УДК 517.925+517.944

Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома

О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. I

В настоящее время известно большое количество работ, в которых всесторонне и глубоко исследованы колебательные процессы, возникающие в системах электро- и радиотехники, небесной механики, приборостроения и т. д. Весьма эффективным средством изучения нелинейных колебаний, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, являются асимптотические методы нелинейной механики, разработанные в работах [1—4]. Для исследования периодических решений дифференциальных уравнений, характеризующих эти колебания, созданы и развиты функционально-аналитические, численно-аналитические и числовые методы и схемы [5—8].

Настоящая работа посвящена изучению специальной структуры периодических решений обыкновенных волновых уравнений второго порядка и волновых уравнений второго порядка в частных производных гиперболического типа.

1. Предварительные утверждения. Докажем ряд лемм, относящихся к способу построения алгоритмов отыскания периодических решений волновых уравнений второго порядка. Заметим, что в дальнейшем выражение $(r, k) = 1$ будет обозначать, что числа r и k взаимно простые.

Лемма 1. *Пусть $f(t)$— непрерывная, T-периодическая функция. Если существуют натуральные числа p и q такие, что для периода T выполнены условия*

$$\omega T q = (2\rho - 1)\pi, \ (2\rho - 1, \omega q) = 1, \tag{1}$$

то оператор

$$(Pf)(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\omega}\int_0^{Tq} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\omega}\int_0^{Tq} Q(\tau) f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где

$$Q(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ -1, & t < \tau \leqslant Tq, \end{cases} \tag{3}$$

переводит T-периодическую функцию $f(t)$ в T-периодическую функцию $(Pf)(t)$.

Доказательство. Заменяя в равенстве (2) t на $t + T$, получаем

$$(Pf)(t+T) = \frac{1}{\omega}\int_0^{t+T} f(\tau)\sin\omega(t+T-\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\omega}\int_0^{Tq} f(\tau)\sin\omega(t+T-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{-T}^{t} f(\theta)\sin\omega(t-\theta)\,d\theta - \frac{1}{2\omega}\int_{-T}^{Tq-T} f(\theta)\sin\omega(t-\theta)\,d\theta =$$

$$= (Pf)(t) + \frac{1}{2\omega}\int_{-T}^{0} f(\theta)\sin\omega(t-\theta)\,d\theta + \frac{1}{2\omega}\int_{Tq-T}^{Tq} f(\theta)\sin\omega(t-\theta)\,d\theta.$$

Отсюда, производя замену переменной $\theta = Tq + \tau$ в последнем интеграле и учитывая равенство (1), находим $(Pf)(t+T) = (Pf)(t)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть $f(t)$ — непрерывная, $2T$-периодическая функция. Если существуют натуральные числа $r = 2k$ и $q = 2s - 1$ такие, что для числа T выполнены условия*

$$\omega Tq = r\pi, \quad r = 2k, \; q = 2s - 1, \quad (r, \omega q) = 1, \quad f(t+T) = -f(t), \tag{4}$$

то оператор P, определенный формулой (2), переводит $2T$-периодическую функцию $f(t)$ в $2T$-переодическую функцию $(Pf)(t)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $f(t)$ — непрерывная на отрезке $[0, Tq]$ функция. Тогда функция $x(t) = (Pf)(t)$ является решением неоднородного уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$.*

Замечание 1. Пусть $f(t)$ — T-периодическая функция. Тогда условие (1) исключает случай, когда функция $f(\tau)\sin\omega(t-\tau)$ может быть периодической периода T по переменным t и τ. Поэтому, естественно, возникает вопрос о способе построения алгоритма отыскания периодических решений волнового уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ в случае, когда функция $f(\tau)\sin\omega(t-\tau)$ имеет период T функции $f(t)$. Таким периодом может быть любое число вида $T = 2\pi n_0/\omega$, где n_0 — фиксированное натуральное число.

