УДК 517.5

Г. А. Михалин

О теоремах типа Харди — Литлвуда

1. Пусть $0 < p(x)$ — суммируемая функция на $[0; b]$ $\forall b > 0$, $\exists \alpha > 0$: $x^{1-\alpha}p(x)$ возрастает, $p(tx)/p(x) \to L(t)$, $x \to \infty$, $t \in [1/2; 2]$, причем $L(t)$ непрерывна в точке $t = 1$. Будем говорить, что такие функции принадлежат классу HL, и записываем $p(x) \in HL$.

Введем обозначения

$$p^*(x)=\int_0^\infty p(u)\,e^{-u/x}du,\quad S^*(x)=\int_0^\infty S(u)\,e^{-u/x}du,\quad x>0. \tag{1}$$

Если $p(u)\in HL$, то $p^*(x)$ существует для $x>0$. Существование $S^*(x)$ для $x>0$ всюду предполагается.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $S(u)$ и $p(u)$ — неубывающие (невозрастающие) функции, $p(u)\in HL$, $p^*(x)$ и $S^*(x)$ определяются равенствами* (1) *и $S^*(x)=O(p^*(x))$. Тогда $S(x)=O(p(x))$, $x\to\infty$. Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(tx)-f(x))=0$ $\forall t>0$, где $f(x)=S^*(x)/p^*(x)$, то*

$$\lim_{x\to\infty}(S^*(x)/p^*(x)-S(x)/p(x))=0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $p(u)\in HL$, причем $L(t)=1$, $t\in[2^{-1};2]$, $S^*(x)=O(p^*(x))$ и $\underline{\lim\limits_{y>x\to\infty}}(S(y)-S(x))/p(y)\geqslant 0$ при $\overline{\lim\limits_{y>x\to\infty}}\,y/x<\infty$. Тогда для всякого частичного предела M функции $S(x)/p(x)$ найдется $x_k\to\infty$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty}S(x_k)/p(x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}S^*(x_k)/p^*(x_k)=M$. Если же $\lim\limits_{y>x\to\infty}(S(y)-S(x))/p(y)=0$ при $\overline{\lim\limits_{y>x\to\infty}}\,y/x<\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}(S(x)/p(x)-S^*(x)/p^*(x))=0$.*

Теорема 3. *Пусть функции $p(u)$ и $S(u)$ суммируемы на $[0;b]$ $\forall b>0$,*

$$p(u)\geqslant 0,\quad P(x)=\int_0^x p(u)\,du,\quad f(x)=\frac{\int_0^\infty p(u)\,e^{-u/x}S(u)\,du}{\int_0^\infty p(u)\,e^{-u/x}du}=O(1),$$

$$S^{(0)}(x)=S(x),\quad S^{(1)}(x)=\int_0^x p(u)\,S(u)\,du,\quad S^{(\alpha)}(x)=\int_0^x S^{(\alpha-1)}(u)\,du,$$

$$P^{(0)}(x)=1,\quad P^{(1)}(x)=\int_0^x p(u)\,du,\quad P^{(\alpha)}(x)=\int_0^x P^{(\alpha-1)}(u)\,du,\quad \alpha=2,3,\ldots.$$

Тогда если $\lim\limits_{y\to\infty}(f(ty)-f(y))=0$ $\forall t>0$, $C^{(\alpha)}(x)=S^{(\alpha)}(x)/P^{(\alpha)}(x)$ лежит в угле раствора меньшего π, а $P^{(\alpha+1)}(x)\in HL$, то $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-C^{(\alpha+1)}(x))=0$.

Теорема 4. *Пусть $p(u)$ и $S(u)$ суммируемы на $[0,b]$ $\forall b>0$, $p(u)\geqslant 0$, $P(x)=\int_0^x p(u)\,du>0$, причем $P(cy)/P(y)\to 1$, $y\to\infty$, $\forall c\in[2^{-1},2]$,*

$$f(x)=\frac{\int_0^\infty p(u)\,S(u)\,e^{-u/x}du}{\int_0^\infty p(u)\,e^{-u/x}du}=O(1),\ t(x)=\frac{\int_0^x p(u)\,S(u)\,du}{P(x)}.$$

Тогда если $up(u)\,S(u)=o(P(u))$, то $\lim\limits_{x\to\infty}(t(x)-f(x))=0$. Если же $up(u)\,S(u)=o_L(P(u))$, то для всякого частичного предела M функции $t(x)$ найдется $x_k\to\infty$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty}t(x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=M$.

