УДК 517.946+539.21

Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский

Квантовый метод производящих функционалов Н. Н. Боголюбова в статистической физике: алгебра Ли токов, ее представления и функциональные уравнения

1. В настоящей работе предложена функционально-операторная трактовка квантового производящего функционала Н. Н. Боголюбова [1, 2] с помощью формализма алгебры Ли токов и ее неприводимых представлений. Этот подход вскрывает глубокие алгебраические аспекты квантового метода производящих функционалов Н. Н. Боголюбова, эффективное использование которых позволяет развивать новые методы интегрирования динамических систем статистической физики как в квантовом, так и в классическом случаях.

Пусть задано гильбертово пространство Φ состояний в нерелятивистской квантовой механике. В нем определены канонические полевые операторы рождения $\psi^+(x)$ и уничтожения $\psi(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$, которые удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям бозе- или ферми-типа

$$[\psi(x), \psi(y)]_\pm = 0 = [\psi^+(x), \psi^+(y)], \quad [\psi(x), \psi^+(y)]_\pm = \delta(x-y), \tag{1}$$

где $[\cdot, \cdot]_\pm$ — антикоммутатор операторов для знака «+» и коммутатор — для знака «—». В качестве алгебры наблюдаемых состояний, описывающей взаимодействующие квантовые частицы, выберем алгебру Ли токов [2, 3]. Для ее построения введем следующие основные операторные величины:

$$\rho(x) = \psi^+(x)\psi(x) \tag{2}$$

— оператор плотности частиц,

$$J(x) = \frac{1}{2i}[\psi^+(x)\nabla\psi(x) - \nabla\psi^+(x)\psi(x)] \tag{3}$$

— оператор плотности тока частиц в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Несложно убедиться, что операторы $\rho(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x f(x)\rho(x)$ и $J(g) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x g(x) J(x)$, где $f \in S(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^1)$,

$g \in S(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям, независимым от вида статистики:

$$[\rho(f_1), \rho(f_2)] = 0, \ [\rho(f), J(g)] = i\rho(g\nabla f),$$
$$[J(g_1), J(g_2)] = iJ(g_2\nabla g_1 - g_1\nabla g_2), \tag{4}$$

где $[\cdot, \cdot] \equiv [\cdot, \cdot]_-$. Алгебра Ли токов $\mathfrak{g}$ (4) — основной объект рассмотрения в алгебраическом подходе к квантовому методу производящих функционалов Н. Н. Боголюбова. Ее связь с заданной динамической системой с гамильтонианом $\mathrm{H}:\Phi \to \Phi$, где

$$\mathrm{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \nabla_x\psi^+\nabla_x\psi +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3y V(x-y)\,\psi^+(x)\,\psi^+(y)\,\psi(y)\,\psi(x), \tag{5}$$

$V(x-y)$ — двухчастичный потенциал взаимодействия, осуществляется посредством теории ее неприводимых самосопряженных представлений. Как обычно в таких случаях, необходимым условием является принадлежность оператора Гамильтона (5) универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли токов $\mathfrak{g}$. Этот вопрос рассмотрен ниже более подробно.

2. Ввиду сингулярной структуры алгебры Ли токов $\mathfrak{g}$ введем унитарные операторы $U(f)$ и $V(\varphi_t^g)$ по формулам [2, 3]

$$U(f) = \exp[i\rho(f)], \quad V(\varphi_t^g) = \exp[itJ(g)], \tag{6}$$

где $t \in \mathbb{R}^1$, $\frac{d}{dt}\varphi_t^g(x) = g\circ\varphi_t^g(x)$, $\varphi_t^g(x)|_{t=0} = x \in \mathbb{R}^3$, $g\circ\varphi_t^g(x) = g(\varphi_t^g(x))$. Экспоненциальные токи (6) образуют группу G со следующим законом композиции:

$$U(f_1)\,U(f_2) = U(f_1+f_2), \quad V(\varphi)\,U(f) = U(f\circ\varphi)\,V(\varphi),$$
$$V(\varphi_1)\,V(\varphi_2) = V(\varphi_2\circ\varphi_1). \tag{7}$$

Группа G (7) — это полупрямое произведение $S \otimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$, где $S = S(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^1)$, $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$ — группа диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^3$. Различные унитарные представления группы токов $G = S \otimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$ описывают, как известно, различные физические состояния динамических систем. Например, система $N \in \mathbb{Z}_+$ идентичных бозе-частиц и система $N \in \mathbb{Z}_+$ идентичных ферми-частиц соответствуют двум унитарно неэквивалентным представлениям этой группы. Так как группа токов $S \otimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$ является бесконечно параметрической, то представляется возможным ее различными унитарными представлениями описывать очень широкий спектр физических ситуаций.

