УДК 517.9

Н. Н. Иванюк, Н. И. Терещенко

Построение нормально-регулярных решений системы линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=\pi_i}^{\nu_i} A_{ij} z^j \frac{d^{n-i} w}{dz^{n-i}} = 0, \qquad (1)$$

где $w(z)$ — искомый q-мерный вектор, A_{ij}, $i = \overline{0, n}$; $j = \overline{\pi_i, \nu_i}$, — постоянные матрицы размера $q \times q$, $\pi_i (\nu_i)$ — показатели наинизшей (наивысшей) степени полинома

$$A_i(z) = \sum_{j=\pi_i}^{\nu_i} A_{ij} z^j. \qquad (2)$$

Будем называть число $k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\nu_i - \nu_0)/i$ подрангом, а число $\varkappa = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\pi_i - \pi_0)/i$ антиподрангом системы (1). Введем также понятия ранга $p = k + 1$ и антиранга $m = -\varkappa - 1$ системы. Используя понятия ранга и антиранга, системы типа (1) можно разбить на следующие классы: I) $p > 0$, $m \leqslant 0$; II) $p \leqslant 0$, $m > 0$; III) $p \leqslant 0$, $m \leqslant 0$; IV) $p > 0$, $m > 0$.

Рассмотрим построение решений систем класса I, т. е. решений вида

$$w = \exp\left(\sum_{s=1}^{p} \tau_{p-s} z^s / s\right) \sum_{i=0}^{\infty} u_i z^{\rho + i}, \quad p \geqslant 1, \qquad (3)$$

которые будем называть в дальнейшем нормально-регулярными.

Прежде всего укажем одно из важных свойств систем, имеющих целый подранг.

Теорема 1. *Если подранг системы* (1) *равен целому числу* k, *то эту систему можно преобразовать к виду*

$$\sum_{i=0}^{n} z^{ik} D_i(z) \frac{d^{n-i} w}{dz^{n-i}} = 0, \qquad (4)$$

где $D_i(z) = \sum_{j=0}^{\mu_i} D_{ij} z^{-j}$, $\mu_i < \infty$, *матрицы* D_{i0} *являются нулевыми не для всех значений индекса* i, *причем* $D_{00} \neq 0$.

Для выяснения возможности представления решений системы (1) в виде степенных рядов найдем характеристическую матрицу-функцию этой системы. Имеем

$$L[z^\rho] = z^{\rho - n} \sum_{\mu=0}^{n} z^{\mu(k+1)} D_\mu(z) \rho(\rho - 1) \ldots (\rho - n + \mu + 1).$$

Перепишем полученное выражение характеристической матрицы-функции, располагая в нем члены по убывающим степеням независимого переменного:

$$L[z^\rho] = z^{\rho - n} \left\{ \sum_{s=0}^{k} D_{ns} z^{n(k+1)-s} + \sum_{s=0}^{k} (D_{n,k+1+s} + \rho D_{n-1,s}) z^{n(k+1)-s-k-1} + \ldots \right\}. \tag{5}$$

Отсюда следует необходимое условие существования решений системы (1) в виде степенных рядов.

Теорема 2. *Система дифференциальных уравнений* (1) *допускает решения в виде степенных рядов*

$$w = z^\rho \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^{-i}, \tag{6}$$

где ρ — *параметр, обозначающий корень определяющего уравнения*, y_i, $i = 1, 2, \ldots$, — *постоянные* q*-мерные векторы, если*

$$\det D_{ns} = 0, \quad s = \overline{0, k}. \tag{7}$$

Число решений системы (1) в окрестности особой иррегулярной точки $z = \infty$ определяет следующая теорема.