Заметим, что утверждения теорем 1 — 4 обеспечивают совпадение ядер в смысле Кноппа и множеств частичных пределов соответственно функций $S(x)/p(x)$ и $S^*(x)/p^*(x)$, $S^{(\alpha+1)}(x)/P^{(\alpha+1)}(x)$ и $f(x)$, $t(x)$ и $f(x)$. В частности, если одна из функций пары сходится к M, то к M сходится и другая функция этой пары.

Возьмем в теореме 1 $p(u) = u^\gamma \Phi(u)$, где $\gamma > -1$, $\Phi(u) > 0$ и $\Phi(cx)/\Phi(x) \to 1$, $x \to \infty$, $\forall c > 0$, причем $p(u)$ и $S(u)$ неубывающие или невозрастающие, но $\exists \delta > 0 : x^{1-\delta} p(x)$ неубывающая. Тогда $p(u) \in XL$ и, используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\int_0^\infty t^\gamma \Phi(t) e^{-t/x} dt = \int_0^\infty (yx)^\gamma \Phi(yx) e^{-y} x dy = x^{1+\gamma} \Phi(x) \int_0^\infty y^\gamma \Phi(yx)/\Phi(x) e^{-y} dy \sim$$
$$\sim x^{1+\gamma} \Phi(x) \Gamma(\gamma+1), \quad x \to \infty.$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает такое обобщение известных теорем [1] Карамата (теорема 108) и Саса (теорема 98), которые являются расширениями знаменитой теоремы Харди—Литлвуда [1, теорема 96; 2, с. 37, 55].

Следствие 1. *Пусть $p(u) = u^\gamma \Phi(u)$ и $S(u)$ удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда если $S^*(x) = O(x^{1+\gamma}\Phi(x))$, то $S(x) = O(x^\gamma \Phi(x))$. Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to\infty} (S^*(tx)/((tx)^{1+\gamma}\Phi(tx)) - S^*(x)/(x^{1+\gamma}\Phi(x))) = 0$ $\forall t > 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} (S^*(x)/(x^{1+\gamma}\Phi(x)) - S(x)\Gamma(\gamma+1)/(x^\gamma\Phi(x))) = 0$.*

Если в условиях следствия 1 $\gamma = 0$, то, как показывает теорема 2, справедливо более сильное утверждение, чем следствие 1. Например, в случае $p(u) = \ln(u+1)$ следующее.

Следствие 2. *Пусть $S(u)$ суммируема на $[0, b]$ $\forall b > 0$ и $\varliminf\limits_{y > x \to \infty} (S(y) - S(x))/\ln x \geqslant 0$ при $\varlimsup\limits_{y > x\to\infty} y/x < \infty$. Тогда если $S^*(x) = O(x \ln x)$, то для всякого частичного предела M функции $S(x)/\ln x$ найдется $x_k \to \infty$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} S(x_k)/\ln x_k = \lim S^*(x_k)/x_k \ln x_k = M$. Если же $S^*(x) = O(x \ln x)$ и $\lim\limits_{y > x\to\infty} (S(y) - S(x))/\ln x = 0$ при $\varlimsup\limits_{y > x\to\infty} y/x < \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty} (S(x)/\ln x - S^*(x)/x \ln x) = 0$.*

Теорема 3 обобщает классическую теорему Харди—Литлвуда о равносильности методов Абеля и Чезаро. Кроме того, теоремы 1—4 обобщают ряд утверждений работы [3].

2. Для доказательства сформулированных утверждений нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть $p(u) \in HL$ и $P(x) = \int_0^\infty p(u)\, du$. Тогда:*

1) $P(2x) = O(P(x))$, $x \to \infty$; 2) $xp(x) \asymp P(x)$, $x \to \infty$; 3) $\exists \alpha > 0$, $c > 0$, $M > 1$, $x_0 > 0$; $0 \leqslant p(tx)/p(x) \leqslant M(t^{\alpha-1} + t^c)$, $x > x_0$, $t > 0$;

4) $\int_0^\infty p(u) e^{-u/x} du \asymp P(x)$, $x \to \infty$; 5) $\int_0^\infty p(u) e^{-\sigma(x)u/x} du = P(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(x) \asymp 1$, $x \to \infty$; 6) $P(y)/P(x) \to 1 \Leftrightarrow y/x \to 1$, $y > x \to \infty$;

7) $p(tx)/p(x) \to 1$ $(x \to \infty,\ t \in [1/2; 2]) \Rightarrow p(tx)/p(x) \to 1$ $\forall t > 0$ и

$$p(y)/p(x) \to 1,$$

при $\varlimsup\limits_{y > x\to\infty} y/x < \infty$.

