УДК 519.21

Г. П. Буцан

Некоторые представления мультипликативных стохастических полугрупп без разрывов второго рода

Настоящая статья продолжает работы [1—7] и в ней используются принятые там обозначения и определения. Покажем, что формулы, связывающие левую и правую мультипликативные стохастические полугруппы, которые имеют общую инфинитезимальную аддитивную стохастическую полугруппу, и доказанные в непрерывном случае (см. следствие 4 в [1]), справедливы при более слабом ограничении, чем непрерывность (см. также [8]). Для этого достаточно потребовать, чтобы у полугруппы выполнялось свойство непрерывности в каждой точке слева или справа (в зависимости от этой точки).

В предположении односторонней непрерывности во всех точках одновременно справедливы и формулы, связывающие мультипликативную стохастическую полугруппу, для которой инфинитезимальная стохастическая полугруппа представляет сумму аддитивных стохастических полугрупп с мультипликативными стохастическими полугруппами, причем для последних указанные аддитивные стохастические полугруппы являются инфинитезимальными [9].

Теорема 1. *Левая $(l)\,X_s^t$ и правая $(r)\,X_s^t$ M_2-полугруппы, для которых $D\,((l)\,X)_s^t = Y_s^t = D\,((r)\,X)_s^t$, связаны соотношениями*

$$(l)\,X_s^t = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} (r)\,X_{t_{k-1}}^{t_k}, \quad (r)\,X_s^t = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\overleftarrow{m_n}} (l)\,X_{t_{k-1}}^{t_k}, \tag{1}$$

где пределы понимаются в норме $\|\cdot\|$ и не зависят от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\,[s, t]\}$ интервала $[s, t] \subseteq [0, T]$, а произведения $\overrightarrow{\Pi}$ и $\overleftarrow{\Pi}$ рассматриваются в порядке возрастания, соответственно убывания индекса k слева направо.

Доказательство. Для определенности покажем, что справедлива вторая из формул (1) (первая из соображений симметрии доказывается аналогично). Прежде всего докажем, что

$$(r)\,X_s^t = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\overleftarrow{m_n}} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + (l)\,x_{t_{k-1}}^{t_k}). \tag{2}$$

Для этого, воспользовавшись оценками (9), (10) и (19) из [5] аналогично соотношению (20) в [5], оценим разность

$$\Big\|\prod_{k=1}^{\overleftarrow{m_n}} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + (l)\,x_{t_{k-1}}^{t_k}) - \prod_{k=1}^{\overleftarrow{m_n}} (Y_{t_{k-1}}^{t_k} + E)\Big\| = \Big\|\prod_{k=1}^{\overleftarrow{m_n}} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + (l)\,x_{t_{k-1}}^{t_k}) -$$

$$- \prod_{k=1}^{\overleftarrow{m_n}} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + y_{t_{k-1}}^{t_k} + E)\Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \Big|\prod_{i=k+1}^{\overleftarrow{m_n}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\,x_{t_{i-1}}^{t_i})\Big|_5 \cdot \Big|(l)\,x_{t_{k-1}}^{t_k} - E -$$

$$- y_{t_{k-1}}^{t_k}\Big|_2 \cdot \Big|\prod_{i-1}^{\overleftarrow{k-1}} (Y_{t_{i-1}}^{t_i} + E)\Big|_5 \leqslant \alpha_1(T) \sum_{k=1}^{m_n} |(l)\,x_{t_{k-1}}^{t_k} - E - y_{t_{k-1}}^{t_k}|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_2(T) \Big((l) \int_s^t \psi(\tau)\, d\psi(\tau) - \sum_{k=1}^{m_n} \psi(t_{k-1})(\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))\Big) \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу теоремы из работы [10] и регулярных свойств функции $\psi(t)$, доказанных в [5]. Здесь $\alpha_1(T)$ и $\alpha_2(T)$ — некоторые константы.

Воспользовавшись далее замечанием 4 из работы [5], получаем требуемое равенство (2).

