УДК 519.41/47

Н. С. Черников

Свойства нормального замыкания центра FC-подгруппы B в группе $G=AB$ с абелевой подгруппой A

Нормальное замыкание подгруппы Y в группе X — это подгруппа, порожденная в группе X всеми подгруппами, сопряженными в ней с Y. Для непустых множеств элементов Y и Z группы X YZ — произведение подмножеств Y и Z (т. е. $YZ=\{yz \mid y\in Y,\ z\in Z\}$). Запись $G=AB$ ниже означает, что группа G является произведением своих подгрупп A и B. Центр группы X обозначен через $Z(X)$.

Свойства неабелевой конечной группы $G=AB$ с абелевой подгруппой A и подгруппой B, у которой $Z(B)\neq 1$, исследовались рядом авторов. Одним из принципиальных вопросов является вопрос о непростоте группы G. Этот вопрос положительно решен Сепом при некоторых (достаточно естественных) дополнительных ограничениях, налагаемых на подгруппы A и B. Положительное решение вопроса в общей постановке непосредственно вытекает из полученной Л. С. Казариным теоремы ([1], теорема 1), утверждающей, что в конечной группе $G=AB$ с абелевой подгруппой A нормальное замыкание центра подгруппы B является разрешимой группой. Непростота бесконечной группы $G=AB$ с абелевой подгруппой A и подгруппой B, у которой $Z(B)\neq 1$, при условии, что B является FC-группой, установлена Д. И. Зайцевым ([2], § 1, следствие). Точнее, он показал, что группа $G=AB$ с абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B, такой что $Z(B)\neq 1$, имеет некоторую отличную от единицы инвариантную подгруппу H, для которой реализуется хотя бы одна из следующих трех возможностей: а) подгруппа H абелева; б) подгруппа H конечна; в) $H\subseteq B$ ([2], теорема 1). (Напомним, что FC-группа — это группа, у которой все классы сопряженных элементов конечны).

Используя отмеченные выше теоремы из [1, 2], а также теорему из [3] и предложение 1 из [4], автор настоящей статьи получил теорему, из которой, в частности, вытекает, что группа $G=AB$ с абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B, такой что $Z(B)\neq 1$, всегда имеет отличную от единицы инвариантную абелеву подгруппу.

Теорема 1. *Пусть $G=AB$ — группа с абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B. Справедливы следующие утверждения:*

1) *нормальное замыкание в G центра подгруппы B имеет возрастающий ряд инвариантных в G подгрупп, факторы которого абелевы (и, значит, является RI^*-группой);*

2) *если подгруппы A и B периодические, то нормальное замыкание в G центра подгруппы B является локально конечной π-группой с $\pi=\pi(A)\cup\pi(B)$ (и даже с $\pi=\pi(A)\cup\pi(Z(B))$).*

Утверждение 1 теоремы 1 можно рассматривать как аналог для бесконечных групп приведенной выше теоремы Л. С. Казарина [1]. Напомним, что RI^*-группа — это группа, имеющая возрастающий ряд инвариантных подгрупп с абелевыми факторами; π-группа — это периодическая группа, у которой все простые делители порядков элементов принадлежат множеству π простых чисел.

Через $\pi(X)$, как обычно, обозначается множество всех простых делителей порядков элементов группы X. Ниже через $C_X(Y)$ обозначен централизатор подгруппы Y в группе X.

Доказательство. Пусть Z — произвольная подгруппа из $Z(B)$, N — ее нормальное замыкание в G.

Докажем утверждение 1. Покажем, что подгруппа N имеет возрастающий ряд инвариантных в G подгрупп с абелевыми факторами (тем самым утверждение 1 будет доказано).

Пусть подгруппа N не имеет такого ряда. Обозначим через $N_\wedge$ предельный член ряда $N_0 = 1 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_\alpha \subseteq \ldots$ инвариантных в G подгрупп группы N, определенного индуктивно следующим образом: $N_\beta = \bigcup\limits_{0 \leqslant \alpha < \beta} N_\alpha$ для предельных β, $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ — (какая-нибудь) максимальная инвариантная в фактор-группе G/N_α абелева подгруппа группы N/N_α.