Лемма 2. *Если $\varliminf\limits_{y > x\to\infty} (\alpha(y) - \alpha(x)) \geqslant 0$ при $\varlimsup\limits_{y > x\to\infty} y/x < \infty$, то для любого конечного частичного предела M функции $\alpha(x)$ при $x \to \infty$ можно указать $z_k \to \infty$, для которой $\alpha(cz_k) \to M$, $k \to \infty$, $\forall c > 0$.*

Доказательство леммы 1. Пусть $p(u) \in HL$. Тогда $p(cx)/p(x) \to L(c)$, $x \to \infty$, $c \in [2^{-1}; 2]$, причем $L(c)$ непрерывна в точке $c = 1$. По этой причине $\exists c \in (1; 2] : p(cx) \asymp p(x)$, $x \to \infty$. Отсюда $1 \leqslant P(cx)/P(x) \leqslant$ $\leqslant 1 + HP^{-1}(x) \int_{c^{-1}x}^{x} p(u)\, du \leqslant 1 + H$ $(x > x_0) \Rightarrow P(2x) = O(P(x))$, и утверждение 1 доказано.

Так как $HP(x) \geqslant P(2x) \geqslant \int\limits_x^{2x} p(u)\,du \geqslant x^{1-\alpha} p(x) \int\limits_x^{2x} \frac{du}{u^{1-\alpha}} = p(x)\,x\,(2^\alpha - 1)/\alpha$, $P(x) \leqslant x^{1-\alpha} p(x) \int\limits_0^x u^{\alpha-1} du = xp(x)/\alpha$, то $xp(x) \asymp P(x)$. Таким образом, доказано утверждение 2.

Если $p(x) \uparrow$, $p(2x) \leqslant Hp(x)$, $x > x_0$, и $v \geqslant 1$, то $\exists k : v \in [2^k, 2^{k+1}) \Rightarrow$ $\Rightarrow p(vx)/p(x) \leqslant H^{k+1} \leqslant H\ H^{\log_2 v} = Hv^c$, где $H > 1$ и $c = \log_2 H > 0$ не зависят ни от v, ни от $x > x_0$.

Возьмем произвольную $p(u) \in HL$. Тогда $\exists \alpha > 0 : x^{1-\alpha} p(x) \uparrow$, $x > 0$. Отсюда $p(tu)/p(u) \leqslant t^{\alpha-1}$, если $0 < t < 1$. Если же $t > 1$, то $p_1(u) = u^{1-\alpha} p(u) \uparrow$, и по доказанному $p_1(tu)/p_1(u) \leqslant Ht^c$. Таким образом, $p(tu)/p(u) \leqslant H(t^{\alpha-1} + t^c)$ $\forall t > 0$, $u > u_0$, где $H > 1$, $c > 0$, $\alpha > 0$ не зависят ни от t, ни от u. Утверждение 3 доказано.

Для доказательства утверждения 4 заметим, что

$$e^{-1} \int\limits_0^x p(u)\,du \leqslant \int\limits_0^\infty p(u)\,e^{-u/x} du = x \int\limits_0^\infty p(yx)\,e^{-y} dy = xp(x) \int\limits_0^\infty e^{-y} p(yx)/p(x)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant Hxp(x) \left(\int\limits_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy + \int\limits_0^\infty y^c e^{-y} dy \right) = H_1 xp(x) \leqslant H_2 P(x),$$

откуда получаем требуемое.

Пусть $P(2x) = O(P(x))$, $xp(x) \asymp P(x)$, $\int\limits_0^\infty p(u)\,e^{-\sigma(x)u/x} du = P(x)$. Тогда, очевидно, $x/\sigma(x) \to \infty$, $x \to \infty$. По этой причине, в силу утверждения 4 $P(x) \asymp P(x/\sigma(x))$. Допустим, что $\sigma(x) \to \infty$, $x = x_k \to \infty$, и пусть $a_k = \sigma(x_k)$, $b_k = x_k/\sigma(x_k) \Rightarrow P(a_k b_k)/P(b_k) \leqslant H$. С другой стороны, $p(x)/P(x) \geqslant H_1/x$ $(x > x_0) \Rightarrow P(2y)/P(y) = 1 + P^{-1}(y) \int\limits_y^{2y} p(u)\,du \geqslant 1 + H_1 \int\limits_y^{2y} dx/x = 1 + H_1 \ln 2 =$ $= H_2 > 1$, значит, если $a_k \in [2^{i_k}; 2^{i_k+1})$, то $H \geqslant P(a_k b_k)/P(b_k) \geqslant P(2^{i_k} b_k)/P(b_k) \geqslant H_2^{i_k} \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, \sigma(x) < \infty$. Аналогично показываем, что $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, \sigma(x) > 0$. Утверждение 5 доказано.