Лемма 4. *Если $f(\tau)\sin\omega(t-\tau)$ — периодическая по t, τ периода $T = 2\pi n_0/\omega$ функция, то оператор* [6]

$$(P_1 f)(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \left(f(\tau)\sin\omega(t-\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\sin\omega(t-s)\,ds\right)d\tau \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\omega}\int_0^T Q_1(\tau) f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

где

$$Q_1(\tau) = \begin{cases} 1 - t/T, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ -t/T, & t < \tau \leqslant T, \end{cases} \tag{6}$$

переводит каждую периодическую периода $T = 2\pi n_0/\omega$ функцию $f(t)$ в периодическую периода $T = 2\pi n_0/\omega$ функцию $(P_1 f)(t)$, причем если выполнено условие

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(s)\sin\omega(t-s)\,ds = 0, \tag{7}$$

то функция $x(t) = (P_1 f)(t)$ является периодическим решением неоднородного уравнения второго порядка $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$.

Следует сказать, что условие (7) полностью совпадает с обычными условиями ортогональности правой части $f(t)$ линейного неоднородного уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ к фундаментальным функциям $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ соответствующего однородного уравнения.

2. T-системы первого класса. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t, x, \dot{x}). \tag{8}$$

Предположим, что правая часть уравнения (8) определена в области

$$t \in \mathbb{R}, \quad x \in [-a, a], \quad \dot{x} \in [-b, b], \tag{9}$$

является периодической по t с периодом T, если правая часть уравнения (8) зависит от времени t, непрерывна по совокупности переменных t, x, $\dot{x}$ и удовлетворяет условиям

$$|f(t,x,y)|\leqslant M,\quad |f(t,x'',y'')-f(t,x',y')|\leqslant K_1|x''-x'|+K_2|y''-y'|, \tag{10}$$

где M, K_1, K_2 — положительные постоянные.

Определение 1. *Уравнение второго порядка* (8) *определим как T-периодическую систему первого класса в области* (9), *когда постоянные a, b, M, K_1, K_2, T, ω связаны соотношениями*

$$a\geqslant\frac{1}{2\omega}MTq,\quad b\geqslant\frac{1}{2}MTq,\quad \omega Tq=(2p-1)\pi,\quad (2p-1,\omega q)=1, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}Tq\left(\frac{1}{\omega}K_1+K_2\right)<1, \tag{12}$$

где p и q — фиксированные натуральные числа.

Теорема 1. *Пусть функция $f(t,x,\dot{x})$ определена в области* (9), *непрерывна по t, x, $\dot{x}$, T-периодическая по t и удовлетворяет соотношениям* (10)—(12). *Тогда для каждой непрерывной, T-периодической функции $v=v(t)$ такой, что*

$$|v(t)|\leqslant\frac{1}{2\omega}MTq,\quad |\dot{v}(t)|\leqslant\frac{1}{2}MTq,\quad \omega Tq=(2p-1)\pi, \tag{13}$$

последовательность периодических периода T функций

$$x_0(t)=v(t),$$

$$x_{m+1}(t)=\frac{1}{2\omega}\int_0^{Tq}Q(\tau)f(\tau,x_m(\tau),\dot{x}_m(\tau))\sin(\omega(t-\tau))\,d\tau,\quad m=0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

$$Q(\tau)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\tau\leqslant t,\\ -1, & t<\tau\leqslant Tq,\end{cases}$$

сходится при $m\to\infty$ равномерно относительно t к непрерывной, T-периодической функции $x^0(t)$, удовлетворяющей уравнению

$$x(t)=\frac{1}{2\omega}\int_0^{Tq}Q(\tau)f(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))\sin\omega(t-\tau)\,d\tau, \tag{15}$$

а следовательно, и дифференциальному уравнению (8).

Доказательство. На основании (13) и (14) по индукции показываем, что $x_m(t)$ и $\dot{x}_m(t)$ для всех $m=0,1,2,\ldots$ принимают при $t\in\mathbb{R}$, $\mathbb{R}=\{-\infty<t<\infty\}$, значения в области (9).

Для доказательства сходимости последовательности (14) оценим разность $|x_{m+1}(t)-x_m(t)|$. Учитывая соотношения (10), из (14) получаем

$$|x_{m+1}(t)-x_m(t)|\leqslant\frac{1}{2\omega}Tq(K_1|x_m(t)-x_{m-1}(t)|_0+K_2|\dot{x}_m(t)-\dot{x}_{m-1}(t)|_0), \tag{16}$$

где $|y(t)|_0=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|y(t)|$.