Пусть H — любая максимальная среди инвариантных подгрупп группы G, пересечения которых с подгруппой N совпадают с $N_\wedge$. Рассмотрим фактор-группу G/H. Для произвольной подгруппы X группы G подгруппу XH/H фактор-группы G/H будем обозначать через $\overline{X}$. Очевидно, $\overline{G} = \overline{A}\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — соответственно абелева и FC-подгруппа группы $\overline{G}$, $\overline{Z}$ — неединичная центральная подгруппа группы $\overline{B}$, и $\overline{N}$ — нормальное замыкание подгруппы $\overline{Z}$ в $\overline{G}$. Легко видеть, что $\overline{N}$ не содержит отличных от единицы инвариантных в $\overline{G}$ абелевых подгрупп. Очевидно, пересечение с $\overline{N}$ любой отличной от единицы инвариантной подгруппы группы $\overline{G}$ отлично от единицы.

Пусть L — произвольная отличная от единицы инвариантная подгруппа группы $\overline{G}$. Покажем, во-первых, что централизатор в $\overline{G}$ подгруппы L пересекается с L по единице и не содержит подгруппу $\overline{Z}$ и, во-вторых, что подгруппа L не принадлежит подгруппе $\overline{B}$.

Так как, очевидно, $L \cap C_{\overline{G}}(L) = Z(L)$ и подгруппа L инвариантна в $\overline{G}$, то $L \cap C_{\overline{G}}(L)$—инвариантная абелева подгруппа группы $\overline{G}$. Тогда и $(L \cap C_{\overline{G}}(L)) \cap \cap \overline{N}$ — инвариантная абелева подгруппа группы $\overline{G}$. Поскольку подгруппа $\overline{N}$ не имеет отличных от единицы инвариантных в $\overline{G}$ абелевых подгрупп, то отсюда следует, что $(L \cap C_{\overline{G}}(L)) \cap \overline{N} = 1$, а значит, и $L \cap C_{\overline{G}}(L) = 1$. Тогда с учетом того, что $L \cap \overline{N} \neq 1$, подгруппа $G_{\overline{G}}(L)$ не содержит подгруппу $\overline{N}$. Но $\overline{N}$ совпадает с пересечением всех инвариантных подгрупп группы $\overline{G}$, содержащих $\overline{Z}$. Поэтому с учетом инвариантности в $\overline{G}$ подгруппы $C_{\overline{G}}(L)$ последняя не содержит подгруппу $\overline{Z}$. Так как подгруппа $\overline{Z}$ содержится в центре группы $\overline{B}$, но не перестановочна поэлементно с подгруппой L, то подгруппа L не принадлежит $\overline{B}$.

Ввиду доказанного группа $\overline{G}$ не имеет отличных от единицы инвариантных абелевых подгрупп, а подгруппа $\overline{B}$ не имеет отличных от единицы подгрупп, инвариантных в $\overline{G}$. Поэтому в силу теоремы 1 из [2] группа $\overline{G}$ содержит некоторую отличную от единицы инвариантную конечную подгруппу. Последняя имеет неединичное пересечение с $\overline{N}$. Следовательно, подгруппа $\overline{N}$ содержит некоторую отличную от единицы конечную подгруппу K, инвариантную в $\overline{G}$. Очевидно, подгруппа K не имеет отличных от единицы инвариантных в $\overline{G}$ абелевых подгрупп. Ввиду этого она неразрешима. Далее $K \cap C_{\overline{G}}(K) = 1$.

Рассмотрим теперь фактор-группу $\overline{G}/C_{\overline{G}}(K)$. Для произвольной подгруппы X группы $\overline{G}$ подгруппу $XC_{\overline{G}}(K)/C_{\overline{G}}(K)$ фактор-группы $\overline{G}/C_{\overline{G}}(K)$ будем обозначать через $\tilde{X}$. Очевидно, группа $\tilde{G}$ конечна и $\tilde{G} = \tilde{A}\tilde{B}$; $\tilde{A}$ — абелева подгруппа группы $\tilde{G}$, $\tilde{Z}$ — центральная подгруппа группы $\tilde{B}$ и $\tilde{N}$ — нормальное замыкание подгруппы $\tilde{Z}$ в $\tilde{G}$. Тогда в силу теоремы 1 из [1] подгруппа $\tilde{N}$ разрешима и, значит, содержащаяся в ней подгруппа $\tilde{K}$ разрешима. Так как $K \cap C_{\overline{G}}(K) = 1$, то группы K и $\tilde{K}$ изоморфны. Следовательно, группа K разрешима. Противоречие. Утверждение 1 доказано.