Для доказательства утверждения 6 заметим, что если $y > x \to \infty$, $x \in [n; n+1)$, $y \in [m; m+1)$, то $1 < y/x \to 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant m/n \to 1$. Далее, $P(k+1) \times$ $\times P^{-1}(k) = 1 + P^{-1}(k) \int\limits_k^{k+1} (p(u)/P(u))\,P(u)\,du \leqslant 1 + H_1/k$, $k > k_0$, в силу чего $1 \leqslant P(y)/P(x) \leqslant \prod\limits_{k=n}^m P(k+1)/P(k) \leqslant (1 + H_1/n)^{m-n+1}$. С другой стороны, $P(k+1)/P(k) \geqslant 1 + H_2/k$, и потому $P(y)/P(x) \geqslant \prod\limits_{k=n+1}^m P(k+1)/P(k) \geqslant$ $\geqslant (1 + H_2/m)^{m-n} \geqslant 1$. Из этих неравенств вытекает утверждение 6.

Доказывая утверждение 7, допускаем $p(tx)/p(x) \to 1$, $x \to \infty$, $t \in [2^{-1}; 2]$. Тогда, если $t \in [2^k; 2^{k+1}]$, то $t/2 \in [2^{k-1}; 2^k]$ и $\frac{p(tx)}{p(x)} = \frac{p(2tx/2)}{p(tx/2)} \times$ $\times \frac{p(tx/2)}{p(x)} \to 1$, $x \to \infty$. В силу принципа математической индукции $p(tx)/p(x) \to 1$, $x \to \infty$, $t \geqslant 1$. Аналогичные рассуждения проводим для $t \leqslant 1/2$. Первая часть утверждения 7 доказана. Поскольку $P(x) = \int\limits_0^x p(u)\,du =$

$= x\int_0^1 p(xt)\,dt = xp(x)\int_0^1 \frac{p(xt)}{p(x)}\,dt$, то $P(x)/(xp(x)) = \int_0^1 (p(xt)/p(x))\,dt$. В силу утверждения 3 к последнему интегралу можно применить теорему Лебега о предельном переходе, по которой $P(x)/(xp(x)) \to 1$, $x \to \infty$. Теперь, если $1 < y/x \to 1$, $x \to \infty$, то по утверждению 6 $P(y)/P(x) \to 1$, $x \to \infty$, а значит, и $p(y)/p(x) \to 1$, $x \to \infty$.

Допустим, что $\exists x_k, \; y_k : 1 < y_k/x_k \leqslant H, \; p(y_k)/p(x_k) \to \beta \neq 1$. Можно считать $y_k/x_k \to \alpha > 1$, $k \to \infty$. Тогда $y_k/(\alpha x_k) \to 1$, $k \to \infty$, $\beta = \lim\limits_{k\to\infty} p(y_k)/p(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} (p(y_k)/p(\alpha x_k))\, p(\alpha x_k)/p(x_k) = 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение 7. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть M — произвольный конечный частичный предел $\alpha(x)$ при $x \to \infty$. Если $\alpha(x) \to M$, $x \to \infty$, то утверждение леммы 2 верно, поэтому считаем M не единственным частичным пределом $\alpha(x)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ произвольным фиксированным, $\alpha(x_k^*) \to M$, $k \to \infty$, $|\alpha(x_k^*) - M| < \varepsilon/2 \;\forall k \; x_{k+1}^*/x_k \to \infty$. Возможны два случая:

1) $|\alpha(x) - M| < \varepsilon$, $x \in [x_k^*; x_{k+1}^*)$, $k = k_i \to \infty$;