Теорема 3. *Система дифференциальных уравнений* (1) *посредством преобразования*

$$w = \exp\left(\sum_{s=1}^{p} \tau_{p-s} z^s / s\right) u, \tag{8}$$

где u — *неизвестный* q*-мерный вектор*, $p = k + 1 \geqslant 1$ — *ранг системы* (1), τ_{p-s} — *подлежащие определению коэффициенты многочлена*

$$Q(z) = \sum_{s=1}^{p} \tau_{p-s} z^s / s, \tag{9}$$

обращается в систему, имеющую тот же ранг, что и (1), *и допускающую решения вида*

$$u = z^\rho \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j}. \tag{10}$$

В результате преобразования (8) система (1) принимает вид

$$\sum_{i=0} R_i(z) \frac{d^{n-i} u}{dz^{n-i}} = 0, \tag{11}$$

где

$$R_i(z) = \sum_{=0}^{i} C_{n-j}^{n-i} A_j(z) \left[\lambda_{1i} \left(\frac{dQ}{dz}\right)^{j-1} + \lambda_{2i} \frac{d^2 Q}{dz^2} \left(\frac{dQ}{dz}\right)^{j-2} + \ldots + \lambda_{ji} \frac{d^{-j} Q}{dz^{i-j}} \right],$$

C_{n-j}^{n-i}, λ_{ij} — некоторые постоянные, характеристическая матрица-функция которой такова:

$$L[z^\rho] \equiv z^{kn+\rho}\left[\sum_{i=0}^{k} B_{ni} z^{-i} + (B_{n,k+1} + \rho B_{n-1,0})\, z^{-k-1} + \dots\right]. \tag{12}$$

Отсюда получаем систему для неизвестных параметров многочлена (9):

$$\det B_{ni} = 0, \quad i = \overline{0, k}. \tag{13}$$

Следствие 1. *Вектор*

$$w_i = z^{\rho_i^{(s)}} \exp\left(\sum_{s=1}^{p} \tau_{p-s} z^s / s\right) \sum_{j=0}^{\infty} y_{ij}^{(s)} z^{-j} \tag{14}$$

— *решение системы* (1), *где* $\rho_i^{(s)}$ — *корень определяющего уравнения системы* (11), *соответствующей i-му решению скалярной системы* (13), $y_{ij}^{(s)}$, $j = 0, 1, \dots,$ — *постоянные векторы, соответствующие корню* $\rho_i^{(s)}$.

Обратимся теперь к антирангу $m \leqslant 0$ системы (1). При целочисленных значениях ранга $p \geqslant 1$ справедлива такая теорема.

Теорема 4. *Система дифференциальных уравнений* (1) *посредством преобразования* (8) *обращается в систему, имеющую тот же знак антиранга, что и система* (1).

Предположим, что среди решений системы (1) нет логарифмических, тогда при неположительности антиранга справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Система дифференциальных уравнений* (1), *для которой* $p > 0$, $m \leqslant 0$, *имеет решения вида* (3), *причем ряд правой части сходится в некоторой окрестности особой точки* $z = 0$.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение [2] собственных осесимметричных колебаний пластины линейно-переменной толщины

$$r^4 \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2r^3\left(1 + \frac{r}{D}\frac{dD}{dr}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + r^2\left[-1 + \frac{(2+\nu)\, r}{D}\frac{dD}{dr} + \right.$$
$$\left. + \frac{r^2}{D}\frac{d^2 D}{dr^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + r\left(1 - \frac{r}{D}\frac{dD}{dr} + \frac{\nu r^2}{D}\frac{d^2 D}{dr^2}\right)\frac{\partial w}{\partial r} +$$
$$+ \frac{\gamma}{g}\frac{h r^4}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{15}$$

где $D = D_M$ — жесткость изгиба пластины, γ/g — масса единицы объема пластины.

При собственных осесимметричных колебаниях круглой пластины прогиб w представляется в виде

$$w = \sum_{s=0}^{\infty} (A_s \cos \omega_s t + B_s \sin \omega_s t)\, W_s. \tag{16}$$

Здесь ω_s — круговая частота собственных колебаний, W_s — функция только r; A_s, B_s — постоянные, определяемые начальными условиями; s — число узловых окружностей.