З а м е ч а н и е 1. В случае полной абелевой подгруппы A предложение, равносильное утверждению 1, анонсировано Д. И. Зайцевым в [5] (следствие).

С л е д с т в и е 1. *Пусть $G = AB$ — группа с абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B. Если центр подгруппы B отличен от единицы, то G имеет отличную от единицы инвариантную абелевую подгруппу.*

Следствие 1 непосредственно вытекает из утверждения 1 теоремы 1.

З а м е ч а н и е 2. В связи со следствием 1 отметим, что ранее Д. И. Зайцев [5] анонсировал теорему, утверждающую, что группа $G = AB$ с абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B, у которой $Z(B) \neq 1$, имеет отличную от единицы инвариантную подгруппу H, для которой реализуется хотя бы одна из следующих двух возможностей: а) подгруппа H абелева; б) подгруппа H конечна ([5], теорема 1). Д. И. Зайцев [5] анонсировал также теорему, утверждающую, что группа $G = AB$ с абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B, у которой $Z(B) \neq 1$, имеет отличную от единицы инвариантную абелеву подгруппу в каждом из следующих трех случаев: а) A — полная подгруппа; б) A — подгруппа без кручения; в) $A \cap B = 1$ и при этом B не содержится ни в какой большей FC-подгруппе группы G ([5], теорема 2).

С л е д с т в и е 2. *При условии теоремы 1 подгруппа AN, где N — нормальное замыкание $Z(B)$ в G, является RI^*-группой.*

Ниже для произвольного непустого множества Y элементов группы X через $\langle Y \rangle$ обозначается подгруппа, порожденная Y в X.

С л е д с т в и е 3. *При условии теоремы 1 подгруппа $\langle A \cup Z(B) \rangle$ является RI^*-группой.*

Следствия 2 и 3 непосредственно вытекают из утверждения 1 теоремы 1.

Говорят, что подгруппа F группы G факторизуема относительно разложения $G = AB$, если $F = (F \cap A)(F \cap B)$.

Докажем утверждение 2 теоремы 1. Пусть подгруппы A и B периодические. Рассмотрим подгруппу AN. Подгруппа AN является RI^*-группой (следствие 2), $AN = A(AN \cup B)$ ([6], лемма 1), A и $AN \cap B$ — π-группы с $\pi = \pi(A) \cup \pi(B)$. Поэтому ввиду предложения 1 из [4] и теоремы из [3] подгруппа AN, а значит, и подгруппа N, являются локально конечными π-группами с $\pi = \pi(A) \cup \pi(B)$.

Покажем, что на самом деле подгруппа AN — π-группа с $\pi = \pi(A) \cup \pi(Z)$.

Положим $A^* = \langle A \cup Z \rangle$. Так как, очевидно, $A^* \subseteq AN$, то подгруппа A^* локально конечна. Покажем сначала, что A^* является π-группой с $\pi = \pi(A) \cup \pi(Z)$. Пусть g — произвольный элемент из A^*. Очевидно, для некоторых конечных подгрупп L и M соответственно групп A и Z $g \in \langle L \cup M \rangle$. Так как подгруппа A^* локально конечна, то подгруппа $\langle L \cup M \rangle$ конечна. Так как подгруппа $\langle L \cup M \rangle$ конечна и порождается инвариантной подгруппой группы A и инвариантной подгруппой группы B, то нормализатор в G подгруппы $\langle L \cup M \rangle$ факторизуем относительно разложения $G = AB$ (см. [7], лемма 1.2). Далее, подгруппа A^* является RI^*-группой (следствие 3). Следовательно, подгруппа $\langle L \cup M \rangle$ имеет возрастающий ряд инвариантных подгрупп с абелевыми факторами и потому, будучи конечной, разрешима.

Итак, подгруппа $\langle L \cup M \rangle$, порожденная конечными инвариантными подгруппами соответственно групп A и B, разрешима, а ее нормализатор в G факторизуем относительно разложения $G = AB$. Поэтому подгруппа $\langle L \cup M \rangle$ является π-группой с $\pi = \pi(L) \cup \pi(M)$ (см. [8], предложение

5.3). Следовательно, все простые делители порядка элемента g принадлежат $\pi(A) \cup \pi(Z)$. Поэтому ввиду произвольности элемента g подгруппа A^* является π-группой с $\pi = \pi(A) \cup \pi(Z)$.