2) $\forall k > k_0 \; \exists y \in (x_k^*; x_{k+1}^*) : |\alpha(y) - M| \geqslant \varepsilon$. В случае 1 $\exists [x_i; y_i] : |\alpha(x) - M| < \varepsilon$, $x_i \leqslant x \leqslant y_i$, $y_i/x_i \to \infty$. Если выполнено 2, то, допустив $\alpha(y) \geqslant M + \varepsilon \;\; \forall y \in (x_k^*; x_{k+1}^*)$, получим, что $\exists z_k \in (x_k^*; x_{k+1}^*)$, z_k достаточно близко к x_{k+1}^* и $\alpha(z_k) \geqslant M + \varepsilon$, а $\alpha(x_{k+1}) < M + \varepsilon/2$, откуда $\alpha(x_{k+1}) - \alpha(z_k) < M + \varepsilon/2 - M - \varepsilon = -\varepsilon/2 < 0$, а $x_{x+1}/z_k = O(1)$, что невозможно. Аналогично не может быть, чтобы $\alpha(y) \leqslant M - \varepsilon \;\forall y \in (x_k^*; x_{k+1}^*)$.

Пусть $y_k = \inf\{y \in (x_k^*; x_{k+1}^*) : \alpha(y) \leqslant M - \varepsilon\}$. Тогда $M - \varepsilon < \alpha(y)$ для $x_k^* < y < y_k$ и $\exists z_k \geqslant x_k^*$ близкое к $y_k : \alpha(z_k) \leqslant M - \varepsilon$, причем из условия $\alpha(z_k) - \alpha(x_k^*) < M - \varepsilon - M + \varepsilon/2 = -\varepsilon/2$ вытекает $y_k/x_k^* \to \infty$. Если $\alpha(y) < M + \varepsilon \;\forall y \in (x_k^*; y_k)$, то положим $x_k = x_k^*$. В противном случае определим $x_k = \sup\{y \in (x_k^*; y_k) : \alpha(y) \geqslant M + \varepsilon\}$. Тогда $\alpha(y) < M + \varepsilon$ для $x_k < y < y_k$ и существует $z_k^* \leqslant x_k$, близкое к $x_k : \alpha(z_k^*) \geqslant M + \varepsilon$. Поскольку $\exists z_k \geqslant y_k$, близкое к $y_k : \alpha(z_k) \leqslant M - \varepsilon$, то $y_k/x_k \to \infty$, $k \to \infty$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists (x_k; y_k) : y_k/x_k \to \infty$, $k \to \infty$, и $|\alpha(x) - M| < \varepsilon$, $x \in (x_k; y_k)$.

Возьмем $\varepsilon_k \downarrow 0$, $\lambda_k \uparrow \infty$, $k \to \infty$. Для числа $\varepsilon = \varepsilon_1$ найдем $(y_\nu^{(1)}; x_\nu^{(1)}) : |\alpha(u) - M| < \varepsilon_1 \; (y_\nu^{(1)} < u < x_\nu^{(1)})$, $x_\nu^{(1)}/y_\nu^{(1)} \to \infty$, $\nu \to \infty$. Выберем ν_1 таким, чтобы $x_{\nu_1}^{(1)}/y_{\nu_1}^{(1)} > \lambda_1$, и положим $x_1 = x_{\nu_1}^{(1)}$ $y_1 = y_{\nu_1}^{(1)}$. Допустим, что определены x_k, $y_k : x_k/y_k \geqslant \lambda_k$, $|\alpha(u) - M| < \varepsilon_k$, $y_k < u < x_k$.

Для числа $\varepsilon = \varepsilon_{k+1}$ найдем $y_\nu^{(k+1)}, x_\nu^{(k+1)} : |\alpha(u) - M| < \varepsilon_{k+1} \; (y_\nu^{(k+1)} < u < x_\nu^{(k+1)})$, $x_\nu^{(k+1)}/y_\nu^{(k+1)} \to \infty$. Выбрав $\nu_{k+1} : y_{\nu_{k+1}}^{(k+1)} > x_k$, $x_{\nu_{k+1}}^{(k+1)}/y_{\nu_{k+1}}^{(k+1)} \geqslant \lambda_{k+1}$ и положив $x_{k+1} = x_{\nu_{k+1}}^{(k+1)}$, $y_{k+1} = y_{\nu_{k+1}}^{(k+1)}$, получим последовательности (y_k) и $(x_k) : |\alpha(u) - M| < \varepsilon_k$, $y_k < u < x_k$, $x_k/y_k \geqslant \lambda_k \to \infty$, а $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$. Положим $z_k = y_k\sqrt{\lambda_k}$. Тогда $y_k < z_k < x_k$, а потому $\alpha(z_k) \to M$. В то же время $\forall c > 0 \; cz_k = cy_k\sqrt{\lambda_k} \in (y_k; x_k)$, $k > k_0$, и значит $\alpha(cz_k) \to M$, $k \to \infty$. Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Так как $\int_0^\infty p(u)\,e^{-\sigma u/a}\,du$ — непрерывная функция переменной $\sigma \in (0; +\infty)$ $\forall a > 0$, причем множество ее значений содержит промежуток $(0; +\infty)$, то $\forall a > 0 \; \exists \sigma = \sigma(a) > 0$: $\int_0^\infty p(u)\,e^{-\sigma u/a}\,du = P(a)$.

