УДК 517.9

Нгуен Донг Ань

О двух методах интегрирования уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка

Известно [1 — 7], что интегрирование уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка (КФП) является трудной задачей. Следовательно, нахождение точных частных решений уравнений КФП представляет теоретический и практический интерес. В связи с этим возникает вопрос о получении достаточных условий интегрируемости уравнений КФП, при выполнении которых решение последних можно найти в квадратурах и на основе анализа полученных точных решений найти достаточно общий метод интегрирования уравнений КФП. Настоящая работа обобщает исследования автора по данному вопросу [8—12].

Метод вспомогательной функции. Рассмотрим усредненное уравнение КФП для стационарной плотности вероятностей $W(a, \theta)$ амплитуды и фазы

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1W)+\frac{\partial}{\partial\theta}(K_2W)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W)+2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(K_{12}W)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}W)\right\}. \tag{1}$$

Введем в уравнение (1) вспомогательную функцию $u(a, \theta)$, зависящую от амплитуды и фазы, следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{K_1W-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}(K_{11}W)+\frac{\partial}{\partial\theta}(uW)\right\}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{K_2W-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(K_{22}W)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial a}(K_{12}W)-\frac{\partial}{\partial a}(uW)\right\}=0. \tag{2}$$

Выберем функцию $u(a, \theta)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$K_1W-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}(K_{11}W)+\frac{\partial}{\partial\theta}(uW)=0,\qquad K_2W-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(K_{22}W)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial a}[(K_{12}+u)W]=0, \tag{3}$$

или

$$K_1-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{1}{2}K_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial a}+u\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=0,$$

$$K_2-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial a}(K_{12}+u)-(K_{12}+u)\frac{\partial\Phi}{\partial a}-\frac{1}{2}K_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=0, \tag{4}$$

$$\Phi(a,\theta)=\ln W(a,\theta). \tag{5}$$

Решая систему (4), имеем

$$\partial\Phi/\partial a = M(a, \theta, \partial u/\partial a, \partial u/\partial\theta, u), \qquad \partial\Phi/\partial\theta = N(a, \theta, \partial u/\partial a, \partial u/\partial\theta, u), \quad (6)$$

где

$$M(\cdot) = \frac{\frac{K_{22}}{2}\left(K_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + u\left(K_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial a}(u + K_{12})\right)}{K_{11}K_{22}/4 + u(u + K_{12})},$$

$$N(\cdot) = \frac{\frac{K_{11}}{2}\left(K_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial a}(u + K_{12})\right) - (u + K_{12}) \times \left(K_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{K_{11}K_{22}/4 + u(u + K_{12})}. \quad (7)$$

Исключая $\Phi(a, \theta)$ из (6), получаем уравнение для функции $u(a, \theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} M\left(a, \theta, \frac{\partial u}{\partial a}, \frac{\partial u}{\partial\theta}, u\right) = \frac{\partial}{\partial a} N\left(a, \theta, \frac{\partial u}{\partial a}, \frac{\partial u}{\partial\theta}, u\right). \quad (8)$$

После нахождения функции $u(a, \theta)$ плотность вероятностей $W(a, \theta)$ из (5), (6) можно найти в квадратурах

$$W(a, \theta) = \exp\left\{\int M(a, \theta, \partial u/\partial a, \partial u/\partial\theta, u)\, da + N(a, \theta, \partial u/\partial a, \partial u/\partial\theta, u)\, d\theta\right\}. \quad (9)$$

Конкретное выражение уравнения (8) получим, подставив (7) в (8). В общем случае это будет уравнение в частных производных относительно искомой функции $u(a, \theta)$. Однако эффективность использования уравнения (8) заключается в том, что его тривиальные или простые решения соответствуют нетривиальным точным решениям (9) уравнения КФП (1). Отсюда следует способ получения достаточных условий интегрируемости последнего: наложить на коэффициенты сноса и диффузии $K_i(a, \theta)$, $K_{ii}(a, \theta)$, $i = 1, 2$, условия, достаточные для того, чтобы уравнение (8) допускало какое-то определенное решение $u(a, \theta)$, при выполнении которых частное точное решение (9) уравнения КФП можно найти в квадратурах. Рассмотрим следующие простые вспомогательные функции:

а) $u(a, \theta) = 0$. Уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{2}{K_{11}}\left(K_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{2}{K_{22}}\left(K_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta} - \frac{\partial K_{12}}{\partial a}\right) - \frac{4K_{12}}{K_{11}K_{22}}\left(K_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right)\right\}. \quad (10)$$