Так как $G = A^*B$ и (инвариантная в B) подгруппа Z содержится в пересечении множителей A^* и B, то ее нормальное замыкание в G содержится в A^* (см. [9], лемма 1). Следовательно, $\pi(N) \subseteq \pi(A^*)$. Утверждение 2 доказано. Теорема 1 доказана.

Замечание 3. В процессе доказательства утверждения 2 теоремы 1 для произвольной центральной подгруппы Z группы B было установлено, во-первых, что подгруппа $A^* = \langle A \cup Z \rangle$ является локально конечной π-группой с $\pi = \pi(A) \cup \pi(Z)$ и, во-вторых, что нормальное замыкание N подгруппы Z в G содержится в подгруппе A^* и, значит, $A^* = AN$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение. *Если при условии теоремы 1 подгруппы A и B периодические и N — нормальное замыкание в G какой-нибудь центральной подгруппы Z группы B, то подгруппа AN является локально конечной π-группой с $\pi = \pi(A) \cup \pi(Z)$.*

Предложение 1. *Пусть $G = AB$ — группа с периодическими абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B. Пусть в каждой конечной подгруппе F группы G, факторизуемой относительно разложения $G = AB$, нормальное замыкание центра подгруппы $F \cap B$ является разрешимой группой ступени, не превышающей некоторого фиксированного числа d. Тогда нормальное замыкание в G центра подгруппы B является разрешимой группой ступени $\leqslant d$.*

Доказательство. Для доказательства предложения, очевидно, достаточно показать, что нормальное замыкание в G произвольной конечной подгруппы K группы $Z(B)$ является разрешимой группой ступени $\leqslant d$. Положим $A^* = \langle A \cup Z(B) \rangle$. Так как $G = A^*B$ и инвариантная в B подгруппа K содержится в пересечении множителей A^* и B, то нормальное замыкание подгруппы K в G совпадает с ее нормальным замыканием в A^* (см. [9], лемма 1). Поэтому, очевидно, достаточно показать, что нормальное замыкание подгруппы K в произвольной содержащей ее конечно порожденной подгруппе H группы A^* является разрешимой группой ступени $\leqslant d$.

Покажем это. Ввиду утверждения 2 теоремы 1 подгруппа A^* локально конечна. Поэтому подгруппа H конечна. Так как подгруппа H конечна, то, очевидно, она содержится в некоторой конечной подгруппе C, порожденной подгруппой из A и подгруппой из $Z(B)$. Так как подгруппа C конечна и порождена инвариантной подгруппой группы A и инвариантной подгруппой группы B, то она инвариантна в некоторой подгруппе F группы G, представимой в виде произведения конечно порожденной подгруппы из A и конечно порожденной подгруппы из B (см. [7], лемма 1.3). Подгруппа F конечна (ввиду того, что всякая конечно порожденная периодическая FC-группа конечна) и факторизуема относительно разложения $G = AB$. Поэтому по условию доказываемого предложения нормальное замыкание в ней подгруппы $Z(F \cap B)$ — разрешимая группа ступени $\leqslant d$. Но тогда и нормальное замыкание в F, а значит, и в H, содержащейся в $Z(F \cap B)$ подгруппы K является разрешимой группой ступени $\leqslant d$. Предложение доказано.

Следствие 4. *Если в произвольной конечной группе $G = AB$ с абелевой подгруппой A нормальное замыкание центра подгруппы B является разрешимой группой ступени, не превышающей некоторого фиксированного числа d, то и в произвольной группе $G = AB$ с периодическими абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B нормальное замыкание центра подгруппы B является разрешимой группой ступени $\leqslant d$.*

Следствие 4 непосредственно вытекает из только что доказанного предложения.

Следствие 5. *Тогда и только тогда в каждой группе $G = AB$ с периодическими абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B нормальное замыкание подгруппы $Z(B)$ разрешимо, когда во всех конечных группах*

$G = AB$ с абелевой подгруппой A ступени разрешимости нормальных замыканий подгрупп $Z(B)$ ограничены в совокупности.

Доказательство. Достаточность вытекает из следствия 4.

