УДК 512.831:517.941.92

В. В. Овчаренко, Н. П. Макарущенко

О приведении регулярных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений к канонической форме

Описание математических моделей в электротехнике, автоматике, механике приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ) вида

$$(A + Bd/dt)\,\vec{x} = \vec{f}\,(t), \tag{1}$$

где A и B — квадратные матрицы размера n; $\vec{x}$, $\vec{f}$ — n-мерные вектор-функции времени t. Согласно [2, с. 349], системе ДУ (1) сопоставляется пучок матриц $A + B\lambda$. В случае корректных физических моделей $\det\,(A + B\lambda) \not\equiv 0$, т. е. пучок и соответствующая ему система ДУ регулярны [1, с. 332].

В настоящее время интенсивно изучаются регулярные и сингулярные системы ДУ с целью создания эффективных алгоритмов их решения на ЭВМ [2—7]. Однако для анализа качественных свойств решений вырожденных систем обыкновенных ДУ важное значение имеет приведение их к каноническому виду. Этому отвечает приведение соответствующего пучка матриц $A + B\lambda$ к некоторой канонической форме $K\,(\lambda)$. Если для приведения пучка используются постоянные невырожденные матрицы * U, V: $U\,(A + B\lambda)\,V = K\,(\lambda)$, то в случае регулярного пучка [1, с. 334]

$$K\,(\lambda) = \mathrm{diag}\,\{N^{(u_1)}\,(\lambda), \ldots, N^{(u_r)}\,(\lambda),\ J^{(v_1)}\,(\lambda), \ldots, J^{(v_s)}\,(\lambda)\} = \mathrm{diag}\,\{N\,(\lambda),\ J\,(\lambda)\}, \tag{2}$$

где

$$N^{(u)}\,(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \lambda \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad J^{(v)}\,(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda_i - \lambda) & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & (\lambda_i - \lambda) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_r \geqslant 1, \quad v_1 \geqslant \ldots \geqslant v_s \geqslant 2, \tag{4}$$

причем состав блоков $N^{(u)}\,(\lambda)$, $J^{(v)}(\lambda)$ однозначно определяется пучком $A + B\lambda$.

В то же время для приведения λ-матрицы к канонической форме мож-

* Напомним, что матрице V соответствует линейная замена переменных в системе ДУ (1), а матрице U — линейное преобразование уравнений

но применить унимодулярные матрицы $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ [8, с. 371], которым соответствуют «дифференциальные» линейные преобразования переменных и уравнений в системе ДУ (1). Унимодулярные преобразования позволяют получить для матричного пучка $A + B\lambda$ более простую каноническую форму $K_0(\lambda)$, в которой все блоки $N^{(u)}_{\cdot}(\lambda)$ имеют размеры 1×1, а жордановы блоки $J^{(v)}(\lambda)$ не изменяются. Практически важным является построение простейших унимодулярных матриц, преобразующих $A + B\lambda$ в $K_0(\lambda)$. Такие матрицы строятся в данной работе. Показано, что $A + B\lambda$ преобразуется в $K_0(\lambda)$ с помощью унимодулярной матрицы $U(\lambda)$ степени $u_1 - 1$ и постоянной невырожденной матрицы V. Кроме того, приводится способ построения матриц $U(\lambda)$ и V, что дает эффективный метод решения регулярной системы ДУ (1).

Переходя к доказательству основного результата, заметим, что в качестве исходного матричного пучка можно взять $K(\lambda)$, поскольку известный способ приведения $A + B\lambda$ к $K(\lambda)$ [1, с. 334] использует только невырожденные постоянные матрицы U и V. Кроме того, так как $K(\lambda)$ и $K_0(\lambda)$ квазидиагональны и имеют одинаковые жордановы части $J(\lambda)$, то задача сводится к нахождению простейших унимодулярных матриц, преобразующих $N(\lambda)$ в $E^{(u)}$. Из приведенной ниже теоремы вытекает существование и структура линейных унимодулярных матриц $P(\lambda)$, Q (Q не зависит от λ), преобразующих блоки $N^{(u)}(\lambda)$ матрицы $N(\lambda)$ в блоки $N^{(u-1)}(\lambda)$ преобразованной матрицы $\tilde{N}(\lambda)$. Это дает возможность привести $N(\lambda)$ к $E^{(u)}$ путем последовательного применения $u_1 - 1$ раз линейных унимодулярных преобразований к матрице $N(\lambda)$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме о структуре решения матричного уравнения с блоками $N^{(u)}(\lambda)$.