3. Гильбертово пространство Φ для каждого неприводимого непрерывного представления группы токов $G = S \otimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$ унитарно эквивалентно гильбертовому пространству

$$\Phi \approx \int_{S'}^{\oplus} d\mu(F)\,\Phi_F, \tag{8}$$

где μ — цилиндрическая мера на пространстве S' непрерывных, действительных и линейных функционалов на S; Φ_F — отмеченные индексом $F \in S'$ комплексные линейные пространства. В физических приложениях обычно рассматривается случай, когда $\dim \Phi_F = 1$ и $\Phi \approx L_2^{(\mu)}(S'; \mathbb{C}^1)$ — пространство квадратично интегрируемых по мере μ функций на S' со значениями в $\mathbb{C}^1$ В силу абелевости подгруппы S в группе токов G для действия $U(f)$ на элемент $\omega(F) \in L_2^{(\mu)}(S'; \mathbb{C}^1)$ можем записать

$$U(f)\,\omega(F) = \exp[i(F, f)]\,\omega(F) \qquad \forall f \in S, \quad F \in S'. \tag{9}$$

Действие $V(\varphi): L_2^{(\mu)}(S'; \mathbb{C}^1) \to L_2^{(\mu)}(S'; \mathbb{C}^1)$ описывается выражением

$$V(\varphi)\,\omega(F) = \chi_\varphi(F)\,\omega(\varphi^* F)\left[\frac{d\mu(\varphi^* F)}{d\mu(F)}\right]^{1/2}, \tag{10}$$

где $\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$, $(\varphi^* F, f) = (F, f\circ\varphi)$ и $d\mu(\varphi^* F)/d\mu(F)$— производная Радона — Никодыма меры $\mu(\varphi^* F)$ по отношению к мере $\mu(F)$; $\chi_\varphi(F)$ — скалярный множитель, единичный по модулю, причем

$$\chi_{\varphi_2}(F)\,\chi_{\varphi_1}(\varphi_2^* F) = \chi_{\varphi_1\circ\varphi_2}(F) \qquad \forall\, F \in S', \quad \varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3). \tag{11}$$

Кроме того, для существования производной Радона — Никодыма необходимо потребовать квазиинвариантность меры μ, т. е. для любого измеримого множества $Q \subset S'$ и любого потока $\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$ $\mu(Q) = 0$, если и только если $\mu(\varphi^* Q) = 0$. В частности, представление группы токов G, соответствующее системе $N \in \mathbb{Z}_+$ идентичных бозе- или ферми-частиц, соответствует мере μ, сосредоточенной на функционалах типа дельта-функций: $\mathrm{supp}\,\mu \ni F$, где $F = \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j)$, причем $\Phi \approx L_2^{(\pm)}(\mathbb{R}^{3N}; \mathbb{C}^1)$ — гильбертовому пространству симметричных, или соответственно антисимметричных, комплекснозначных функций. При этом, очевидно, справедливы формулы

$$\rho(x)\,\omega(F) = \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j)\,\omega(F),$$

$$J(x)\,\omega(F) = \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{N}\left[2\delta(x - x_j)\nabla_j - (\nabla\delta)(x - x_j)\right]\,\omega(F), \tag{12}$$

где $\omega(F) = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in L_2^{(\pm)}(\mathbb{R}^{3N}; \mathbb{C}^1)$, $x, x_j \in \mathbb{R}^3$, $j = \overline{1, N}$. Из формул (9) — (12) следуют выражения $\chi_\varphi(F) = 1$ (для бозе-системы) и

$$U(f)\,\omega(F) = \exp\left[i\sum_{j=1}^{N} f(x_j)\right]\,\omega(F),$$

$$V(\varphi)\,\omega(F) = \omega(\varphi^* F)\left[\det\left\|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right\|\right]^{1/2}, \tag{13}$$

где $\omega(\varphi^* F) = \omega(\varphi x_1, \ldots, \varphi x_N) \in L_2^{(\pm)}(\mathbb{R}^{3N}; \mathbb{C}^1)$.

4. Введем следующее определение.

