УДК 517.95

В. С. Илькив, В. Н. Полищук, Б. И. Пташник,
Б. О. Салыга

Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами

1. В области $Q = \{t, x : -\infty \leqslant a < t \leqslant b < +\infty,\ x \in \mathbb{R}_x^m\}$ рассмотрим задачу

$$L(\partial/\partial t, D)\, u(t, x) \equiv \partial^n u/\partial t^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(D)\, \partial^k u/\partial t^k = f(t, x), \tag{1}$$

$$M_p(D) \equiv \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=0}^{n_1} B_{jk}^p(D)\, \partial^k u(t_j, x)/\partial t^k = \varphi_p(x), \quad p = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где $a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_q \leqslant b$, $D = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$, $A_k(D)$ и $B_{jk}^p(D)$ — псевдодифференциальные операторы, символы $A_k(\xi)$ и $B_{jk}^p(\xi)$ которых суть аналитические функции в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}_\xi^m$. Эта задача, вообще говоря, некорректна в смысле Адамара. Ее частные случаи, когда $A_k(\xi)$ и $B_{jk}^p(\xi)$ — полиномы, исследовались при условиях периодичности по $\boldsymbol{x}$ в работах [1 — 5], где условия корректности рассматриваемых задач сформулированы в терминах диофантовых свойств коэффициентов уравнений и граничных условий.

В настоящей статье используются результаты работы Ю. А. Дубинского [6]. Это — техника дифференциальных операторов бесконечного порядка, которая позволяет рассмотреть много задач, в том числе и задачи вида (1), (2), с новых позиций. Решение задачи (1), (2) ищется в некоторых пространствах (основных и обобщенных) функций, которые введены, изучены и применены к ряду задач для уравнений в частных производных (задача Коши, задача во всем пространстве, краевые задачи) в работе [6]. В этих пространствах имеет место однозначная разрешимость задачи (1), (2).

2. Приведем некоторые сведения из работы [6], используемые в дальнейшем. Укажем описание пространства всех основных функций $H^\infty(G)$ и действие на них псевдодифференциального оператора $A(D)$ с аналитическим в области $G\subset \mathbb{R}^m_\xi$ символом $A(\xi)$ в терминах преобразования Фурье.

$H^\infty(G)$ — пространство функций $u(x)\in L_2(\mathbb{R}^m_x)$, преобразование Фурье которых $\tilde{u}(\xi)$ финитно в области G;

$$A(D)\,u(x) = (2\pi)^{-m}\int_G A(\xi)\,\tilde{u}(\xi)\exp(ix\xi)\,d\xi,\quad u(x)\in H^\infty(G). \tag{3}$$

Пусть $[H^\infty(G)]^*$ — пространство обобщенных функций над $H^\infty(G)$ и $u(x)\in[H^\infty(G)]^*$. Тогда для любой функции $\varphi(x)\in H^\infty(G)$

$$\langle A(D)\,u(x),\varphi(x)\rangle \overset{\text{def}}{\equiv} \langle u(x), A(-D)\,\varphi(x)\rangle. \tag{4}$$

Пространство $H^\infty(G)$ инвариантно относительно оператора $A(D)$, пространство $[H^\infty(G)]^*$ — относительно оператора $A(-D)$. Обозначим $H^{+\infty}(G)=H^\infty(G)$, $H^{-\infty}(G)=[H^{+\infty}(-G)]^*$, где $-G=\{\xi:-\xi\in G\}$. В этих обозначениях для любой аналитической в области G функции $A(\xi)$ отображения $A(D):H^{\pm\infty}(G)\to H^{\pm\infty}(G)$ непрерывны и образуют неформальную алгебру псевдодифференциальных операторов, изоморфную алгебре аналитических в G функций. Здесь и в дальнейшем знаку «$+$» соответствует знак «$+$» и знаку «$-$» — знак «$-$».

Любой функционал $u(x)\in H^{-\infty}(G)$ представим в виде

$$u(x) = A_0(D)\,u_0(x), \tag{5}$$

где $A_0(\xi)$ — аналитическая в G функция и $u_0(x)\in L_2(\mathbb{R}^m)$ такова, что $\operatorname{supp}\tilde{u}_0(\xi)\subset G$.

3. Обозначим через $C^k([a,b],H^{\pm\infty}(G))$ пространство функций $u(t,x)$, которые при каждом $t\in[a,b]$ являются функциями из пространства $H^{\pm\infty}(G)$ и непрерывно зависят от t вместе с производными до порядка k.