Из утверждения 5 леммы 1 следует $\sigma(a) \asymp 1$, а из равенства $S^*(a/\sigma)/p^*(a/\sigma) = O(1)$, $a/\sigma \to \infty$, —

$$S^*(a/\sigma(a))/p^*(a/\sigma(a)) = O(1), \quad a \to \infty.$$

Поэтому с учетом условия $xp(x) \asymp P(x)$ имеем

$$0 \leqslant S(u) \uparrow \Rightarrow H_1 \geqslant S^*(a/\sigma(a))/P(a) = P^{-1}(a) \int_0^\infty S(u)\, e^{-\sigma(a)u/a} du =$$

$$= aP^{-1}(a) \int_0^\infty S(at)\, e^{-\sigma t} dt \geqslant aP^{-1}(a) \int_1^\infty S(at)\, e^{-\sigma t} dt \geqslant H_2 S(a)/(p(a)\,\sigma(a)\, e^{\sigma(a)}) \geqslant$$

$$\geqslant H_3 S(a)/p(a) \geqslant 0, \tag{3}$$

$$0 \leqslant S(at)/p(a) \leqslant \begin{cases} M, & \text{если } 0 < t \leqslant 1, \\ Mp(at)/p(a), & \text{если } t > 1; \end{cases}$$

$$0 \leqslant S(u) \downarrow \Rightarrow H_1 \geqslant S^*(a/\sigma(a))/P(a) \geqslant aP^{-1}(a) \int_0^1 S(at)\, e^{-\sigma t} dt \geqslant$$

$$\geqslant H_2 S(a)/(p(a)\, e^{\sigma(a)}) \geqslant H_3 S(a)/p(a) \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant S(at)/p(a) \leqslant \begin{cases} M, & \text{если } t \geqslant 1, \\ M\, p(at)/p(a), & \text{если } 0 < t < 1. \end{cases} \tag{4}$$

Поскольку нас интересует поведение функции $S(u)$ при $u \to \infty$, то можем считать $S(u) = S(1)$ для $0 \leqslant u \leqslant 1$ и для функции $S(u)$ выполнено условие (3) или (4). В силу проведенных рассуждений $S(x)/p(x) = O(1)$, $x \to \infty$.

Из утверждения 3 леммы 1 и из неравенств (3), (4) получаем $\exists M_1 > 1$, $c > 0$, $\alpha > 0$:

$$0 \leqslant S(at)/p(a) \leqslant M_1((t+1)^c + t^{\alpha-1}) \quad \forall t > 0. \tag{5}$$

Допустим, что условие (2) не выполняется. Тогда существует последовательность $a_n \to \infty$, для которой $S^*(a_n)/p^*(a_n) \to A$, $S(a_n)/p(a_n) \to B \neq A)$ $n \to \infty$. Рассмотрим последовательности неубывающих (невозрастающих функций $\psi_n(t) = S(a_n t)/p(a_n)$, $\Phi_n(t) = p(a_n t)/p(a_n)$. В силу условий $1 - 7$ леммы 1 и (5) эти последовательности равномерно ограничены на множествах $(1/(k+1);\ 1/k] \cup (k;\ k+1]$, $k = 1, 2, \ldots$.

Используя известный принцип выбора Хелли [4, с. 208, лемма 2], индуктивно строим последовательности индексов $(n_m^{(k)})$ и неубывающие (невозрастающие) функции $L_k(t)$ и $L_k^*(t)$ такие, что $\{n_m^{(k-1)}\} \supset \{n_m^{(k)}\}$, $\psi_{n_m^{(k)}}(t) \to L_k(t)$, $\Phi_{n_m^{(k)}}(t) \to L_k^*(t)$, $m \to \infty$, $t \in (1/(k+1);\ 1/k] \cup (k;\ k+1]$. Тогда $L_1(1) = B$, $L_1^*(1) = 1$, и так как $p(u) \in HL$, то $L_1^*(t)$ непрерывна в точке $t = 1$.