Определение 1. *Производящий функционал на произвольной группе G — это комплекснозначная функция $E: G \to \mathbb{C}^1$ с условиями:*

1) $E(e) = 1$, $e \in G$ — *единица;*

2) $E(a_1 \exp(tA)\, a_2)$ — *непрерывная функция параметра* $t \in \mathbb{R}^1$ $\forall\ A \in \mathfrak{g}$ *и* $a_1, a_2 \in G$;

3) *матрица* $\|E(a_i^{-1} a_j)\|$, $i, j = \overline{1, N}$, — *положительно-определенная* $\forall\ a_j \in G$, $j = \overline{1, N}$, $N \in \mathbb{Z}_+$.

Связь производящего функционала E на группе G с ее неприводимыми унитарными представлениями устанавливает следующая теорема [4, 5].

Теорема 1 (Х. Араки). *Функция $E: G \to \mathbb{C}^1$ — производящий функционал на G тогда и только тогда, когда существует непрерывное унитарное представление $\pi: G \to \mathrm{Aut}(\Phi)$ на Φ с циклическим вектором $\Omega \in \Phi$ таким, что*

$$E(a) = (\Omega, \pi(a)\,\Omega). \tag{14}$$

При этом вектор $\Omega \in \Phi$ называется циклическим по отношению к представлению π, если множество $\mathrm{span}\{\pi(a)\,\Omega : a \in G\}$ плотно в Φ; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в Φ.

Смысл теоремы 1 состоит в том, что можно неявным образом конструировать унитарные представления группы токов $G = S \otimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$ и тем самым алгебры токов $\mathfrak{g}$ (4), определяя соответственным образом производящий функционал на G, что часто намного проще, чем исходная проблема.

Рассмотрим теперь представление $\pi: G \to \mathrm{Aut}(\Phi)$ из теоремы 1, ограниченное на абелеву подгруппу $\mathbf{S}$ в группе токов $G = \mathbf{S} \otimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$, и соответствующий функционал

$$\mathscr{L}(f) = (\Omega, \exp[i\rho(f)]\,\Omega) = \mathrm{tr}(\mathscr{P}_\beta \exp[i\rho(f)]) = \\ = \int\limits_{\mathbf{S}'} d\mu(F)\exp[i(F, f)], \quad f \in \mathbf{S}, \tag{15}$$

где $\mathscr{P}_\beta$ — статистический оператор исходной динамической системы (5) при «обратной» температуре $\beta \in \mathbb{R}^1_+$. Здесь циклический вектор $\Omega \in \Phi$, как обычно, нормирован на единицу, $(\Omega, \Omega) = 1$. Производящий функционал (15) — квантовый аналог производящего функционала Н. Н. Боголюбова в статистической физике — обладает следующими свойствами: 1) $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}^*(-f)$, $f \in \mathbf{S}$; 2) $\mathscr{L}(0) = 1$; 3) $|\mathscr{L}(f)| \leqslant 1$; 4) $\mathscr{L}(f)$ — положительно-определенный функционал на $\mathbf{S}$. Поэтому в дальнейшем ограничимся изучением свойств производящего функционала (15) и соответствующих неприводимых унитарных представлений группы токов G.

5. Введем оператор [3, 4] $K(x): \Phi \to \Phi$, $x \in \mathbb{R}^3$, где

$$K(x) = \nabla\rho(x) + 2iJ(x) \equiv 2\psi^+(x)\nabla\psi(x). \tag{16}$$

Так как, очевидно, оператор $K(x): \Phi \to \Phi$ принадлежит универсальной обертывающей алгебре $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли токов $\mathfrak{g}$, то из (16) и представления [3, 4]

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x K^+(x)\,\rho^{-1}(x)\,K(x) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3y V(x - y) : \rho(x)\,\rho(y):^* \tag{17}$$

непосредственно получаем, что $\mathbf{H} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$. При этом циклический вектор $\Omega \in \Phi$, задающий неприводимое унитарное представление группы токов G, является основным состоянием динамической системы (5). Если дополнительно определить оператор $\mathscr{A}(x; \rho): \Phi \to \Phi$ по формуле

$$K(x)\,\Omega = \mathscr{A}(x; \rho)\,\Omega \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3, \tag{18}$$

то можно убедиться, что оператор Гамильтона (17) примет следующий канонический вид: $\mathbf{H} \to \tilde{\mathbf{H}}$,

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\hbar^2}{8m}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \tilde{K}^+(x)\,\rho^{-1}(x)\,\tilde{K}(x), \tag{19}$$