Пусть в задаче (1), (2) $N=\max\{n,n_1\}$. Из результатов, приведенных в п. 2, следует, что для произвольной области $G\subseteq\Omega$ отображения $L(\partial/\partial t,D):C^N([a,b],H^{\pm\infty}(G))\to C^{N-n}([a,b],H^{\pm\infty}(G))$ и $M_p(D):C^N([a,b],H^{\pm\infty}(G))\to H^{\pm\infty}(G)$, $p=\overline{1,n}$, непрерывны.

Ниже в п. 4 будет показано, что справедливо также обратное утверждение.

В задаче (1), (2) положим формально $\xi\leftrightarrow D$, где $\xi\in\Omega\subset\mathbb{R}^m_\xi$. Для простоты изложения предположим, что $\xi\in G_1=\Omega\diagdown\Gamma$, где $\Gamma=\{\xi\in\Omega: R_\lambda\times\times(L(\lambda,\xi),L'_\lambda(\lambda,\xi))=0\}$; здесь $R_z(\sigma_1,\sigma_2)$ — результант полиномов σ_1 и σ_2 переменного z [7, стр. 126]. Тогда в области G_1 корни $\lambda_\alpha(\xi)$, $\alpha=\overline{1,n}$, уравнения $L(\lambda,\xi)=0$ суть аналитические функции параметра ξ, а фундаментальное решение $g(t,\tau,\xi)$ однородного уравнения, соответствующего уравнению

$$L(d/dt,\xi)\,u(t,\xi)=h(t), \tag{6}$$

представляется в виде [8]

$$g(t,\tau,\xi)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-\tau)\sum_{j=1}^{n}\frac{\exp\left[\lambda_j(\xi)(t-\tau)\right]}{L'_{\lambda}(\lambda_j(\xi),\xi)}\ , \tag{7}$$

где $a\leqslant t,\tau\leqslant b$. При этом частное решение уравнения (6) выражается формулой

$$u(t,\xi)=\int_a^b g(t,\tau,\xi)\,h(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Функция $g(t,\tau,\xi)$ в каждом из треугольников $a\leqslant t\leqslant\tau\leqslant b$ и $a\leqslant\tau\leqslant\leqslant t\leqslant b$ имеет производные всех порядков по t и по τ, аналитические по ξ в области G_1, причем

$$\frac{\partial g(t,\tau,\xi)}{\partial t}=-\frac{\partial g(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}\ . \tag{9}$$

Замечание 1. Если в формуле (8) функция $h(t)$ $N-n$ раз непрерывно дифференцируема, то $u(t,\xi)$ является N раз непрерывно дифференцируемым по t решением уравнения (6).

Действительно, в силу (8) и (9) производные по t функции $u(t,\xi)$ представляются в виде:

$$u_t^{(p)}(t,\xi)=\sum_{\alpha=0}^{p-1}\left[g_t^{(\alpha)}(t,a,\xi)\,h^{(p-1-\alpha)}(a)-g_t^{(\alpha)}(t,b,\xi)\,h^{(p-1-\alpha)}(b)+\right.$$

$$+\int_a^b g(t,\tau,\xi)\,h^{(p)}(\tau)\,d\tau,\quad n=\overline{1,N-n},$$

где каждое слагаемое имеет непрерывные производные по t до порядка n включительно. Следовательно, $u(t,\xi)$ является N раз непрерывно дифференцируемой по t.

4. Рассмотрим функцию

$$\Delta(\xi)=\det M(\xi)\equiv\det\left\|M_p(\xi)\exp t\lambda_\alpha(\xi)\right\|_{p,\alpha=\overline{1,n}}\,,$$

которая является аналитической в области G_1, и обозначим $G_2=G_1\diagdown\Gamma_1$, где $\Gamma_1=\{\xi\in G_1:\Delta(\xi)=0\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $f(t,x)\in C^{N-n}([a,b],\ H^{\pm\infty}(G_2))$ *и* $\varphi_p(x)\in H^{\pm\infty}(G_2)$, $p=\overline{1,n}$. *Тогда в пространстве* $C^N([a,b],\ H^{\pm\infty}(G_2))$ *существует единственное решение задачи* (1), (2).

Доказательство. Сопоставим функции $g(t,\tau,\xi)$ псевдодифференциальный оператор $g(t,\tau,D)$, действие которого определяется формулой (3), где $G=G_2$. Учитывая замечание 1, легко видеть, что формула

$$v(t,x)=\int_a^b g(t,\tau,D)\,f(\tau,x)\,d\tau \tag{10}$$

определяет решение уравнения (1) из пространства $C^N([a,b],\ H^{\pm\infty}(G_2))$.