Дифференцируя тождество (14), представленное в виде

$$x_m(t)=\frac{1}{2\omega}\int_0^{Tq}Q(\tau)f(\tau,x_m(\tau),\dot{x}_m(\tau))\sin\omega(t-\tau)\,d\tau\equiv\frac{1}{\omega}\int_0^{t}f(\tau,x_m(\tau),$$

$$\dot{x}_m(\tau))\sin\omega(t-\tau)\,d\tau-\frac{1}{2\omega}\int_0^{Tq}f(\tau,x_m(\tau),\dot{x}_m(\tau))\sin\omega(t-\tau)\,d\tau,$$

по t, находим

$$|\dot{x}_{m+1}(t)-\dot{x}_m(t)|\leqslant\frac{1}{2}Tq(K_1|x_m(t)-x_{m-1}(t)|_0+K_2|\dot{x}_m-\dot{x}_{m-1}(t)|_0). \tag{17}$$

Теперь неравенства (16) и (17) запишем в векторном виде

$$z_{m+1}(t)\leqslant Az_m^0, \tag{18}$$

где

$$z_{m+1}(t)=\begin{pmatrix}|x_{m+1}(t)-x_m(t)|\\ |\dot{x}_{m+1}(t)-\dot{x}_m(t)|\end{pmatrix},\quad A=\frac{1}{2}Tq\begin{pmatrix}\frac{1}{\omega}K_1 & \frac{1}{\omega}K_2\\ K_1 & K_2\end{pmatrix},$$

$$z_m^0(t)=\begin{pmatrix}|x_m(t)-x_{m-1}(t)|_0\\ |\dot{x}_m(t)-\dot{x}_{m-1}(t)|_0\end{pmatrix},\quad z_1^0\leqslant MTq\begin{pmatrix}1/\omega\\ 1\end{pmatrix}$$

и неравенства между векторами с неотрицательными компонентами понимаем покомпонентно.

Итерируя неравенства (18), получаем

$$z_{m+1}^0\leqslant A^m z_1^0, \tag{19}$$

что ведет к оценке

$$\sum_{i=1}^{m} z_i^0\leqslant\sum_{i=1}^{m} A^{i-1}z_1^0. \tag{20}$$

Так как матрица A имеет собственные числа $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\frac{Tq}{2}\times\left(\frac{K_1}{\omega}+K_2\right)<1$, то последовательность частичных сумм (20) равномерно сходится и

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m} A^{i-1}z_1^0=\sum_{i=1}^{\infty} A^{i-1}z_1^0\equiv(E-A)^{-1}z_1^0. \tag{21}$$

Предельное соотношение (21) означает равномерную сходимость последовательности $(x_m(t),\ \dot{x}_m(t))$. Обозначим $\lim\limits_{m\to\infty}x_m(t)=x^0(t)$, $\lim\limits_{m\to\infty}\dot{x}_m(t)=\dot{x}^0(t)$.

Тогда для отклонения $(x_m(t),\ \dot{x}_m(t))$ от $(x^0(t),\ \dot{x}^0(t))$ на основании (19) получаем оценку

$$\begin{pmatrix}|x^0(t)-x_m(t)|\\ |\dot{x}^0(t)-\dot{x}_m(t)|\end{pmatrix}\leqslant A^m(E-A)^{-1}z_1^0. \tag{22}$$

Теперь, переходя в рекуррентном соотношении (14) к пределу при $m\to\infty$, убеждаемся, что предельная функция $x^0(t)$ удовлетворяет уравнению (15). Теорема 1 доказана.

3. $2T$-системы первого класса. Определение 2. *Уравнение второго порядка* (8) *определим как $2T$-периодическую систему первого класса в области* (9), *когда постоянные a, b, M, K_1, K_2, T, ω связаны соотношениями*

$$a\geqslant\frac{1}{2\omega}MTq,\quad b\geqslant\frac{1}{2}MTq,\quad \omega Tq=r\pi,\quad r=2k,\quad q=2s-1,$$

$$(\omega q, r)=1, \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}Tq\left(\frac{1}{\omega}K_1+K_2\right)<1 \tag{24}$$