Предположим теперь, что для $(l)\, X_s^t$ во всех точках $\tau \in [0, T]$ выполнено условие $|(l)\, x_{\tau-0}^{\tau+0} - E|_2 < 1$. Тогда из леммы 1 работы [6] вытекает, что $((l)\, x_s^t)^{-1} \in X(H)$ и функция $|((l)\, x_s^t)^{-1}|_2$ ограничена на $[0, T]$. Аналогично работе [5] запишем соотношение

$$\Big|\overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (l)\, X_{t_{k-1}}^{t_k} - \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + (l)\, x_{t_{k-1}}^{t_k})\Big|_4^2 = \Big|\sum_{k=1}^{m_n} (l)\, X_{t_k}^{t} ((l)\, X_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- (l)\, x_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}) \overleftarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})\Big|_4^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} |(l)\, X_{t_k}^t|_5^2 \, |(l)\, X_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- (l)\, x_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}|_4^2 \Big|\overleftarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})\Big|_5^2 +$$

$$+ M\mathrm{sp} \sum_{k \neq p} \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})^* ((l)\, X_{t_{k-1}}^{t_k} - (l)\, x_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k})^* ((l)\, X_{t_k}^{t_{p-1}})^* ((l)\, X_{t_{p-1}}^{t_p})^* ((l)\, X_{t_p}^t)^* (l)\, X_{t_p}^t ((l)\, X_{t_{p-1}}^{t_p} - (l)\, x_{t_{p-1}}^{t_p} -$$

$$- \check{Y}_{t_{p-1}}^{t_p}) \Big(\overleftarrow{\prod_{i=k-1}^{p-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})\Big) (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + (l)\, x_{t_{k-1}}^{t_k}) \overleftarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i}) \qquad (3)$$

и оценим каждое из двух слагаемых, входящих в его правую часть. Для этого предварительно заметим, что в силу теоремы 8.2 из [11] справедливо равенство $|\zeta|_4^2 = M\, \mathrm{sp}\zeta^*\zeta = M\, \mathrm{sp}\zeta^*\zeta = |\xi^*|_4^2$, используя которое, а также свойства M_2- и $\widehat{A}_2$-полугрупп (см. [2]), оценки (3), (9) работы [5], (2.8) работы [12] и теорему работы [7], получаем аналогично оцениванию выражения (14) в [5], что модуль второго слагаемого в правой части равенства (3) равен

$$\Big|\sum_{k \neq p} \mathrm{sp}\, M \overrightarrow{\prod_{i=0}^{k-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})^* ((l)\, X_{t_{k-1}}^{t_k} - (l)\, x_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k})^* ((l) \times$$

$$\times\, X_{t_k}^{t_{p-1}})^* ((l)\, X_{t_{p-1}}^{t_p} - (l)\, x_{t_{p-1}}^{t_p})^* ((l)\, X_{t_p}^t)^* (l)\, X_{t_p}^t ((l)\, X_{t_{p-1}}^{t_p} -$$

$$- (l)\, x_{t_{p-1}}^{t_p} - \check{Y}_{t_{p-1}}^{t_p}) \Big(\overleftarrow{\prod_{i=k-1}^{p-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})\Big) \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} \overleftarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \neq p} \Big| (l)\, X_{t_p}^t ((l)\, X_{t_{p-1}}^{t_p} - (l)\, x_{t_{p-1}}^{t_p}) (l)\, X_{t_k}^{t_{p-1}} ((l)\, X_{t_{k-1}}^{t_k} - (l)\, x_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}) \times$$

$$\times \overleftarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})\Big|_4 \Big| (l)\, X_{t_p}^t ((l)\, X_{t_{p-1}}^{t_p} - (l)\, x_{t_{p-1}}^{t_p} - \check{Y}_{t_{p-1}}^{t_p}) \times$$

$$\times \Big(\overleftarrow{\prod_{i=k-1}^{p-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})\Big) \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} \overleftarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + (l)\, x_{t_{i-1}}^{t_i})\Big|_4 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_3(T) \sum_{k \neq p} \Big| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (l)\, X_{t_{k-1}}^{\tau} d\check{Y}_0^{\tau} (l)\, x_{\tau}^{t_k} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\check{Y}_0^{\tau}\Big|_4 |(l)\, x_0^{t_{p-1}} \times$$

$$\times (l) X_{t_{p-1}}^{t_p} ((l)\, x_0^{t_p})^{-1} - E \Big|_4 \Big| \int_{t_{p-1}}^{t_p} (l)\, X_{t_{p-1}}^{\tau} d\check{Y}_0^{\tau} (l)\, x_{\tau}^{t_p} - \int_{t_{p-1}}^{t_p} d\check{Y}_0^{\tau} \Big|_4 |\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}|_4 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_4 (T) \Big(\Big| (l) \int_s^t F(\tau)\, dF(\tau) - \sum_{k=1}^{m_n} F(t_{k-1}) (F(t_k) - F(t_{k-1})) \Big| +$$

$$+ \Big| (r) \int_s^t F(\tau)\, dF(\tau) - \sum_{k=1}^{m_n} F(t_k)\, F(t_k) - F(t_{k-1}) \Big) \Big| \to 0 \qquad (4)$$