Определим функции $L(t)$ и $L^*(t)$, положив $L(t) = L_k(t)$, если $t \in (1/(k+1);\ 1/k] \cup (k;\ k+1]$, $k = 1, 2, \ldots$, $L^*(t) = L_k^*(t)$, если $t \in (1/(k+1);\ 1/k] \cup (k;\ k+1]$, $k = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим подпоследовательность $\psi_{i_k}(t)$ исходной последовательности $\psi_n(t)$, где $i_k = n_k^{(k)}$. Ясно, что для каждого фиксированного $\nu = 1, 2, \ldots$ последовательность $\psi_{i_k}(t)$ будет подпоследовательностью последовательности $\psi_{n_m^{(\nu)}}(t)$. По этой причине $\psi_{i_k}(t) = S(a_{i_k} t)/p(a_{i_k}) \equiv \equiv S(b_k t)/p(b_k) \to L(t)$, $k \to \infty$, $t > 0$. Аналогично $\Phi_{i_k}(t) = p(a_{i_k} t)/p(a_{i_k}) \equiv \equiv p(b_k t)/p(b_k) \to L^*(t)$, $k \to \infty$, $t > 0$, причем $L(1) = B$, $L_1^*(1) = 1$ и $L^*(t)$ непрерывна в точке $t = 1$.

Из неравенств (3) и (5) вытекают аналогичные оценки для функций $L(t)$ и $L^*(t)$. Это дает возможность воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, в силу которой

$$\int_0^\infty \psi_{i_k}(t)\, e^{-\sigma t} dt = \int_0^\infty \frac{S(b_k t)}{p(b_k t)}\, e^{-\sigma t} dt \to \int_0^\infty L(t)\, e^{-\sigma t} dt,$$

$$\int_0^\infty \Phi_{i_k}(t)\, e^{-\sigma t}\, dt = \int_0^\infty \frac{p(b_k t)}{p(b_k)}\, e^{-\sigma t} dt \to \int_0^\infty L^*(t)\, e^{-\sigma t} dt, \quad k \to \infty,$$

откуда, взяв $\sigma = 1$, получим $S^*(b_k)/p^*(b_k) = \int_0^\infty S(b_k t)\, e^{-t} dt \left(\int_0^\infty p(b_k t)\, e^{-t} dt\right)^{-1} \to$ $\to \int_0^\infty L(t)\, e^{-t} dt / \int_0^\infty L^*(t)\, e^{-t} dt$, $k \to \infty$. Замечая, что (b_k) — подпоследовательность последовательности (a_k) и $S^*(a_k)/p^*(a_k) \to A$, $k \to \infty$, находим

$$\int_0^\infty L(t)\, e^{-t} dt = A \int_0^\infty L^*(t)\, e^{-t} dt.$$

В силу условий теоремы 1 $S^*(b_k/\sigma)/p^*(b_k/\sigma) - S^*(b_k)/p^*(b_k) \to 0$, $k \to \infty$, $\forall \sigma > 0$, значит, равенство $\int_0^\infty L(t)\, e^{-\sigma t} dt = \int_0^\infty A L^*(t)\, e^{-\sigma t} dt$ выполняется для любого $\sigma > 0$. Отсюда по свойству единственности преобразования Лапласа [5, с. 31] $L(t) = AL^*(t)$ почти всюду на $(0; +\infty)$. Поскольку $L(t)$ монотонная, а $L^*(t)$ непрерывна в точке $t = 1$, то из последнего равенства следует $AL^*(1) = L(1)$, т. е. $A = B$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. В силу известного результата [6] (теорема 3) из условий теоремы 2 вытекает $S(x) = O(p(x))$. По этой причине условие $\underline{\lim}_{y > x \to \infty} (S(y)/p(y) - S(x)/p(x)) \geqslant 0$ равносильно условию $\underline{\lim}_{y > x \to \infty} (S(y) - S(x))/p(y) \geqslant 0$ при $\overline{\lim}_{y > x \to \infty} y/x < \infty$. Это же относится и к условиям $\lim_{y > x \to \infty} (S(y)/p(y) - S(x)/p(x)) = 0$ и $\lim_{y > x \to \infty} (S(y) - S(x))/p(y) = 0$.