Пусть толщина h и жесткость D_M пластины изменяются соответственно по законам

$$h = h_0 |1 - x|, \quad D_M = D_0 |1 - x|^3, \quad x = \pm r/r_0. \tag{17}$$

Подставив выражения (16) и (17) в (15) и введя вектор

$$y = \operatorname{colon}(W_s,\ x^2 W_s''), \tag{18}$$

представим уравнение (15) в виде системы двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$(A_{01}x + A_{03}x^3 + A_{04}x^4)\, y'' + (A_{11}x + A_{12}x^2 + A_{13}x^3)\, y' + \\ + (A_{20} + A_{21}x + A_{22}x^2 + A_{24}x^4)\, y = 0, \tag{19}$$

где $A_{01} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $A_{03} = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$, $A_{04} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $A_{11} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$, $A_{12} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$, $A_{13} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -2(1-3\nu) & 4 \end{Vmatrix}$, $A_{20} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $A_{21} = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4-3\nu \end{Vmatrix}$, $A_{22} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1+3\nu \end{Vmatrix}$, $A_{24} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda_s^2 & 0 \end{Vmatrix}$, $\lambda_s^2 = h_0 r^4 \gamma \omega_s^2 / g D_0$, $s = 0, 1, \ldots$.

Ранг и антиранг системы (19) соответственно равны $p = 1$ и $m = -1/2$. Следовательно, решения системы представимы в виде (3).

Полагая $y = \exp(\tau x)\, u$, преобразуем систему (19) к виду

$$(A_{01}x + A_{03}x^3 + A_{04}x^4)\, u'' + ((2\tau A_{01} + A_{11})\, x + A_{12}x^2 + (2\tau A_{03} + A_{13})\, x^3 + \\ + 2\tau A_{04}x^4)\, u' + (A_{20} + (A_{21} + \tau A_{11} + \tau^2 A_{01})\, x + (A_{22} + \tau A_{12})\, x^2 + \\ + (\tau^2 A_{03} + \tau A_{13})\, x^3 + (\tau^2 A_{04} + A_{24})\, x^4)\, u = 0. \tag{20}$$

Приравнивая нулю определители матриц при наивысших степенях независимого переменного в выражении коэффициента при u, находим $\tau = 2$. Подставляя $\tau = 2$ в (20), получаем систему

$$(A_{01}x + A_{03}x^3 + A_{04}x^4)\, u'' + ((4A_{01} + A_{11})\, x + A_{12}x^2 + (4A_{03} + A_{13})\, x^3 + \\ + 4A_{04}x^4)\, u' + (A_{20} + (A_{21} + 2A_{11} + 4A_{01})\, x + (A_{22} + 2A_{12})\, x^2 + \\ + (4A_{03} + 2A_{13})\, x^3 + (4A_{04} \quad A_{24})\, x^4)\, u = 0, \tag{21}$$

характеристическая матрица-функция которой такова:

$$L[x^\rho] \equiv x^{\rho-1} \{F_0(\rho) + F_1(\rho)\, x + F_2(\rho)\, x^2 + F_3(\rho)\, x^3 + F_4(\rho)\, x^4 + F_5(\rho)\, x^5\}, \tag{22}$$

где

$$F_0(\rho) = \rho(\rho-1)\, A_{01}, \quad F_1(\rho) = \rho(4A_{01} + A_{11}) + A_{20}, \quad F_2(\rho) = \rho(\rho-1)\, A_{03} + \\ + \rho A_{12} + A_{21} + 2A_{11} + 4A_{01}, \quad F_3(\rho) = \rho(\rho-1)\, A_{04} + \rho(4A_{03} + A_{13}) + \\ + A_{22} + 2A_{12}, \quad F_4(\rho) = 4\rho A_{04} + 4A_{03} + 2A_{13}, \quad F_5(\rho) = 4A_{04} + A_{24}.$$

Система (21) имеет регулярные решения

$$u^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_i^{(1)} x^i, \quad u^{(2)} = u^{(1)} \ln|x| + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{(2)} x^i, \quad u^{(3)} = x \sum_{i=0}^{\infty} v_i^{(3)} x^i,$$

$$u^{(4)} = u^{(3)} \ln|x| + x \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{(4)} x^i,$$