при $n \to \infty$ в силу теоремы работы [10], а также односторонней непрерывности в каждой точке (в зависимости от точки) функции $F(t) = \mathcal{F}_{l}(t) + \varphi(t) + f(t)$, доказанной в работе [5]. Таким образом, второе слагаемое в правой части соотношения (3) стремится к нулю при $n \to \infty$ для любой измельчающей последовательности разбиений $\{\Delta_n[s, t]\}$ интервала $[s, t]$.

Оценивая теперь первое слагаемое в правой части соотношения (3) с помощью неравенств (3) и (9) из работы [5], аналогично оценке (17) этой же работы, получаем, что оно также стремится к нулю при $n \to \infty$ для любой измельчающей последовательности разбиений.

Итак, правая часть равенства (3) стремится к нулю при $n \mapsto \infty$. С учетом равенства (2) это доказывает теорему 1, если все скачки $(l)\, X_{\tau-0}^{\tau+0}$ M_2-полугруппы $(l)\, X_s^t$ на $[0, T]$ удовлетворяют условию $|(l)\, x_{\tau-0}^{\tau+0} - F|_2 < 1$.

Переходя к доказательству теоремы в общем случае, напомним, что при $Y_s^t = D(X)_s^t$ из результатов работы [2] вытекает равенство $(r)\, X_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} = Y_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} + E = (l)\, X_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}$ в тех точках $\tau_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, N} < \infty$, где $|x_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} - E|_2 \geqslant 1$ и, кроме того, $(r)\, X_s^t$ можно представить в виде $(r)\, X_s^t = (r)\, \overline{X}_s^t \overleftarrow{\boxtimes} (r)\, \tilde{X}_s^t$, причем M_2-полугруппа $(r)\, \overline{X}_s^t$ непрерывна в точках τ_i, а M_2-полугруппа $(r)\, \tilde{X}_s^t$ является произведением скачков $(r)\, X_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}$, попавших в интервал $[s, t]$ (см. (6) в [2]). Теперь утверждение теоремы в общем случае вытекает из следующего равенства:

$$(r)\, X_s^t = (r)\, \overline{X}_s^t \overleftarrow{\boxtimes} (r)\, \tilde{X}_s^t = (r)\, \overline{X}_s^t \overleftarrow{\boxtimes} (\tilde{Y}_s^t + E) = (r)\, \overline{X}_s^t \overleftarrow{\boxtimes} (l)\, \tilde{X}_s^t =$$

$$= \Big(\lim_{n\to\infty} \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (l)\, \overline{X}_{t_{k-1}}^{t_k} \Big) \overleftarrow{\boxtimes} (l)\, \tilde{X}_s^t = \lim_{n\to\infty} \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (l)\, X_{t_{k-1}}^{t_k}. \qquad (5)$$

Замечание 1. Аналогично формуле (2) справедлива также формула

$$(l)\, X_s^t = \lim_{n\to\infty} \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + (r)\, x_{t_{k-1}}^{t_k}). \qquad (6)$$

Напомним, что для непрерывных в среднеквадратичном и независимых мультипликативных стохастических полугрупп X_s^s и U_s^t в [1] получена формула

$$X_s^t \boxtimes U_s^t = \lim_{n\to\infty} \prod_{n=1}^{m_n} X_{t_{k-1}}^{t_k} U_{t_{k-1}}^{t_k} = D^{-1}(Y + V)_s^t = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}}^{t_k} + V_{t_{k-1}}^{t_k} + E), \qquad (7)$$