Необходимость. Пусть в каждой группе $G = AB$ с периодическими абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B нормальное замыкание подгруппы $Z(B)$ разрешимо. Покажем, что во всех конечных группах $G = AB$ с абелевой подгруппой A ступени разрешимости нормального замыкания подгруппы $Z(B)$ ограничены в совокупности.

Пусть это не так. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ возьмем какую-нибудь конечную группу $G_n = A_nB_n$ с абелевой подгруппой A_n такую, что ступень разрешимости нормального замыкания в ней подгруппы $Z(B_n)$ не меньше, чем n. Пусть G — прямое произведение групп G_n, $n = 1, 2, \ldots$; A — подгруппа, порожденная всеми A_n, и B — подгруппа, порожденная всеми B_n. Тогда, очевидно, $G = AB$, A — периодическая абелева группа, B — периодическая FC-группа, но нормальное замыкание в G подгруппы $Z(B)$ неразрешимо. Противоречие. Следствие доказано.

Если в группе $G = AB$ с абелевой подгруппой A подгруппа B конечна над своим центром (т. е. когда $|B : Z(B)| < \infty$), то нормальное замыкание в G центра подгруппы B разрешимо. В этом нетрудно убедиться, пользуясь теоремой автора [10, 11], утверждающей, что группа, разложимая в произведение двух подгрупп, конечных над своими центрами, почти разрешима (т. е. имеет разрешимую инвариантную подгруппу конечного индекса), и теоремой 1 из [1].

Следующая теорема устанавливает разрешимость нормального замыкания в G центра подгруппы B в другом случае.

Теорема 2. *Пусть $G = AB$ — группа с периодическими абелевой подгруппой A и FC-подгруппой B, такими что $\pi(A) \cap \pi(B) \varnothing$. Тогда нормальное замыкание в G центра подгруппы B является разрешимой группой ступени $\leqslant 2$.*

Доказательство. Как показал Л. С. Казарин ([12], теорема 12 и [13]), в бинарно конечной (в частности, конечной) группе $G = AB$ с абелевой подгруппой A нормальное замыкание центра подгруппы B является разрешимой группой ступени $\leqslant 2$ при условии, если $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$. Отсюда и из предложения 1 настоящей работы следует справедливость теоремы 2.

1. *Казарин Л. С.* О произведении конечных групп // Докл. АН СССР.— 1983.— **269**, № 3.— С. 528—531.
2. *Зайцев Д. И.* Теорема Ито и произведения групп // Мат. заметки.— 1983.— 33, № 6.— С. 807—818.
3. *Черников Н. С.* К проблеме Ш. С. Кемхадзе // Сообщ. АН ГССР.— 1982.— **105**, № 3.— С. 481—484.
4. *Черников Н. С.* Произведения групп конечного свободного ранга // Группы и системы их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 42—56.
5. *Зайцев Д. И.* Признаки непростоты произведений групп // XVI Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл. [Ленинград, 22—25 сент. 1981 г.].— Л.: Ленингр. отд-ние Мат. ин-та АН СССР, 1981.— Ч. 1.— С. 52—53.
6. *Черников С. Н.* О дополняемости силовских П-подгрупп в некоторых классах бесконечных групп // Мат. сб.— 1955.— 37, № 3.— С. 557—566.
7. *Kegel O. H.* On the solvability of some factorized linear groups // Ill. J. Math.— 1965 .— 9, N 3.— P. 535—547.
8. *Amberg B.* Artinian and Noetherian factorized groups // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.— 1976.— **55**.— P. 105—122.
9. *Чунихин С. А.* О существовании подгрупп у конечной группы // Труды семинара по теории групп.— М.; Л.: ГОНТИ, 1938.— С. 106—125.
10. *Черников Н. С.* Бесконечные группы, факторизуемые нильпотентными подгруппами // Докл. АН СССР.— 1980.— **252**, № 1.— С. 57—60.
11. *Черников Н. С.* О произведении почти абелевых групп // Укр. мат. журн.—1981. — 33, № 1.— С. 136—138.
12. *Казарин А. С.* О группах с факторизацией // Докл. АН СССР.— 1981.— **256**, № 1.— С. 26—29.
13. *Казарин Л. С.* О произведении абелевой группы и группы с нетривиальным центром.— Новосибирск, 1981.— 38 с.— Деп. в ВИНИТИ 16.07.81, № 3565-81.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 04.11.85