta_\lambda) = 0\})^{-1} = \Phi(0, s, z) Me^{s\xi_1^-(\theta_\lambda)} Me^{s\xi_2^+(\theta_\lambda)} (P\{\xi_2^+(\theta_\lambda) = 0\})^{-1}. \quad (20)$$

В работе [4] для однородных процессов с независимыми приращениями при выполнении условий $0 < M\xi_2(1) < \infty$, $P\{\xi_2^+(t) = 0\} = P\{\tau_2^+(0) > t\} > 0$ установлены соотношения

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} P\{\xi_2^+(\theta_\lambda) = 0\}/Me^{-u\xi_2^+(\theta_\lambda)} = 1 - Me^{-u\gamma_2^+(0)},$$

$$- sMe^{s\gamma_2^+(\infty)} = (Me^{s\gamma_2^+(0)} - 1)/M\gamma_2^+(0). \quad (21)$$

В силу этих соотношений и того, что в наших условиях $\lim_{\lambda \downarrow 0} Me^{s\xi_1^-(\theta_\lambda)} = 0$, правая часть в (20) при $\lambda \downarrow 0$ вырождается в нуль. Поэтому из (20) с учетом (21) при $\lambda \downarrow 0$ после несложных преобразований следует

$$\tilde{\Phi}_+(0, s, z) m_2^+ (\mu_2^+ Me^{s(\xi_1^+ + \gamma_2^+(\infty))})^{-1} = \tilde{\Phi}_-(0, s, z) m_1^- (\mu_1^- Me^{s(\xi_1^- + \gamma_1^-(-\infty))})^{-1}.$$

Поскольку функции в правой и левой частях этого равенства аналитичны и ограничены соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Re}\, s \leqslant 0$ и $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$, то $\tilde{\Phi}_-(0, s, z) m_1^- (\mu_1^- Me^{s(\xi_2^- + \gamma_1^-(-\infty))})^{-1} = c = \text{const}$. Полагая здесь $s = 0$, получаем $pm_2^+/\mu_2^+ = (1 - p) m_1^-/\mu_1^-$, где $p = P\{\zeta_z(\infty) > 0\}$. Отсюда $p = m_1^- \mu_2^+ / (m_2^+ \mu_1^- + \mu_2^+ m_1^-)$. Поэтому $\tilde{\Phi}_+(0, s, z) = pMe^{s(\xi_1^+ + \gamma_2^+(\infty))}$, $\tilde{\Phi}_-(0, s, z) = (1 - p) Me^{s(\xi_2^- + \gamma_1^-(-\infty))}$. Теорема 2 доказана.

1. *Kemperman J. H. B.* The oscillating random walk // Stochast. Process. and Appl.— 1972.— **2**, N 1.— P. 1—29.
2. *Рогозин Б. А., Фосс С. Г.* Возвратность осциллирующего случайного блуждания // Теория вероятностей и ее применения.— 1978.— **23**, № 2. —С. 161—168.
3. *Боровков А. А.* Предельные распределения осциллирующего случайного блуждания // Там же.— 1980.— **25**, № 3.— С. 663—665.
4. *Гусак Д. В., Елейко О. И.* Об осциллирующем пуассоновском процессе // Аналитические методы исследования в теории вероятностей.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 35—47.
5. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В., Елейко О. И.* Распределение некоторых функционалов от осциллирующего случайного процесса.— Киев, 1984.— 24 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.9).
6. *Могульский А. А.* О величине первого перескока для процесса с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения.— 1976.— **21**, № 3.— С. 486—496.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов.— М.: Наука, 1973.— Т. 2.— 640 с.
8. *Гусак Д. В.* О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения.— 1969.— **14**, № 1.— С. 15—23.
9. *Рогозин Б. А.* О некоторых классах процессов с независимыми приращениями // Там же.— 1965.— **10**, № 3.— С. 527—531.
10. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1965.— 605 с.
11. *Шуренков В. М.* К теории марковского восстановления // Теория вероятностей и ее применения.— 1984.— **29**, № 2.— С. 248—263.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 11.10.85