выражающая первообразную мультипликативную стохастическую полугруппу $D^{-1}(Y + V)$, соответствующую сумме аддитивных стохастических полугрупп $Y_s^t + V_s^t$, через первообразные мультипликативные стохастические полугруппы X_s^t и U_s^t для аддитивных стохастических полугрупп Y_s^t и V_s^t соответственно. Естественно возникает вопрос о подобном представлении для зависимых мультипликативных стохастических полугрупп. В дальнейшем будем рассматривать стохастические полугруппы, подчиненные двупараметрическому потоку σ-алгебр $\{\sigma_s^t\}$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty$, который удовлетворяет следующим условиям:

$$0 \leqslant s \leqslant p \leqslant q \leqslant t \leqslant T < \infty \Rightarrow \sigma_p^q \subseteq \sigma_s^t, \tag{8}$$

$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant T < \infty \Rightarrow \sigma_{t_{k-1}}^{t_k}$ независимы, $k = \overline{1, n}$.

В этом случае формула (7) даже для непрерывных мартингальных стохастических полугрупп, вообще говоря, не выполняется. В самом деле, для аддитивной мартингальной стохастической полугруппы $Y_s^t = D(X)_s^t$, $MY_s^t = 0$, подчиненной потоку $\{\sigma_s^t\}$, сумма $2Y_s^t$ также будет аддитивной мартингальной стохастической полугруппой, подчиненной потоку $\{\sigma_s^t\}$. Тогда из результатов работы [1] вытекает, что $D^{-1}(2Y_s^t)$—мультипликативная мартингальная стохастическая полугруппа, подчиненная потоку $\{\sigma_s^t\}$. Легко, однако, видеть, что $X_s^t \boxtimes X_s^t$ уже не является мартингальной стохастической полугруппой в общем случае без подходящей нормировки, и поэтому формула (7) не верна. Такая нормировка будет указана в дальнейших работах, а в настоящей статье покажем, что первообразную M_2-полугруппу $D^{-1}(Y+V)_s^t$ для суммы $Y_s^t + V_s^t$ двух A_2-полугрупп Y и V, подчиненных потоку $\{\sigma_s^t\}$, можно выразить через первообразные M_2-полугруппы X_s^t и U_s^t каждой из них соответственно по формуле

$$D^{-1}(Y+V)_s^t = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}}^{t_k} + V_{t_{k-1}}^{t_k} + E) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}}^{t_k} + U_{t_{k-1}}^{t_k} - E), \tag{9}$$

в которой предел понимается в норме $\|\cdot\|$.

Здесь мы умышленно не различаем левые и правые полугруппы в правой части формулы (9), так как из ее последующего доказательства аналогично теореме 1 будет видно, что предел в левой ее части зависит только от порядка умножения в произведении справа, а не от того, какие M_2-полугруппы (левые или правые, или и те и другие) входят в это бесконечное произведение.

Прежде чем перейти к доказательству формулы (9), покажем, что для M_2-полугрупп X_s^t, U_s^t и A_2-полугрупп $Y_s^t = D(X)_s^t$, $V_s^t = D(U)_s^t$, подчиненных потоку $\{\sigma_s^t\}$, все скачки $X_{\tau-0}^{\tau+0}$, $U_{\tau-0}^{\tau+0}$ которых удовлетворяют условию $|x_{\tau-0}^{\tau+0} - E|_2 < 1$, $|u_{\tau-0}^{\tau+0} - E|_2 < 1$ при $x_s^t = MX_s^t$ и $u_s^t = MU_s^t$, выполняются следующие неравенства:

$$|X_s^t + U_s^t - E|_5 \leqslant \exp\{\beta(T)(\mathscr{F}_3(t) - \mathscr{F}_3(s) + \operatorname*{Var}_{[s,t]}(x-E) + \operatorname*{Var}_{[s,t]}(u-E))\}, \tag{10}$$

$$|\check{Y}_s^t + x_s^t + \check{V}_s^t + u_s^t - E|_5 \leqslant \exp\{\gamma(T)(\varphi_3(t) - \varphi_3(s) + \operatorname*{Var}_{[s,t]}(x-E) + \operatorname*{Var}_{[s,t]}(u-E))\}, \tag{11}$$

где $\mathscr{F}_3(t) = \mathscr{F}_1(t) + \mathscr{F}_2(t)$, $\mathscr{F}_1(t) = |X_0^t(x_0^t)^{-1} - E|_4^2$, $\mathscr{F}_2(t) = |U_0^t(u_0^t)^{-1} - E|_4^2$, $\varphi_3(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$, $\varphi_1(t) = |\check{Y}_0^t|_4^2$, $\varphi_2(t) = |\check{V}_0^t|_4^2$, $\check{Y}_s^t = Y_s^t - y_s^t$, $\check{V}_s^t = V_s^t - v_s^t$, $y_s^t = MY_s^t$, $v_s^t = MV_s^t$, а $\beta(T)$ и $\gamma(T)$ —некоторые константы.