Таким образом, если коэффициенты сноса и диффузии $K_1(a, \theta)$, $K_2(a, \theta)$, $K_{11}(a, \theta)$, $K_{12}(a, \theta)$, $K_{22}(a, \theta)$ удовлетворяют условию (10), то уравнение КФП (1) допускает точное решение

$$W(a, \theta) = \exp\left\{2\int\left[\frac{K_1}{K_{11}} - \frac{1}{2K_{11}}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right] da + \left[\frac{1}{K_{22}}\left(K_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta} - \frac{\partial K_{12}}{\partial a}\right) - \frac{4K_{12}}{K_{11}K_{22}}\left(K_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right)\right] d\theta\right\}. \quad (11)$$

Если

$$K_{12}(a, \theta) = 0, \quad (12)$$

то условие (10) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{K_{11}}\left(K_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{K_{22}}\left(K_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta}\right)\right]. \quad (13)$$

В [11, 12] указан класс механических систем с одной степенью свободы, для которых выполнено условие (13).

Примеры 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + \varepsilon P g^2(x, \dot{x}) \cos \nu t + \sqrt{\varepsilon} \sigma g(x, \dot{x}) \xi(t), \tag{14}$$

где функции $f(x, \dot{x})$, $g(x, \dot{x})$ удовлетворяют условиям

$$\langle f(a \cos \psi, -a\nu \sin \psi) \cos \psi \rangle = 0, \quad \langle g^2(a, \cos \psi, -a\nu \sin \psi) \sin \psi \cos \psi \rangle = 0. \tag{15}$$

Вычисляя для уравнения (14) коэффициенты сноса и диффузии при значении $x = a \cos \psi$, $\dot{x} = -a\nu \sin \psi$ [5], можно показать, что условия (12), (13) будут удовлетворяться и из (11) получим решение соответствующего усредненного уравнения КФП

$$W(a, \theta) = \exp \left\{ \int \left[-\frac{2\nu}{\sigma^2} \frac{\langle f \sin \psi \rangle}{\langle g^2 \sin^2 \psi \rangle} + \frac{1}{a} \frac{\langle g^2 \cos^2 \psi \rangle}{\langle g^2 \sin^2 \psi \rangle} \right] da - \frac{2P\nu}{\sigma^2} a \sin \theta \right\}. \tag{16}$$

В частности, рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля с внешним и параметрическим случайным возбуждением:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + \nu^2 x = \varepsilon(1 - \gamma x^2)\dot{x} + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\lambda x\dot{\xi}(t). \tag{17}$$

Плотность вероятностей $W(a, \theta)$ (16) такова:

$$W(a, \theta) = Ca \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2 a^2}{8} \right)^{\frac{8\nu^2}{\sigma^2\lambda^2}\left(\frac{\sigma^2\lambda^2}{8\nu^2} + \frac{\gamma}{2\lambda^2} + \frac{1}{2} - \alpha\right)} \exp \left\{ -\frac{\gamma\nu^2 a^2}{\sigma^2\lambda^2} \right\}. \tag{18}$$

Из (18) следует наиболее вероятностное значение амплитуды колебания

$$a^2 = \frac{4}{\gamma}\left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{3\lambda^2\sigma^2}{16\nu^2}\right) + \sqrt{\frac{16}{\gamma^2}\left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{3\lambda^2\sigma^2}{16\nu^2}\right)^2 + \frac{2\sigma^2}{\gamma\nu^2}}. \tag{19}$$

Из формулы (19) видно, что сила трения $2\alpha\dot{x}$ и параметрическое случайное возбуждение $\sqrt{\varepsilon}\sigma\lambda x\dot{\xi}(t)$ компенсируются одно другим и при соотношении

$$d = 3\lambda^2\sigma^2/(16\nu^2) \tag{20}$$

не влияют на значение амплитуды.

б) $u(a, \theta) = \beta a^{-1}$, $\beta = \mathrm{const}$. Пусть

$$K_{11}(a, \theta) = \frac{\sigma^2}{2\nu^2}, \quad K_{12}(a, \theta) = 0, \quad K_{22}(a, \theta) = \frac{\sigma^2}{2\nu^2 a^2}. \tag{21}$$

В данном случае выражения (7) принимают вид

$$\begin{gathered} M(a, \theta) = \frac{16\nu^4}{\sigma^4 + 16\nu^4\beta^2}\left(\frac{\sigma^2}{4\nu^2} K_1 + \beta a K_2 + \beta^2 a^{-1}\right), \\ N(a, \theta) = \frac{16\nu^4}{\sigma^4 + 16\nu^4\beta^2}\left(\frac{\sigma^2}{4\nu^2} a^2 K_2 + \frac{\beta\sigma^2}{4\nu^2} - \beta a K_1\right). \end{gathered} \tag{22}$$