и для каждой функции $v = v(t)$, удовлетворяющей условию $v(t+T) = -v(t)$, выполнено равенство

$$f(t+T, v(t+T), \dot{v}(t+T)) = -f(t, v(t), \dot{v}(t)), \tag{25}$$

где r и q — фиксированные натуральные числа.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (8) *является $2T$-периодической системой первого класса. Тогда для каждой непрерывной, $2T$-периодической функции $v = v(t)$ такой, что*

$$|v(t)| \leqslant \frac{1}{2\omega} MTq, \quad |\dot{v}(t)| \leqslant \frac{1}{2} MTq, \quad \omega Tq = r\pi, \quad r = 2k, \quad q = 2s-1,$$

$$(\omega q, r) = 1, \quad v(t+T) = -v(t), \tag{26}$$

последовательность $2T$-периодических функций

$$x_0(t) = v(t),$$

$$x_{m+1}(t) = \frac{1}{2\omega} \int_0^{Tq} Q(\tau) f(\tau, x_m(\tau), \dot{x}_m(\tau)) \sin \omega(t-\tau)\, d\tau, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

сходится при $m \to \infty$ равномерно относительно t к непрерывной, $2T$-периодической функции $x^0(t)$, удовлетворяющей уравнению

$$x(t) = \frac{1}{2\omega} \int_0^{Tq} Q(\tau) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \sin \omega(t-\tau)\, d\tau,$$

а следовательно, и дифференциальному уравнению (8).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

4. T-системы второго класса.

Определение 3. *Уравнение второго порядка* (8) *определим как T-периодическую систему второго класса в области* (9), *когда постоянные a, b, M, K_1, K_2, T, ω связаны соотношениями*

$$a \geqslant \frac{1}{\omega} MT, \quad b \geqslant MT, \quad T = 2\pi n_0/\omega, \tag{28}$$

$$T\left(\frac{1}{\omega} K_1 + K_2\right) < 1, \tag{29}$$

где n_0 — фиксированное натуральное число.

Теорема 3. *Пусть $f(t, x, \dot{x})$ определена в области* (9), *непрерывна по t, x, $\dot{x}$, $T = 2\pi n_0/\omega$-периодическая по t и удовлетворяет соотношениям* (10), (28) *и* (29). *Тогда для каждой функции $y(t) = c\cos(\omega t + \varphi)$ такой, что*

$$|y(t)| \leqslant a - \frac{1}{\omega} MT, \quad |\dot{y}(t)| \leqslant b - MT, \tag{30}$$

последовательность периодических периода $T = 2\pi n_0/\omega$ функций

$$x_0(t) = y(t),$$

$$x_{m+1}(t, c, \varphi) = x_0(t) + \frac{1}{\omega} \int_0^{T} Q_1(\tau) f(\tau, x_m(\tau, c, \varphi), \dot{x}_m(\tau, c, \varphi)) \sin \omega(t-\tau)\, d\tau,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

$$Q_1(\tau) = \begin{cases} 1 - t/T, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ -t/T, & t < \tau \leqslant T, \end{cases}$$

сходится при $m \to \infty$ равномерно относительно t, c, φ к непрерывной, $T = 2\pi n_0/\omega$-периодической функции $\tilde{x}(t, c, \varphi)$, удовлетворяющей интеграль-

ному уравнению

$$x(t) = x_0(t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t \Big(f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \sin\omega(t-\tau) - $$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \sin\omega(t-\tau)\,d\tau\Big)\,d\tau \equiv x_0(t) +$$

$$+ \frac{1}{\omega}\int_0^T Q_1(\tau) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) \sin\omega(t-\tau)\,d\tau. \tag{32}$$

Так как последовательность (31) имеет вид последовательности (14), а $|Q_1(\tau)| \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, то доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

Из уравнения (32) видно, что любое его решение, для которого

$$\Delta(t, c, \varphi) \equiv \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, \tilde{x}(\tau, c, \varphi), \dot{\tilde{x}}(\tau, c, \varphi)) \sin\omega(t-\tau)\,d\tau = 0, \tag{33}$$

является периодическим периода $T = 2\pi n_0/\omega$ решением уравнения (8), если оно является T-периодической системой второго класса. Поэтому вопрос существования периодического периода $T = 2\pi n_0/\omega$ решения уравнения (8) однозначно связан с вопросом существования нулей функции $\Delta(t, c, \varphi)$, имеющей вид (33). Заметим, что такая задача успешно решена в работе [6].