Действительно, $\forall a \in H$ справедливо равенство

$$M|(X_s^t + U_s^t - E)a|_1^2 = M|[(X_s^t - x_s^t) + (x_s^t - E) + U_s^t]a|_1^2 =$$
$$= M|(X_s^t - x_s^t)a|_1^2 + |(x_s^t - E)a|_1^2 + M|U_s^t a|_1^2 + 2M((X_s^t - x_s^t)a, U_s^t a) +$$
$$+ 2M((x_s^t - E)a, U_s^t a) = M|(X_s^t - x_s^t)a|_1^2 + |(x_s^t - E)a|_1^2 + M|U_s^t a|_1^2 +$$
$$+ 2M((X_s^t - x_s^t)a, (U_s^t - u_s^t)a) + 2M((x_s^t - E)a, U_s^t a),$$

из которого аналогично (2) в [5] вытекает неравенство

$$|X_s^t+U_s^t-E|_5^2\leqslant|X_s^t-x_s^t|_5^2+|x_s^t-E|_2^2+|U_s^t|_5^2+2|X_s^t-x_s^t|_5|U_s^t-u_s^t|_5+$$
$$+2|x_s^t+E|_2|U_s^t|_5\leqslant\beta_1(T)(\mathcal{F}_1(t)-\mathcal{F}_1(s))+\beta_2(T)\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(x-E)+$$
$$+\beta_3(T)(\mathcal{F}_2(t)-\mathcal{F}_2(s))+\beta_4(T)\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(u-E)+1+\beta_5(T)(\mathcal{F}_1(t)-$$
$$-\mathcal{F}_1(s))^{1/2}(\mathcal{F}_2(t)-\mathcal{F}_2(s))^{1/2}\leqslant\exp\{\beta(T)(\mathcal{F}_3(t)-\mathcal{F}_3(s))+$$
$$+\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(x-E)+\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(u-E)\},$$

которое и влечет (10). Здесь $\beta(T)$ и $\beta_i(T)$, $i=\overline{1,5}$, — некоторые константы.

Для доказательства (11) $\forall a\in H$ запишем равенство

$$M|(\check{Y}_s^t+x_s^t+\check{V}_s^t+u_s^t-E)a|_1^2=M|[\check{Y}_s^t+(x_s^t-E)+\check{V}_s^t+$$
$$+(u_s^t-E)+E]a|_1^2=M|\check{Y}_s^ta|_1^2+|x_s^t-E)a|_1^2+M|\check{V}_s^ta|_1^2+|(u_s^t-E)a|_1^2+$$
$$+|a|_1^2+2M(\check{Y}_s^ta,\ \check{V}_s^ta)+2((x_s^t-E)a,\ (u_s^t-E)a)+((u_s^t-E)a,a),$$

из которого вытекает неравенство

$$|\check{Y}_s^t+x_s^t+\check{V}_s^t+u_s^t-E|_5^2\leqslant\varphi_1(t)-\varphi_1(s)+\gamma_1(T)\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(x-E)+$$
$$+\gamma_2(T)\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(u-E)+\varphi_2(t)-\varphi_2(s)+2|\check{Y}_s^t|_5|\check{V}_s^t|_5+1\leqslant\varphi_3(t)-\varphi_3(s)+$$
$$+\gamma_2(T)(\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(x-E)+\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(u-E))+2(\varphi_1(t)-\varphi_1(s))^{1/2}(\varphi_2(t)-$$
$$-\varphi_2(s))^{1/2}+1\leqslant\gamma(T)[\varphi_3(t)-\varphi_3(s)+\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(x-E)+\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(u-E)]+1\leqslant$$
$$\leqslant\exp\{\gamma(T)(\varphi_3(t)-\varphi_3(s)+\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(x-E)+\underset{[s,t]}{\mathrm{Var}}(u-E))\},$$

которое в свою очередь влечет (11).