где по определению $\tilde{K}(x) = K(x) - \mathscr{A}(x; \rho)$, а оператор (17) нормирован нулевым значением энергии основного состояния $\Omega \in \Phi$, т. е. $\tilde{\mathbf{H}}\Omega = 0$. Далее, из очевидного равенства $(\Omega, \exp[i\rho(f)]\,\tilde{K}(x)\,\Omega) = 0 \;\forall\; x \in \mathbb{R}^3$ получаем первое квантовое функциональное уравнение типа Н. Н. Боголюбова [2—4]:

$$[\nabla_x - i\nabla f(x)]\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(x)} = \mathscr{A}\left(x;\, \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta f}\right)\mathscr{L}(f). \tag{20}$$

Здесь $\mathscr{A}\left(x;\, \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta f}\right) = \mathscr{A}(x; \rho)\Big|_{\rho = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}}$ — функциональный оператор, который в силу формул (10) — (14) в N-частичном представлении группы токов $G = \mathbf{S} \otimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$ определяется выражением

$$\mathscr{A}(x; \rho) = \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j)\,(\nabla_j \ln \Omega^2)(x_1, \ldots, x_N). \tag{21}$$

---

* Символ : : обозначает обычное нормальное упорядочение [6].

В токовом представлении для (21) справедливо эквивалентное выражение

$$\mathscr{A}(x;\rho) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} d^3x_2 \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x_N : \rho(x)\rho(x_2)\ldots\rho(x_N) : \nabla_x \ln \Omega^2,$$

удобное для изучения предельных состояний в случае большого канонического ансамбля Гиббса [3, 4, 7]. Из уравнения (20) в классическом пределе $\hbar \to 0$ в случае бозе-системы непосредственно получаем функциональное уравнение Н. Н. Боголюбова в классической равновесной статистической физике

$$[\nabla_x - i\nabla f(x)] \frac{1}{i} \frac{\delta \mathscr{L}(f)}{\delta f(x)} = -\beta \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3y \nabla_x V(x-y) : \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(x)} \times$$

$$\times \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(y)} : \mathscr{L}(f), \tag{22}$$

или для функционала $\mathscr{L}_B(u)$, $e^{if} - 1 = u$, первоначально введенного Н. Н. Боголюбовым: $\mathscr{L}_B(u) = \mathrm{tr}(\mathscr{P}_B : \exp[\rho(u)]:)$, $\hbar \to 0$,

$$\nabla_x \frac{\delta \mathscr{L}_B(u)}{\delta u(x)} = -\beta \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3y \nabla_x V(x-y) \frac{\delta^2 \mathscr{L}_B(u)}{\delta u(x)\,\delta u(y)} [1 + u(y)]. \tag{23}$$

В силу представления (15) из (22) легко следует явное выражение для производящего функционала $\mathscr{L}(f)$, $f \in \mathrm{S}$, являющегося решением функционального уравнения Н. Н. Боголюбова (22):

$$\mathscr{L}(f) = W(f)/W(0), \quad W(f) = \exp[-\beta V(\delta)]\,\mathscr{L}_0(f), \tag{24}$$

где $\mathscr{L}_0(f)$ — производящий функционал невзаимодействующей классической бозе-системы, $z \in \mathbb{R}^1_+$ — активность системы частиц,

$$\mathscr{L}_0(f) = \exp(z \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \{\exp[if(x)] - 1\}), \quad V(\delta) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3y V(x-y) \times$$

$$\times : \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{df(y)} : \tag{25}$$

Аналогично в квантовом случае производящего функционала Н. Н. Боголюбова справедлива общая формула

$$\mathscr{L}(f) = W(f)/W(0), \quad W(f) = \exp[-\beta V(\delta)]\, C_\beta(\delta)\,\mathscr{L}_0(f), \tag{26}$$

где оператор $C_\beta(\delta) : \Phi \to \Phi$ определен по правилу

$$C_\beta^+(\delta)\,\Omega_0 = \mathbb{C}_\beta^+ \Omega_0, \quad \mathbb{C}_\beta = \exp(\beta \mathbf{H}_{0\nu}) \exp(-\beta \mathbf{H}_\nu), \quad \mathbf{H}_\nu = \mathbf{H} - \nu \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(x), \tag{27}$$

$\mathbf{H}_{0\nu} = \mathbf{H}_0 - \nu \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(x)$, $\nu \in \mathbb{R}^1$ — химический потенциал частиц в большом каноническом ансамбле Гиббса, $\Omega_0 \in \Phi$ — нормированное основное состояние невзаимодействующей системы частиц при тех же граничных условиях.