где

$$v_i^{(1)} = - F_0^{-} (i)\, [F_1(i-1)\, v_{i-1}^{(1)} + F_2(i-2)\, v_{i-2}^{(1)} + F_3(i-3)\, v_{i-3}^{(1)} + \\ + F_4(i-4)\, v_{i-4}^{(1)} + F_5(i-5)\, v_{i-5}^{(1)}], \quad i = 2, 3, \ldots; \quad {}_0 = \text{colon}\,(1; 1);$$

$$v_{-1}^{(1)} = v_{-2}^{(1)} = v_{-3}^{(1)} = 0;$$

$$v_i^{(3)} = F_0^{-1}(i+1)\, [F_1(i)\, v_{i-1}^{(3)} + F_2(i-1)\, v_{i-2}^{(3)} + F_3(i-2)\, v_{i-3}^{(3)} + \\ + F_4(i-3)\, v_{i-4}^{(3)} + F_5(i-4)\, v_{i-5}^{(3)}], \quad i = 1, 2, \ldots;$$

$$v_0^{(3)} = \text{colon}\,(1; 1); \qquad v_{-1}^{(3)} = v_{-2}^{(3)} = v_{-3}^{(3)} = v_{-4}^{(3)} = 0;$$

$$w_i^{(2)} = -F_0^{-1}(i)\,[F_1(i-1)\,w_{i-1}^{(2)} + F_2(i-2)\,w_{i-2}^{(2)} + F_3(i-3)\,w_{i-3}^{(2)} +$$
$$+ F_4(i-4)\,w_{i-4}^{(2)} + \partial F_0(i)/\partial\rho v_i^{(1)} + \partial F_1(i-1)/\partial\rho u_{i-1}^{(1)} + \partial F_2(i-2)/\partial\rho u_{i-2}^{(1)} +$$
$$+ \partial F_3(i-3)/\partial\rho u_{i-3}^{(1)}; \qquad i = 2, 3, 4, \ldots; \quad w_0^{(2)} = w_{-1}^{(2)} = w_{-2}^{(2)} = w_{-3}^{(2)} = 0;$$
$$w_i^{(4)} = -F_0^{-1}(i+1)\,[F_1(i)\,w_{i-1}^{(4)} + F_2(i-1)\,w_{i-2}^{(4)} + F_3(i-2)\,w_{i-3}^{(4)} +$$
$$+ F_4(i-3)\,w_{i-4}^{(4)} + \partial F_0(i+1)/\partial\rho v_i^{(2)} + \partial F_1(i)/\partial\rho v_{i-1}^{(2)} + \partial F_2(i-1)/\partial\rho v_{i-2}^{(2)} +$$
$$+ \partial F_3(i-2)/\partial\rho v_{i-3}^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots; \qquad w_{-1}^{(4)} = w_{-2}^{(4)} = w_{-3}^{(4)} = 0.$$

Переходя к вектору y по формуле $y = \exp(2x)\,u$, получаем нормально-регулярные решения системы (19):

$$y^{(1)} = \exp(2x)\sum_{i=0}^{\infty} v_i^{(1)}x^i, \quad y^{(2)} = \exp(2x)\left(\ln|x|\sum_{i=0}^{\infty} v_i^{(1)}x^i + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{(2)}x^i\right),$$

$$y^{(3)} = x\exp(2x)\sum_{i=0}^{\infty} v_i^{(3)}x^i, \quad y^{(4)} = x\exp(2x)\left(\ln|x|\sum_{i=0}^{\infty} v_i^{(3)}x^i + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^{(4)}x^i\right),$$

где векторы $v_i^{(1)}$, $w_i^{(2)}$, $v_i^{(3)}$ и $w_i^{(4)}$ имеют указанные выше значения.

Аналогичным образом можно построить решения систем классов II—IV.

1. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970.— 393 с.
2. *Коваленко А. Д.* Избранные труды.— Киев : Наук. думка, 1976.— 762 с.

Хмельниц. технол. ин-т быт. обслуживания Получено 26.11.84