Заметим теперь, что если A_2-полугруппы Y_s^t и V_s^t имеют такую общую точку разрыва $\tau\in(0,T)$, что $(Y_{\tau-0}^\tau\neq0\wedge V_\tau^{\tau+0}\neq0)\vee(Y_\tau^{\tau+0}\neq0\wedge V_{\tau-0}^\tau\neq\neq0)$, т. е. в точке τ A_2-полугруппы Y_s^t и V_s^t разрывны с разных сторон, то аддитивная стохастическая полугруппа $Y_s^t+V_s^t$ в точке τ не будет удовлетворять условию (23) в [2]. Таким образом, она не является A_2-полугруппой. Исключив подобные точки, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Если A_2-полугруппы Y_s^t и V_s^t, подчиненные потоку $\{\sigma_s^t\}$, не имеют общих точек разрыва, в которых они разрывны с разных сторон, то справедлива формула* (9).

Замечание 2. В работе [9] формула (9) доказывалась для мартингальных аддитивных стохастических полугрупп Y_s^t и V_s^t, подчиненных потоку $\{\sigma_s^t\}$, при более общем, чем (23) в [2], условии $\forall\tau\in(0,T)$: $|Y_{\tau-0}^\tau Y_\tau^{\tau+0}|_4=0$, $|V_{\tau-0}^\tau V_\tau^{\tau+0}|_4=0$, однако следует заметить, что сумма $Y_s^t+V_s^t$ не удовлетворяет этому условию в общем случае, поскольку выражение $(Y_{\tau-0}^\tau+V_{\tau-0}^\tau)(Y_\tau^{\tau+0}+V_\tau^{\tau+0})=Y_{\tau-0}^\tau V_\tau^{\tau+0}+V_{\tau-0}^\tau Y_\tau^{\tau+0}$ может не обращаться в нуль $(\mathrm{mod}\,P)$. Поэтому результаты работы [9] в том виде, в каком они сформулированы, не верны, и их следует проверить при дополнительном предположении $Y_{\tau-0}^\tau V_\tau^{\tau+0}+V_{\tau-0}^\tau Y_\tau^{\tau+0}=0$ $(\mathrm{mod}\,P)$ в каждой точке $\tau\in(0,T)$, если рассматривать две аддитивные мартингальные стохастические полугруппы, подчиненные потоку $\{\sigma_s^t\}$. Если же рассматривать множество $\widetilde{\mathfrak{N}}[0,T]$ всех таких полугрупп относительно операции сложения, то для того, чтобы оно было группой, необходимо требовать односторонней непрерывности во всех точках на $[0, T]$.

Доказательство теоремы 2. Воспользовавшись оценками (11), (19) в [5] и (11), аналогично соотношению (20), в [5] запишем следующее соотношение:

$$\Big\| \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + x_{t_{k-1}}^{t_k} + \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k} + u_{t_{k-1}}^{t_k} - E) - \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}}^{t_k} + V_{t_{k-1}}^{t_k} + E) \Big\| =$$

$$= \Big\| \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + x_{t_k}^{t_k} + \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k} + u_{t_{k-1}}^{t_k} - E) -$$

$$- \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + y_{t_{k-1}}^{t_k} + \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k} + v_{t_{k-1}}^{t_k} + E) \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \Big\| \prod_{i=1}^{k-1} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + x_{ti-1}^{ti} + \check{V}_{t_{i-1}}^{t_i} + u_{t_{i-1}}^{t_i} - E)(x_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} - E +$$

$$+ u_{t_{k-1}}^{t_k} - v_{t_{k-1}}^{t_k} - E) \prod_{i=k+1}^{m_n} (Y_{t_{i-1}}^{t_i} + V_{t_{i-1}}^{t_i} + E) \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} | x_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} - E + u_{t_{k-1}}^{t_k} - v_{t_{k-1}}^{t_k} - E |_2 \exp \{2(\varphi_3(t_{k-1}) - \varphi_3(s)) +$$

$$+ \delta_1(T) \operatorname*{Var}_{[s, t_{k-1}]} (y + v) + \gamma(T)(\varphi_3(t) - \varphi_3(t_{k+1}) + \operatorname*{Var}_{[t_{k+1}, t]} (x - E) +$$