Лемма. *Матрицы X, Y, Z размера $v \times u$, удовлетворяющие матричному уравнению*

$$(X + Y\lambda)\,N^{(u)}(\lambda) = N^{(v)}(\lambda)\,Z, \tag{5}$$

имеют вид:

а) *при* $v < u$

$$Y = \begin{bmatrix} -a^1 \\ -a^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a^v \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$X = Y = \begin{bmatrix} a^v(a^{v-1} + b^v) & \cdots & & (a^1 + b^2)\,b^1 \\ \cdot \quad \cdot & & & (a^2 + b^3)\,b^2 \\ & \ddots \quad \ddots & & \vdots \\ & & \ddots \quad \ddots & (a^{v-1} + b^v \cdot b^{v-1} \\ & & \quad \ddots & \\ & & & a^v \cdot b^v \end{bmatrix}; \tag{7}$$

б) *при* $v \geqslant u$

$$Y = \begin{bmatrix} -a^1 \\ -a^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a^{v-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$X = Z = \begin{bmatrix} (a^{u-1}+b^{u}) & \ldots & (a^{1}+b^{2})\,b^{1} \\ \ddots & & (a^{2}+b^{3})\,b^{2} \\ & & \vdots \quad \vdots \\ & & (a^{u-1}+b^{u})\,b^{u-1} \\ & & b^{u} \\ & & -a \\ & & \vdots \\ & & -a^{v-1} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Доказательство. Подставляя в (5) выражения для блоков $N^{(u)}(\lambda)$, $N^{(v)}(\lambda)$ из (3), получаем три матричных уравнения, решение которых дает (6) — (9).

Теорема. *Матричное уравнение*

$$P(\lambda)\,K(\lambda) = \tilde{K}(\lambda)\,Q, \qquad (10)$$

где

$$K(\lambda) = \mathrm{diag}\,\{N^{(u_1)}(\lambda), \ldots, N^{(u_r)}(\lambda), E^{(u_0)}\}, \qquad (11)$$

$$u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_r \geqslant 2, \quad u_0 \geqslant 0, \quad u_1 + \ldots + u_r + u_0 = n, \qquad (12)$$

$$\tilde{K}(\lambda) = \mathrm{diag}\,\{N^{(v_1)}(\lambda), \ldots, N^{(v_s)}(\lambda)\}, \qquad (13)$$

$$v_1 \geqslant \ldots \geqslant v_s \geqslant 1, \quad v_1 + \ldots + v_s = n, \qquad (14)$$

имеет неособенное решение $P(\lambda)$, Q, где $P(\lambda)$ — линейная унимодулярная λ-матрица, а Q — постоянная невырожденная матрица, тогда и только тогда, когда $s \geqslant r \geqslant 1$ и $v_i \geqslant u_i - 1$ для любого

$$i = 1, \ldots, r. \qquad (15)$$

Доказательство. Пусть матрицы $P(\lambda)$ и Q удовлетворяют условиям теоремы. Разобьем столбцы матриц $P(\lambda)$, Q на вертикальные полосы, как у матрицы $K(\lambda)$, а строки — на горизонтальные полосы, как у матрицы $\tilde{K}(\lambda)$. Тогда уравнение (10) распадется на конечное число матричных уравнений вида (5). Согласно лемме каждое из них имеет решение, поэтому матричное уравнение (10) при любых матрицах $K(\lambda)$ и $\tilde{K}(\lambda)$ вида (11) и (13) также имеет решение. Следовательно, задача сводится к выяснению условий существования неособенного решения уравнения (10).