З а м е ч а н и е 2. Пусть выполнены условия теоремы 3 и условие (33). Записывая $x_0(t) = c\cos(\omega t + \varphi)$ в виде $x_0(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$, на основании (32) получаем следующее представление для периодического решения $\tilde{x}(t)$ волнового уравнения (8):

$$\tilde{x}(t) = \left(C_1 - \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau, \tilde{x}(\tau), \dot{\tilde{x}}(\tau)) \sin\omega\tau d\tau\right)\cos\omega t +$$

$$+ \left(C_2 + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau, \tilde{x}(\tau), \dot{\tilde{x}}(\tau)) \cos\omega\tau d\tau\right)\sin\omega t \equiv z_1(t)\cos\omega t + z_2(t)\sin\omega t,$$

$$z_1(0) = \tilde{x}(0), \quad \omega z_2(0) = \dot{\tilde{x}}(0),$$

где $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — $T = 2\pi n_0/\omega$-периодические функции. Поэтому, например, рассматривая волновое уравнение второго порядка с малым параметром, т. е. уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}), \tag{34}$$

и произведя замену переменных

$$x = z_1 \cos\omega t + z_2 \sin\omega t, \quad \dot{x} = -\omega z_1 \sin\omega t + \omega z_2 \cos\omega t \tag{35}$$

в уравнении (34), получаем стандартную систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(t, z_1, z_2)\sin\omega t, \\ \dot{z}_2 &= \frac{\varepsilon}{\omega} f_2(t, z_1, z_2)\cos\omega t \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \dot{z} = \varepsilon F(t, z), \tag{36}$$

для которой справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Для того чтобы T-периодическая система второго класса (уравнение (34)) для всех достаточно малых ε обладала периодическим с перидом $T = 2\pi n_0/\omega$ решением, необходимо, чтобы усредненная си-*

стема уравнений

$$\dot{\xi} = \varepsilon F_0(\xi) \equiv \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau, \xi)\, d\tau$$

имела положение равновесия $\xi = \xi_0 \in [-a, a] \times [-b, b]$,

$$F(\xi_0) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau, \xi_0)\, d\tau = 0,$$

и достаточно, чтобы это положение было изолированным с ненулевым индексом.

5. Периодические решения нелинейных волновых дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием. Рассмотрим уравнение вида

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = f(t, x(t),\ x(t-\Delta),\ dx(t)/dt,\ dx(t-\Delta)/dt). \qquad (37)$$

К таким уравнениям всегда можно приметить для исследования периодических решений методы, изложенные в пп. 2—4, предполагая выполненными все условия существования указанных решений и используя результаты работ [7, 8].

6. Периодические решения нелинейных волновых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Для исследования периодических решений волновых интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f\left(t, x, \dot{x}, \int_0^{h(t)} F(t, s, x(s), \dot{x}(s))\, ds\right) \qquad (38)$$

также можно применить методы, изложенные в пп. 2—4. Такое применение не вызывает принципиальных затруднений в случае, когда интегральный член уравнения (38) является фредгольмовским ($h(t) = a$, $a = \text{const}$) или, в более общем случае, когда $h(t)$ — периодическая по t функция. Применение указанных методов для исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений вида (38), интегральный член которых вольтерровский ($h(t) = t$), сопряжено с определенными трудностями [9], заключающимися в доказательстве равенства

$$\int_0^T F(t, s, x(s), \dot{x}(s)\, ds = 0.$$

7. Замечание 3. Способы исследования периодических решений волновых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (T ($2T$)-периодических систем первого класса), изложенные в пп. 2, 3, будут использованы во второй части работы для исследования периодических решений волновых уравнений второго порядка в частных производных гиперболического типа [10].

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.— 503 с.
2. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1937.— 363 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М.: Наука, 1964.— 431 с.
4. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев : Вища шк., 1976.— 589 с.
5. *Красносельский М. А.* О некоторых новых методах в теории периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике.— М.: Наука, 1965.— Т. 2.— С. 81—96.
6. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 179 с.
7. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев : Вища шк., 1979.— 247 с.

8. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами.— Киев : Наук. думка, 1984.— 214 с.
9. *Вахабов Г.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1969. — 21, № 5.— С. 675—683.
10. *Хома Г. П.* Периодические решения волновых дифференциальных уравнений второго порядка.— Киев, 1986.— 44 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.05).

Ин-т математики АН УССР, Киев
Тернополь. пед. ин-т

Получено 12.02.86