$$+ \operatorname*{Var}_{[t_{k+1}, t]} (u - E))\} \leqslant (\exp \{\delta_2(T)(\varphi_3(t) - \varphi_3(s) + \operatorname*{Var}_{[s,t]} (y + v) +$$

$$+ \operatorname*{Var}_{[s,t]} (x - E) + \operatorname*{Var}_{[s,t]} (u - E))\}) \sum_{k=1}^{m_n} \Big(\Big| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{\tau} x_{t_{k-1}}^{\sigma} dy_0^{\sigma} dy_0^{\tau} \Big|_2 +$$

$$+ \Big| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{\tau} u_{t_{k-1}}^{\sigma} dv_0^{\sigma} dv_0^{\tau} \Big|_2 \Big) \leqslant \delta_3(T) \Big((l) \int_s^t \psi_1(\tau) d\psi_1(\tau) + (l) \int_s^t \psi_2(\tau) d\psi_2(\tau) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m_n} \psi_1(t_{k-1})(\psi_1(t_k) - \psi_1(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m_n} \psi_2(t_{k-1})(\psi_2(t_k) - \psi_2(t_{k-1})) \Big) \to 0 \quad (12)$$

при $n \to \infty$ в силу свойств функций $\psi_1(t) = \sup\limits_{\Delta[s,t]} \Sigma | y_{t_{k-1}}^{t_k} |_2$ и $\psi_2(t) = \sup\limits_{\Delta[s,t]} \Sigma | v_{t_{k-1}}^{t_k} |_2$. Здесь $\delta_i(T)$, $i = \overline{1, 3}$, — некоторые константы.

Из соотношения (12) и результатов работы [5] вытекает равенство

$$D^{-1}(Y + V)_s^t = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + x_{t_{k-1}}^{t_k} + \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k} + u_{t_{k-1}}^{t_k} - E). \quad (13)$$

Покажем теперь, что правая часть этого равенства совпадает с правой частью равенства (9). Для этого, аналогично доказательству теоремы 1, вначале предположим, что X_s^t и U_s^t во всех точках $\tau \in [0, T]$ удовлетворяют условию $| x_{\tau-0}^{\tau+0} - E |_2 < 1$, $| u_{\tau-0}^{\tau+0} - E |_2 < 1$, и запишем соотношение

$$\Big| \prod_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}}^{t_k} + U_{t_{k-1}}^{t_k} - E) - \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + x_{t_{k-1}}^{t_k} + \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k} + u_{t_{k-1}}^{t_k} - E) \Big|_4^2 =$$

$$= \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} (X_{t_{i-1}}^{t_i} + U_{t_{i-1}}^{t_i} - E) [X_{t_{k-1}}^{t_k} - x_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + U_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- u_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k}] \prod_{i=k+1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + x_{t_{i-1}}^{t_i} + \check{V}_{t_{i-1}}^{t_i} + u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) \Big|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \Big| \prod_{i=1}^{k-1} (X_{t_{i-1}}^{t_i} + U_{t_{i-1}}^{t_i} - E) \Big|_5^2 | X_{t_{k-1}}^{t_k} - x_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + U_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- u_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k} |_4^2 \Big| \prod_{i=k+1}^{m\ n} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + x_{t_{i-1}}^{t_i} + \check{V}_{t_{i-1}}^{t_i} + u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) \Big|_5^2 +$$

$$+ \sum_{k \neq p} \operatorname{sp} M \Big\{ \prod_{i=1}^{k-1} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + x_{t_{i-1}}^{t_i} + \check{V}_{t_{i-1}}^{t_i} + u_{t_{i-1}}^{t_i} - E)^* [X_{t_{k-1}}^{t_k} - x_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + U_{t_{k-1}}^{t_k} - u_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k}]^* \prod_{i=k+1}^{p-1} (X_{t_{i-1}}^{t_i} + U_{t_{i-1}}^{t_i} - E)^* \times$$

$$\times [X_{tp-1}^{tp} + U_{t_{p-1}}^{t_p} - E]^* \prod_{i=p+1}^{m_n} (X_{t_{i-1}}^{t_i} + U_{t_{i-1}}^{t_i} - E)^* \times$$

