УДК 517.9

Д. Растович

О реализации линейных систем

Рассмотрим линейную динамическую систему, описываемую уравнением

$$x = Ax(t) + bu(t), \quad y = (x, c), \tag{1}$$

где вектор-функция $x(\cdot)$ принимает значения в некотором гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \ \cdot)$, $u(t)$ — скалярная функция, b, $c \in H$, A — линейный оператор в H, являющийся генератором полугруппы $T(t) = e^{At}$ [1]. Рассмотрим также дискретную систему управления [2]:

$$x_{n+1} = Ax_n + bu_n, \quad y_n = (x_n, c). \tag{2}$$

Если существуют M, σ такие, что

$$|(e^{At}b, c)| \leqslant Me^{\sigma t}, \tag{3}$$

то существует ограниченная реализация (1). Если существуют M, ω такие, что

$$\forall n \in N \quad |(A^n b, c)| \leqslant M\omega^n, \tag{4}$$

то существует ограниченная реализация (2).

В случае, когда оператор A ограничен, справедлива теорема.

Теорема. *Для существования M, σ таких, что $|(e^{At}b, c)| \leqslant Me^{\sigma t}$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых M, ω было выполнено $|(A^n b, c)| \leqslant M\omega^n \forall n \in N$.*

Доказательство Пусть A — ограниченный оператор в H такой, что $|(A^n b, c)| \leqslant M\omega^n$. Тогда справедлива оценка (3). В самом деле,

$$|(e^{At}b, c)| = \left|\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\, b, c\right)\right| = \Bigl|(b, c) + \frac{t}{1!}(Ab, c) + \ldots + \frac{t^n}{n!}(A^n b, c) +$$

$$+ \ldots \Bigr| \leqslant M\omega^0 + \frac{t}{1!} M\omega + \ldots + \frac{t^n}{n!} M\omega^n + \ldots = M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \omega^n}{n!} = Me^{\omega t}, \ \omega = \sigma.$$

Наоборот, если A — ограниченный оператор, то неравенство (4) всегда выполняется при $\omega = \|A\|$ и $M = \|b\| \cdot \|c\|$.

1. *Baras J. S., Brockett R. W.* H^2-functions and infinite-dimensional realization theory // SIAM J. Contr. —1975.— 13, N 1.— P. 221—241.
2. *Fuhrmann P. A.* On realization of linear systems and applications to some questions of stability // Math. Syst. Theory.— 1975.— 8, N 2.— P. 132—141.

Загреб, Югославия

Получено 28.02.84