Необходимость. Любое решение $P(\lambda)$, Q уравнения (10) однозначно определяется матрицей Q, так как

$$P(\lambda) = \tilde{K}(\lambda)\,QK^{-1}(\lambda) \qquad (16)$$

в силу унимодулярности матриц $K(\lambda)$ и $\tilde{K}(\lambda)$. Из этой формулы видно, что матрицы $P(\lambda)$ и Q могут быть одновременно либо вырожденными, либо невырожденными, и из невырожденности Q следует унимодулярность $P(\lambda)$. Таким образом, нужно найти необходимые условия для существования невырожденной матрицы Q, удовлетворяющей уравнению (10). Согласно лемме эта матрица состоит из блоков Q^{α}_{β}, $\alpha = 1, \ldots, s$; $\beta = 1, \ldots, r$ вида Z. Первая вертикальная полоса матрицы Q в силу (12) имеет максимальную ширину равную u_1. В соответствии с (14) $v_1 \geqslant u_1 - 1$, так как в противном случае первый столбец q_1 матрицы Q равен нулю (см. [7]).

Предположим, что $1 \leqslant v_i < u_i - 1$ для некоторого натурального $i: 2 \leqslant \leqslant i \leqslant r_1$, $r_1 = \min\{s, r\}$, причем $v_j \geqslant u_j - 1$ для $j = 1, \ldots, i-1$. Тогда нижние части столбцов

$$q_1, \; q_{u_1+1}, \; q_{u_1+u_2+1}, \ldots, \; q_{u_1+\ldots+u_{i-1}+1}, \tag{17}$$

принадлежащие горизонтальным полосам $Q^i, Q^{i+1}, \ldots, Q^s$, нулевые, так как вертикальный размер каждого из блоков Q^α_β, $\alpha = i, i+1, \ldots, s$, $\beta = 1, \ldots \ldots, i-1$, меньше горизонтального по крайней мере на 2 [12, 14]. В то же время верхняя часть каждого из столбцов (17), принадлежащая горизонтальным полосам $Q^1, Q^2, \ldots, Q^{i-1}$, содержит неравных нулю не более чем $i-1$ элементов, находящихся в $i-1$ строках: $q^1, q^{v_1+1}, q^{v_1+v_2+1}, \ldots, q^{v_1+\ldots+v_{i-2}+1}$. Поэтому i столбцов (17) линейно зависимы Получили противоречие. Таким образом, если матрица Q невырождена, то $v_i \geqslant u_i - 1$, $i = 1, \ldots, r$.

Теперь предположим, что $s < r$. Тогда каждый из столбцов

$$q_1, \; q_{u_1+1}, \; q_{u_1+u_2+1}, \ldots \; q_{u_1+\ldots+u_{r-1}+1} \tag{18}$$

имеет не более s не равных нулю элементов, находящихся в s строках: $q^1, q^{v_1+1}, \ldots, q^{v_1+\ldots+v_{s-1}+1}$. Поэтому столбцы (18) линейно зависимы. Таким образом, из невырожденности матрицы Q следует неравенство $s \leqslant r$.

Достаточность. Пусть $v_i \geqslant u_i - 1$ для любого $i = 1, \ldots, r$ и $s \geqslant r \geqslant 1$. Покажем, что в этом случае можно построить неособенную матрицу Q, которая вместе с $P(\lambda)$, определяемой формулой (16), удовлетворяет уравнению (10). Разобьем столбцы и строки матрицы Q так же, как у матриц $K(\lambda)$ и $\tilde{K}(\lambda)$ соответственно. Множество диагональных блоков Q^i_i разобьем на два подмножества так, что для блоков первого подмножества $v_i = u_i - 1$, а для блоков второго — $v_i > u_i - 1$. Заполним единицами главные диагонали матриц первого подмножества всюду, а второго — всюду, за исключением последнего места, на которое поставим 0,5 [7, 9]. Теперь выделим подматрицу, образованную пересечением незаполненных строк и столбцов и поставим на ее главной диагонали единицы. Так как полученная матрица Q в каждой строке и в каждом столбце имеет только по одному элементу, не равному нулю, то $\det Q \neq 0$. Кроме того, используя лемму, нетрудно проверить, что Q (совместно с $P = \tilde{K}QK^{-1}$) удовлетворяет уравнению (10).