Пусть $\underline{\lim}_{y > x \to \infty} (S(y)/p(y) - S(x)/p(x)) \geqslant 0$ при $\overline{\lim}\, y/x < \infty$, а M — произвольный частичный предел функции $S(x)/p(x)$ при $x \to \infty$. В силу леммы 2 существует $x_k \to \infty$, для которой $S(cx_k)/p(cx_k) \to M$, $k \to \infty$, $\forall c > 0$. Учитывая это, неравенство 3) и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, имеем

$$\frac{S^*(x_k)}{p^*(x_k)} = \int_0^\infty \frac{S(x_k t)}{p(x_k t)} \frac{p(x_k t)}{p(x_k)}\, e^{-t} dt \Big/ \int_0^\infty \frac{p(x_k t)}{p(x_k)}\, e^{-t} dt \to M, \quad k \to \infty.$$

Если же $\lim_{y > x \to \infty} (S(y)/p(y) - S(x)/p(x)) = 0$ при $\overline{\lim}_{y > x \to \infty} y/x < \infty$, то, считая $0 < H_1 \leqslant |S(x)/p(x)| \leqslant H_2$, получаем $S(cx)/p(cx) \sim S(x)/p(x)$, $x \to \infty$, $\forall c > 0$. Учитывая это, находим

$$\frac{S^*(x)}{p^*(x)} \frac{p(x)}{S(x)} = \frac{\int_0^\infty (S(xt)/p(xt))\,(p(x)/S(x))\,(p(xt)/p(x))\, e^{-t} dt}{\int_0^\infty (p(xt)/p(x))\, e^{-t} dt} \to 1, \quad x \to \infty,$$

откуда вытекает $S^*(x)/p^*(x) - S(x)/p(x) \to 0$, $x \to \infty$.

Условию $|S(x)/p(x)| \geqslant H_1 > 0$ можно удовлетворить, переходя при необходимости к функции $S_1(x) = S(x) + Hp(x)$, где $H > 0$ — достаточно большое число.

5. Справедливость теоремы 3 вытекает из равенства

$$t(x) = \frac{\int_0^\infty S(u)\, p(u)\, e^{-u/x} du}{\int_0^\infty p(u)\, e^{-u/x} du} = \frac{\int_0^\infty P^{(\alpha+1)}(u)\, C^{(\alpha+1)}(u)\, e^{-u/x} du}{\int_0^\infty P^{(\alpha+1)}(u)\, e^{-u/x} du}.$$

Применяя рассуждения к действительной или мнимой части $P^{(\alpha+1)}(u) \times \times C^{(\alpha+1)}(u) = \int\limits_0^u P^{(\alpha)}(y)\, C^{(\alpha)}(y)\, dy$ и считая, не ограничивая общности, что $\operatorname{Re} C^{(\alpha)}(y) \geqslant 0$ или $\operatorname{Im} C^{(\alpha)}(y) \geqslant 0$ $\forall y > 0$, получаем нужное нам утверждение.

6. Для доказательства теоремы 4 заметим, что

$$f(x) = \frac{\int\limits_0^\infty S(u)\, p(u)\, e^{-u/x} du}{\int\limits_0^\infty p(u)\, e^{-u/x} du} = \frac{\int\limits_0^\infty P(u)\, t(u)\, e^{-u/x} du}{\int\limits_0^\infty P(u)\, e^{-u/x} du}, \quad |P(y)\, t(y) - P(x)\, t(x)|/$$

$$/P(y) = P^{-1}(y) \left| \int\limits_x^y p(u)\, S(u)\, du \right| = P^{-1}(y) \left| \int\limits_x^y \frac{\alpha(u)\, P(u)}{u}\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \leqslant u \leqslant y} |\alpha(u)| \ln \frac{y}{x} \to 0,$$

когда $\overline{\lim\limits_{y > x \to \infty}}\, y/x < \infty$, или же

$$(P(y)\, t(y) - P(x)\, t(x))/P(y) \geqslant - \sup_{x \leqslant u \leqslant} \alpha(u) \ln \frac{y}{x} \to 0,$$

когда $\overline{\lim\limits_{u > x \to \infty}}\, y/x < \infty$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2, в силу которой теорема 4 верна.

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
2. *Постников А. Г.* Тауберова теория и ее применения.— М. : Наука, 1979.— 148 с.
3. *Михалин Г. А.* Об условиях равносильности (R, p_n) и (J, p_n) методов суммирования // Изв. вузов. Математика.— 1979.— № 5.— С. 41—51.
4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной.— М. : Наука, 1974.— 480 с.
5. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М. : Наука, 1974.— 542 с.
6. *Мельник В. И.* Обратные теоремы для преобразований типа преобразований Лапласа // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 1. —С. 32—41.

Киев. пед. ин-т
Получено 16.11.84