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде суммы

$$u(t,x)=v(t,x)+w(t,x), \tag{11}$$

где $v(t,x)$ определена формулой (10). Тогда функция $w(t,x)$ должна быть решением задачи

$$L(\partial/\partial t,D)\,w(t,x)=0, \tag{12}$$

$$M_p(D)\,w(t,x)=\varphi_p(x)-M_p(D)\,v(t,x),\quad p=\overline{1,n}, \tag{13}$$

где правые части условий (13) принадлежат пространству $H^{\pm\infty}(G_2)$.

Чтобы решить задачу (12), (13), рассмотрим семейство задач

$$L(\partial/\partial t, \xi) w_j(t, \xi) = 0, \quad M_p(\xi) w_j(t, \xi) = \delta_{jp}, \quad j, p = \overline{1, n}, \tag{14}$$

где δ_{jp} — символ Кронекера, $\xi \in G_2$, $t \in [a, b]$.

Решениями задач (14) являются функции

$$w_j(t, \xi) = (\exp t\lambda_1(\xi), \ldots, \exp t\lambda_n(\xi)) M^{-1}(\xi) \operatorname{col}(\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jn}), \quad j = \overline{1, n}, \tag{15}$$

которые для всех $t \in [a, b]$ аналитичны по ξ в области G_2 вместе со всеми производными $\partial^\gamma w_j(t, \xi)/\partial t^\gamma$, $\gamma = 1, 2, \ldots$.

Сопоставим каждой функции $w_j(t, \xi)$ псевдодифференциальный оператор $w_j(t, D)$, который действует непрерывно в пространстве $H^{\pm\infty}(G_2)$. Учитывая результаты п. 2, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция

$$w(t, x) = \sum_{p=1}^{n} w_p(t, D)[\varphi_p(x) - M_p(D) v(t, x)] \tag{16}$$

является решением задачи (12), (13) из пространства $C^N([a, b], (H^{\pm\infty} G_2))$. Формулы (10), (11) и (16) определяют решение $u(t, x)$ задачи (1), (2), которое принадлежит пространству $C^N([a, b], H^{\pm\infty}(G_2))$.

Докажем единственность этого решения. Для этого заметим, что в случае $u(t, x) \in C^N([a, b], H^{+\infty}(G_2))$ его x-преобразование Фурье $\tilde{u}(t, \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, является решением следующей задачи:

$$L(d/dt, \xi)\tilde{u}(t, \xi) = \tilde{f}(t, \xi), \tag{17}$$

$$M_p(\xi)\tilde{u}(t, \xi) = \tilde{\varphi}_p(\xi), \quad p = \overline{1, n}. \tag{18}$$

При условиях теоремы задача (17), (18) имеет единственное решение для любого $\xi \in G_2$. Если $\xi \in \mathbb{R}^m_\xi \setminus G_2$, то $\tilde{u}(t, \xi) \equiv 0$. Отсюда следует единственность решения задачи (1), (2) в пространстве $C^N([a, b], H^{+\infty}(G_2))$.

Если решение задачи (1), (2) $u(t, x) \in C^N([a, b], H^{-\infty}(G_2))$, то, согласно формуле (5), имеет место представление $u(t, x) = A_0(t, D) u_0(t, x)$, где функции $\partial^s A_0(t, \xi)/\partial t^s$, $s = 0, 1, \ldots, N$, — непрерывны по $t \in [a, b]$ и аналитичны по ξ в области G_2, а функция $u_0(t, x) \in C^N([a, b], L_2(\mathbb{R}^m))$ такова, что ее x-преобразование Фурье для каждого $t \in [a, b]$ финитно в G_2. Следовательно, для каждого $t \in [a, b]$ преобразование Фурье $\tilde{u}(t, \xi) = A_0(t, \xi)\tilde{u}_0(t, \xi)$ есть обычная функция, локально интегрируемая с квадратом в области G_2. Поскольку $\tilde{u}(t, \xi)$ является решением задачи (17), (18), то из изложенного выше следует единственность решения задачи (1), (2) в пространстве $C^N([a, b], H^{-\infty}(G_2))$. Теорема доказана.

5. В нижеследующих примерах явно строятся соответствующие области G_2.