Следствие. *Пусть невырожденные матрицы R и S^{-1} преобразуют матричный пучок $A + B\lambda$ к его канонической форме*:

$$R(A + B\lambda)S^{-1} = K(\lambda) = \operatorname{diag}\{N^{(u_1)}(\lambda), \ldots, N^{(u_r)}(\lambda), E^{(u_0)}, J^{(v_1)}(\lambda), \ldots \\ \ldots, J^{(v_s)}(\lambda)\} = \operatorname{diag}\{N(\lambda), J(\lambda)\}, \tag{19}$$

где $u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_r \geqslant 2$, $u_0 \geqslant 0$.

Тогда существует унимодулярная $U(\lambda)$ и невырожденная V матрицы такие, что $U(\lambda)(A + B\lambda)V = K_0(\lambda) = \operatorname{diag}\{E^{(u)}, J(\lambda)\}$, где $u = u_1 + \ldots + u_r + u_0$, причем степень λ-матрицы $U(\lambda)$ не ниже $u_1 - 1$.

Доказательство. Согласно теореме существуют унимодулярная линейная $P_1(\lambda)$ и невырожденная постоянная Q_1^{-1} матрицы, которые понижают на единицу размер всех блоков $N^{(u)}(\lambda)$ в $K(\lambda)$. Применяя $u_1 - 1$ раз такие преобразования к исходному пучку $K(\lambda)$, получаем требуемый результат.

Замечание 1. В доказательстве теоремы и следствия содержится эффективный способ вычисления матриц $P(\lambda)$ преобразования уравнений системы ДУ. Однако вычисление матриц Q преобразования переменных неэффективно, так как оно требует обращения матриц. Для устранения этого недостатка целесообразно на каждом этапе решать одновременно два уравнения: $P'(\lambda)K(\lambda) = \tilde{K}(\lambda)Q'$, $P''(\lambda)K(\lambda) = \tilde{K}(\lambda)Q''$, выбирая такие их неособые решения, для которых $Q'Q'' = E$ и $P'(\lambda)P''(\lambda) = [\tilde{K}(\lambda) \times \times Q'K^{-1}(\lambda)][K(\lambda)Q''\tilde{K}^{-1}(\lambda)] = E$.

З а м е ч а н и е 2. Приведение матричного пучка $A + B\lambda$ к канонической форме $K_0(\lambda)$ можно осуществить и с помощью преобразований вида $P^{-1}K^{-1}(\lambda)\ Q^{-1}(\lambda) = \tilde{K}(\lambda)$, где $Q(\lambda)$ — линейная унимодулярная λ-матрица, а P — невырожденная матрица. При этом соответствующие доказательства дословно повторяются. Недостатком такого варианта приведения является наличие производных (порядка $u_1 - 1$) в формулах перехода от новых переменных к старым, чего нет в приведенном выше случае.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— 3-е изд.— М. : Наука, 1967.— 576 с.
2. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Новосибирск : Наука, 1980.— 216 с.
3. *Вырожденные* системы обыкновенных дифференциальных уравнений: Сб. ст. / Под ред. Ю. Е. Бояринцева.— Новосибирск : Наука, 1982.— 119 с.
4. *Шлапак Ю. Д.* Периодические решения линейных систем дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных// Укр. мат. журн.—1975.—27, № 1.—С. 137—140.
5. *Еременко В. А.* О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных// Там же.—1980.—32, № 2.—С. 168—174.
6. *Чистяков В. Ф.* О решении линейных сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом исключения неизвестных// Методы оптимизации и их приложения.—Иркутск : Сиб. энерг. ин-т. 1979.—С. 100—165.
7. *Campbell S. L.* Linear system of differential equations with singular coefficients // SLAM J. Math. Anal..— 1977, 8.— N 6. P. 1057—1066.
8. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— 9-е изд.— М. : Наука, 1968.— 432 с.

Харьк. политехн. ин-т

Получено 11.10.83,
после доработки — 09.10.85