$$\times \prod_{i=p+1}^{m_n} (X_{t_{i-1}}^{t_i} + U_{t_{i-1}}^{t_i} - E) [X_{t_{p-1}}^{t_p} - x_{t_{n-1}}^{t_p} - \check{Y}_{t_{p-1}}^{t_p} + U_{t_{p-1}}^{t_p} -$$

$$- u_{t_{p-1}}^{t_p} - \check{V}_{t_{p-1}}^{t_p}] \prod_{i=k-1}^{p-1} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + x_{t_{i-1}}^{t_i} + \check{V}_{t_{i-1}}^{t_i} + u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) \times$$

$$\times [\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + x_{t_{k-1}}^{t_k} + \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k} + u_{t_{k-1}}^{t_k} - E] \prod_{i=1}^{k-1} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + x_{t_{i-1}}^{t_i} + \check{V}_{t_{i-1}}^{t_i} + u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) \Big\} . \tag{14}$$

Аналогично оцениванию (3) с учетом неравенств (10) и (11) и очевидного неравенства $a^{1/2} + b^{1/2} \leqslant \sqrt{2}(a+b)^{1/2}$ при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, модуль второго слагаемого в правой части выражения (14) равен

$$\Big| \sum_{k \neq p} \operatorname{sp} M \Big\{ \prod_{i=1}^{k-1} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + x_{t_{i-1}}^{t_i} + \check{V}_{t_{i-1}}^{t_i} + u_{t_{i-1}}^{t_i} - E)^* [X_{t_{k-1}}^{t_k} - x_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + U_{t_{k-1}}^{t_k} - u_{t_{k-1}}^{t_k} - \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k}]^* \prod_{i=k+1}^{p-1} (X_{t_{i-1}}^{t_i} + U_{t_{i-1}}^{t_i} - E)^* [X_{t_{p-1}}^{t_p} -$$

$$- x_{t_{p-1}}^{t_p} + U_{t_{p-1}}^{t_p} - u_{t_{p-1}}^{t_p}]^* \prod_{i=p+1}^{m_n} (X_{t_{i-1}}^{t_i} + U_{t_{i-1}}^{t_i} - E)^* \prod_{i=p+1}^{m_n} (X_{t_{i-1}}^{t_i} +$$

$$+ U_{t_{i-1}}^{t_i} - E) [X_{t_{p-1}}^{t_p} - x_{t_{p-1}}^{t_p} - \check{Y}_{t_{p-1}}^{t_p} + U_{t_{p-1}}^{t_p} - u_{t_{p-1}}^{t_p} - \check{V}_{t_{p-1}}^{t_p}] \times$$

$$\times \prod_{i=k-1}^{p-1} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + x_{t_{i-1}}^{t_i} + \check{V}_{t_{i-1}}^{t_i} + u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) [\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + \check{V}_{t_{k-1}}^{t_k}] \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k-1} (\check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} + x_{t_{i-1}}^{t_i} + \check{V}_{t_{i-1}}^{t_i} + u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) \Big| \leqslant \delta_4(T) \Big(\Big| (l) \int_s^t \overline{F}(\tau)\, d\overline{F}(\tau) -$$

3. *Буцан Г. П.* Интегральное представление мультипликативной стохастической полугруппы без условий непрерывности и мартингальности // Там же.— № 5.— С. 562—568.
4. *Буцан Г. П.* Изоморфизм мультипликативных и аддитивных стохастических полугрупп без условий непрерывности и мартингальности // Докл. АН УССР. Сер А.— 1985.— № 12.— С. 8—12.
5. *Буцан Г. П.* Некоторые представления мультипликативных стохастических полугрупп без условий непрерывности и мартингальности // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 3.— С. 290—296.
6. *Каратаева Т. В., Буцан Г. П.* Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных параметрических полугрупп // Там же.— 1985.— 37, № 2.— С. 168—175.
7. *Каратаева Т. В.* Интегральное представление мультипликативных систем без условия непрерывности // Там же.— 1986.— 38, № 2.— С. 238—241.
8. *Каратаева Т. В.* Соотношение между левыми и правыми мультипликативными полугруппами без условия непрерывности // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1985. — № 2.— С. 8—14.
9. *Чани А. С.* Стохастические полугруппы с независимыми приращениями : Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1981.— 15 с.
10. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 12.— С. 3—6.
11. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М.: Наука, 1965.— 448 с.
12. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 214 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 11.04.85