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу (1), (2) с локальными n-точечными условиями, когда

$$M_p(D) u(t, x) \equiv u(t_p, x), \quad t_p = t_1 + (p - 1) t_0, \quad t_0 > 0, \quad p = \overline{1, n}.$$

Характеристический определитель задачи

$$\Delta(\xi) = \prod_{n \geqslant k > j \geqslant 1} [\exp t_0\lambda_k(\xi) - \exp t_0\lambda_j(\xi)] \exp(-A_{n-1}(\xi) t_1), \quad \xi \in G_1,$$

равен нулю только тогда, когда $\exp t_0\lambda_k(\xi) - \exp t_0\lambda_j(\xi)$, т. е. когда ξ принадлежит множеству $\gamma_\alpha = \{\xi \in G_1 : R_\lambda(L(\lambda, \xi), L(\lambda + 2i\pi\alpha/t_0, \xi)) = 0\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Окончательно получим $G_2 = G_1 \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \gamma_\alpha$.

П р и м е р 2. Исследуем для уравнения (1) задачу с условиями (2), где граничные операторы M_p, $p = \overline{1, n}$, имеют вид $M_p(D) u(t, x) \equiv$

$\equiv u_t^{(p-1)}(t_1, x) - u_t^{(p-1)}(t_2, x)$, $p = \overline{1, n}$. В этом случае определитель

$$\Delta(\xi) = \prod_{n \geqslant k > l \geqslant 1} (\lambda_k(\xi) - \lambda_l(\xi)) \prod_{j=1}^{n} \{\exp t_1\lambda_j(\xi) - \exp t_2\lambda_j(\xi)\}.$$

Обозначим $\gamma_\alpha = \left\{\xi \in G_1 : L\left(\frac{2i\pi\alpha}{t_2 - t_1}, \xi\right) = 0\right\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Тогда $G_2 = G_1 \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \gamma_\alpha$.

Пример 3. Рассмотрим более общие, чем в примере 2, нелокальные условия, полагая

$$M_p(D)\,u(t, x) \equiv B_1(D)\,\partial^{\alpha_p} u(t_1, x)/\partial t^{\alpha_p} - B_2(D)\,\partial^{\alpha_p} u(t_2, x)/\partial t^{\alpha_p}, \quad p = \overline{1, n},$$

где $0 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = n_1$, $n_1 \geqslant n - 1$. Тогда

$$\Delta(\xi) = \prod_{j=1}^{n} (B_1(\xi) \exp t_1\lambda_j(\xi) - B_2(\xi) \exp t_2\lambda_j(\xi))\, W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det \| \lambda_j^{\alpha_k}(\xi) \|_{j,k=\overline{1,n}}$.

Далее покажем, что определитель $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ факторизуется.

Введем обозначения $S_j(\xi) = (-1)^j A_{n-j}(\xi)$; $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(0 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \geqslant n$ — целые числа) — определитель матрицы, полученной из матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccccccccccc} S_n(\xi) & S_{n-1}(\xi) & \ldots & \ldots & \ldots & S_1(\xi) & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & S_n(\xi) & \ldots & \ldots & \ldots & S_2(\xi) & S_1(\xi) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & S_n(\xi) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & S_1(\xi) & 1 \end{array} \right\|$$

размера $(\alpha_n + 1) \times (\alpha_n - n + 1)$ вычеркиванием столбцов с номерами $\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_n + 1$.

Легко видеть, что для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geqslant n$, имеет место

$$\lambda_k^{\alpha}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} S_j(\xi)\, \lambda_k^{\alpha-j}(\xi), \quad \xi \in G_1, \quad k = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Лемма. *Для определителя* $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *справедливо представление*

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, W(0, 1, \ldots, n-1). \tag{20}$$

Доказательство. Используем метод математической индукции по α_n. Если $\alpha_n = n$, то из определения $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и равенств (19) непосредственно следует (20).

Пусть лемма справедлива при $\alpha_n \leqslant \alpha - 1$ $(\alpha \geqslant n + 1)$. Докажем ее справедливость при $\alpha_n = \alpha$. Обозначая через $\eta(j)$ количество чисел α_p, $p = \overline{1, n-1}$, удовлетворяющих неравенству $\alpha_p > \alpha - j$, и разлагая $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ по последней строке, имеем

$$\varkappa \equiv F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, W(0, 1, \ldots, n-1) = \Sigma' (-1)^{j+1-\eta(j)} S_j(\xi) \times$$
$$\times F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1-\eta(j)}, \alpha - j, \alpha_{n-\eta(j)}, \ldots, \alpha_{n-1})\, W(0, 1, \ldots, n-1),$$

где Σ' означает суммирование по $j = 1, \ldots, n$, $j \neq \alpha - \alpha_p$, $p = \overline{1, n-1}$.