6. Аналогичным образом можно рассмотреть производящий функционал типа Н. Н. Боголюбова $\mathscr{L}(f, g)$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^1)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ для полной группы токов $G = \mathscr{L} \otimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$:

$$\mathscr{L}(f, g) = (\Omega, \exp[i\rho(f)] \exp[iJ(g)]\,\Omega) = \mathrm{tr}(\mathscr{P}_\beta \exp[i\rho(f)] \exp[iJ(g)]). \tag{28}$$

Для N-частичного представления группы токов G выражение (28), как легко убедиться, принимает вид

$$\mathscr{L}(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x_N \Omega^*(x_1, \ldots, x_N) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} \exp[if(x_j)] \exp[i\xi(x_j; g)]\;\Omega(x_1, \ldots, x_N), \tag{29}$$

где $\xi(x; g) = \frac{1}{2i}[2g(x)\nabla_x + (\nabla \cdot g)(x)]$, $x \in \operatorname{supp}\mu \subset \Lambda \subset \mathbb{R}^3$. Оператор $\exp[i\xi(x; g)]$ действует на элемент $\omega \in L_2^{(\pm)}(\Lambda^N; \mathbb{C}^1)$ по правилу

$$\exp[i\xi(x; g)]\,\omega(x; x_2, \ldots, x_N) = (\varphi^*\omega)(x, x_2, \ldots, x_N)\left[\det\left\|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right\|\right]^{1/2}, \qquad (30)$$

где $x, x_j \in \Lambda$, $j = \overline{2, N}$. В пределе $\mathbb{Z}_+ \ni N \to \infty$, $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^3$, $N/\Lambda = \bar{\rho}$ выражение (29) принимает следующий вид:

$$\mathcal{L}(f, g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (n!)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \ldots \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_n \int_{\mathbb{R}^3} d^3y_1 \ldots$$

$$\ldots \int_{\mathbb{R}^3} d^3y_n \prod_{j=1}^{n} \delta(x_j - y_j)\{\exp[if(x_j)]\exp[i\xi(x_j; g)] - 1\} \times$$

$$\times F_n(y_1, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_n), \qquad (31)$$

где $\forall n \in \mathbb{Z}_+$

$$F_n(y_1, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_n) = (\Omega, \psi^+(y_n) \ldots \psi^+(y_1)\psi(x_1) \ldots \psi(x_n)\Omega)$$

— основные корреляционные функции динамической системы (5) [7]. Очевидно также, что $F_n(x_1, \ldots, x_n; x_1, \ldots, x_n) = F_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = (\Omega, :\rho(x_1) \ldots \rho(x_n):\Omega) \qquad (32)$$

— функции распределения Н. Н. Боголюбова. Соответствующие функциональные уравнения для производящего функционала (28) в настоящее время еще не получены, но при $\hbar \to 0$ с помощью представления Вигнера можно показать, что производящий функционал (28) удовлетворяет в случае неравновесной статистической механики функциональному уравнению типа Н. Н. Боголюбова, являющемуся относительно специальной симплектической структуры типа Ли — Пуассона — Власова гамильтоновой динамической системой. При этом, учитывая функциональную структуру производящего функционала Н. Н. Боголюбова в представлении Вигнера, можно представить его явное функционально-операторное выражение, что важно для анализа свойств решений бесконечной цепочки уравнений для функций распределений Н. Н. Боголюбова в классической неравновесной статистической механике.

1. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике.—М.: Гостехиздат, 1946.— 119 с.
2. *Боголюбов Н. Н.* (*мл.*), *Прикарпатский А. К.* Исследование моделей полярона и поляронного газа на основе метода производящих функционалов Н. Н. Боголюбова и функционально-хронологического подхода.—Киев, 1985.— 28 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т теорет. физики; № 159-Р).
3. *Menicoff R.*, *Sharp D. H.* Representations of a local current algebras: their dynamical determination // J. Math. Phys.— 1975,— **16**, N 12.— P. 2341—2360.
4. *Боголюбов Н. Н.*, *Прикарпатский А. К.* Квантовый метод производящих функционалов Н. Н. Боголюбова в статистической физике: алгебра Ли токов, ее представления и функциональные уравнения // Элементар. частицы и атом. ядра.— 1986.— 17 №4. — С. 423—468.
5. *Araki H.* The representation of CCR in field theory // J. Math. Phys.— 1960.— **1**, N 3.— P. 492—506.
6. *Боголюбов Н. Н.*, *Ширков Д. В.* Введение в квантовую теорию квантованных полей.— 4-е изд.— М.: Наука, 1984.— 645 с.
7. *Боголюбов Н. Н.*, *Боголюбов Н. Н.*, *мл.* Введение в квантовую статисгическую механику.— М.: Наука 1984 — 324 с.

Мат. ин-т АН СССР, Москва Получено 09,12,85