Параметр β определяется из уравнения (8), которое имеет вид

$$\frac{\partial K_1}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial a}(a^2 K_2) = -\frac{4\nu^2\beta}{\sigma^2}\left[\frac{\partial}{\partial a}(aK_1) + a\frac{\partial K_2}{\partial \theta}\right]. \tag{23}$$

Если уравнение (23) удовлетворяется при некотором значении β, то из (6), (22) найдем решение уравнения КФП

$$\begin{gathered} W(a, \theta) = \exp\left\{\frac{16\nu^4}{\sigma^4 + 16\nu^4\beta^2}\int\left[\frac{\sigma^2}{4\nu^2}K_1 + \beta a K_2 + \frac{\beta^2}{a}\right]da + \right. \\ \left. + \left[\frac{\sigma^2}{4\nu^2} a^2 K^2 + \frac{\beta\sigma^2}{4\nu^2} - \beta a K_1\right] d\theta\right\}. \end{gathered} \tag{24}$$

П р и м е р 2. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля — Дуффинга в окрестности главного резонанса

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - \gamma x^2)\dot{x} + \frac{(\omega^2 - \nu^2)\gamma}{3 - 6\alpha}x^3 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t) + \varepsilon P\cos\nu t, \tag{25}$$

$$\omega^2 - \nu^2 = \varepsilon\Delta.$$

Коэффициенты сноса $K_1(a, \theta)$, $K_2(a, \theta)$ таковы:

$$K_1(a, \theta) = \frac{\sigma^2}{4\nu^2 a} + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)a - \frac{\gamma}{8}a^3 - \frac{P}{2\nu}\sin\theta,$$

$$K_2(a, \theta) = \frac{\Delta}{2\nu} - \frac{3\Delta\gamma}{8\nu(3 - 6\alpha)}a^2 - \frac{P}{2\nu a}\cos\theta. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (23), находим

$$\beta = \frac{\Delta\sigma^2}{4\nu^3(1 - 2\alpha)}. \tag{27}$$

Из (24), (26), (27) получаем плотность вероятностей

$$W(a, \theta) = Ca\exp\left\{-\frac{2P\nu a(1/2 - \alpha)}{\sigma^2\left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 + \frac{\Delta^2}{4\nu^2}\right]}\left((1/2 - \alpha)\sin\theta + \frac{\Delta}{2\nu}\cos\theta\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\nu^2(1 - 2\alpha)}{\sigma^2}a^2 - \frac{\gamma\nu^2}{8\sigma^2}a^4\right\}. \tag{28}$$

При точном резонансе ($\Delta = 0$) из (28) следует результат [9].

М е т о д р а з л о ж е н и я п о о б о б щ е н н о й ц и к л и ч е с к о й к о о р д и н а т е. На основе анализа точных полученных плотностей вероятностей амплитуды и фазы предполагается, что решение усредненного уравнения КФП (1) можно представить в виде

$$W(a, \theta) = Ca^{\tau}\exp\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i(\theta)a^i\right\}. \tag{29}$$

Оказывается, что для многих механических систем с различными типами периодических и случайных возбуждений представление (29) имеет место; при этом получена замкнутая система разделяющихся дифференциальных уравнений для последовательного определения всех неизвестных коэффициентов $\mu_i(\theta)$ [9—12].

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.— 457 с.
2. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем.— М.: Наука, 1979.— 336 с.
3. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний.— — М.: Наука, 1980.— 368 с.
4. *Случайные колебания* / Под ред. С. Кренделла.— М.: Мир, 1967.— 356 с.
5. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах // Приближенные методы исследования нелинейных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 102—147.
6. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1961.— 558 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.
8. *Нгуен Донг Ань.* Некоторые методы интегрирования уравнений КФП в теории случайных колебаний // Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 1.— С. 87—91.

9. *Нгуен Донг Ань, Кьеу Тхе Дык.* О решении уравнения ФПК для системы Ван-дер-Поля, подверженной периодическим и случайным воздействиям // Там же.— 1982.— 34, № 6.— С. 779—783.
10. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу исследования случайных колебаний в неавтономных переменных системах методом уравнений КФП и асимптотическими методами нелинейной механики // Мат. физика.— 1983.— Вып. 34.— С. 80—85.
11. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу решения уравнений КФП для неавтономной механической системы с одной степенью свободы // Прикл. механика.— 1984.— 20, № 3.— С. 87—93.
12. *Нгуен Донг Ань.* Случайные колебания механических систем при периодически изменяющейся собственной частоте // Укр. мат. журн. 1985.— 37, № 2.— С. 261—267.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.06.85,
после доработки — 27.01.86