Далее, используя предположение индукции и равенство (19), получаем

$$\varkappa = \Sigma' (-1)^{j+1-\eta(j)} S_j(\xi)\, W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1-\eta(j)}, \alpha - j, \alpha_{n-\eta(j)}, \ldots, \alpha_{n-1}) =$$

$$= \Sigma' (-1)^{j+1} S_j(\xi)\, W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha - j) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} S_j(\xi)\, W(\alpha_1, \ldots$$
$$\ldots, \alpha_{n-1}, \alpha - j) = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Лемма доказана.

Поскольку $W(0, 1, \ldots, n-1) \neq 0$ в G_1, то $G_2 = \left[(G_1 \setminus \gamma) \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_j\right] \setminus \chi$, где $\gamma = \{\xi \in G_1 : B_1(\xi) = B_2(\xi) = 0\}$; γ_j, $j \in \mathbb{Z}$ — множество точек $\xi \in \{\theta \in G_1 : B_1(\theta) \neq 0, B_2(\theta) \neq 0\}$, удовлетворяющих уравнению $L\left(\frac{1}{t_2 - t_1}(\ln B_1(\xi) - \ln B_2(\xi) + 2i\pi j), \xi\right) = 0$; $\chi = \{\xi \in G_1 : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\}$.

Пример 4. Рассмотрим в области Q, где $a = 0$, $b = T$, задачу

$$L_1(\partial/\partial t, D)\, u \equiv \partial^{2n} u/\partial t^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(D)\, \partial^{2k} u/\partial t^{2k} = f(t, x), \tag{21}$$

$$\partial^{2q} u/\partial t^{2q}\,|_{t=0} = \partial^{2q} u/\partial t^{2q}\,|_{t=T} = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{22}$$

Здесь операторы $A_k(D)$, $k = \overline{0, n-1}$, те же, что в уравнении (1); $f(t, x) \in C^0([a, b], H^{\pm\infty}(G_2))$.

Для этой задачи определитель $\Delta(\xi)$ имеет вид

$$\Delta(\xi) = \prod_{n \geqslant p > r \geqslant 1} [\lambda_p^2(\xi) - \lambda_r^2(\xi)] \prod_{j=1}^{n} \{\exp[-\lambda_j(\xi) T] - \exp \lambda_j(\xi) T\},$$

где $\pm\lambda_l(\xi)$, $l = \overline{1, n}$, — корни уравнения $L_1(\lambda, \xi) = 0$.

Пусть $G_1 = \Omega \setminus \Gamma$, где $\Gamma = \{\xi \in \Omega : R_\lambda(L_1(\lambda, \xi), \partial L_1(\lambda, \xi)/\partial\lambda) = 0\}$. Обозначим $\gamma_\alpha = \{\xi \in G_1 : L_1(i\pi\alpha/T, \xi) = 0\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Тогда $G_2 = G_1 \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \gamma_\alpha$.

В частном случае задачи (21), (22), когда $m = 1$, а оператор $L_1(\partial/\partial t, D) \equiv L_2(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ является однородным по порядку дифференцирования и строго гиперболическим, область G_2 получается выбрасыванием из прямой $\mathbb{R}^1_\xi$ счетного множества точек $\left\{\xi : \xi = \frac{\pi\alpha}{\lambda_l T},\ l = \overline{1, n},\ \alpha \in \mathbb{Z}\right\}$, где λ_l, $l = \overline{1, n}$, — положительные корни уравнения $L_2(\lambda, 1) = 0$.

Замечание 2. Результаты настоящей работы переносятся на случаи систем уравнений вида (1) и уравнения (1) с переменными по t коэффициентами A_j, $j = 0, n-1$.

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев : Наук. думка, 1984.— 264 с.
2. *Илькив В. С., Пташник Б. И.* Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения.— 1984.— 20, № 6.— С. 1012—1023.
3. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Там же.— 1977.— 13, № 4.— С. 637—645.
4. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений и систем.— Львов, 1982.— 60 с.— (Препринт / АН УССР, Физ.-мех. ин-т; № 64).
5. *Пташник Б. И.* Задача типа Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Укр. мат. журн.— 1970.— 22, № 6.— С. 841—848.
6. *Дубинский Ю. А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике // Успехи мат. наук.— 1982.—37, вып. 5 (227).— С. 97—159.
7. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М.: Наука, 1979.— 624 с.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М.: Наука, 1969.— 526 с.

Ин-т прикл. проблем механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 22.02.85