УДК 517.949.2

И. И. Клевчук, В. И. Фодчук

Бифуркация особых точек дифференциально-функциональных уравнений

Пусть R^n — n-мерное пространство с нормой $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $C = C[-\Delta, 0]$ — пространство непрерывных на $[-\Delta, 0]$ функций со значениями в R^n с нормой $\|\varphi\| = \sup\limits_{-\Delta \leqslant \theta \leqslant 0} |\varphi(\theta)|$. Обозначим через x_t элемент пространства C, заданный функцией $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-\Delta \leqslant \theta \leqslant 0$.

Рассмотрим уравнение

$$dx/dt = L(\varepsilon) x_t + f(t, x_t, \varepsilon), \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, $L(\varepsilon): C \to R^n$ — линейный непрерывный функционал, $f: R \times C \times [0, \varepsilon_0] \to R^n$; $f(t + T, \varphi, \varepsilon) = f(t, \varphi, \varepsilon)$, $T > 0$; $f(t, \varphi, \varepsilon) = O(|\varphi|^2)$ при $|\varphi| \to 0$. Функционал $f(t, \varphi, \varepsilon)$ непрерывен по t, ε и четырежды непрерывно дифференцируем по φ. Предположим, что нулевое решение уравнения (1) при $\varepsilon = 0$ асимптотически устойчиво.

Наряду с (1) рассмотрим линейные уравнения

$$d\tilde{x}/dt = L(\varepsilon) \tilde{x}_t, \tag{2}$$

$$d\tilde{x}/dt = L\tilde{x}_t, \tag{3}$$

где $L = L(0)$. Согласно теореме Рисса функционал $L(\varepsilon)$ можно представить в виде интеграла Стилтьеса $L(\varepsilon)\varphi = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta, \varepsilon)]\varphi(\theta)$, где матрица $\eta(\theta, \varepsilon)$ имеет ограниченную вариацию по θ. Пусть $\eta(\theta, \varepsilon)$ дважды непрерывно дифференцируема по ε. Характеристическое уравнение для уравнения (2) имеет вид

$$\det \Lambda_\varepsilon(\lambda) = 0,\ \Lambda_\varepsilon(\lambda) = \lambda - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta, \varepsilon). \tag{4}$$

Предположим, что уравнение (4) имеет одну пару корней вида $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, а остальные корни лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \leqslant \lambda_0 < 0$.

Уравнение (1) можно представить в виде

$$dx/dt = Lx_t + F(t, x_t, \varepsilon), \tag{5}$$

где $F(t, x_t, \varepsilon) = L(\varepsilon)x_t - Lx_t + f(t, x_t, \varepsilon)$. Обозначим через $\tilde{x}_t(\varphi)$ решение уравнения (3) с начальной функцией $\varphi \in C$. Определим оператор сдвига по решениям соотношением $T(t)\varphi = \tilde{x}_t(\varphi)$. Семейство $\{T(t),\ t \geqslant 0\}$ образует сильно непрерывную полугруппу. Производящий оператор полугруппы является оператором дифференцирования $A\varphi(\theta) = \dot{\varphi}(\theta)$, $-\Delta \leqslant \theta \leqslant 0$, с областью определения $D(A) = \{\varphi \in C : \dot{\varphi} \in C,\ \dot{\varphi}(0) = L\varphi\}$.

Обозначим через P собственное подпространство в C, порожденное решениями уравнения (3), соответствующее корням $\pm i\beta(0)$. Разложим пространство C в прямую сумму: $C = P \oplus Q$. Пусть $\Phi = \Phi(\theta)$ — базис в P. Рассматривая сопряженное с (3) уравнение, можно аналогичным образом определить функцию $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \Delta$. Тогда каждый элемент $x_t \in C$ можно представить в виде $x_t = \Phi y(t) + z_t$, где $y(t) = (\Psi, x_t)$, $z_t = x_t - \Phi y(t)$, $y(t) \in R^2$, $z_t \in Q$, (Ψ, x_t) — некоторый билинейный функционал. Уравнение (1) эквивалентно системе уравнений [1, 2]:

$$dy/dt = By + \Psi(0)F(t, \Phi y + z_t, \varepsilon),$$

$$z_t = T(t-\sigma)z_\sigma + \int\limits_{\sigma}^{t} T(t-s)X_0^Q F(s, \Phi y(s) + z_s, \varepsilon)\,ds.$$

Здесь X_0^Q — проекция на подпространство Q функции $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \leqslant \leqslant \theta < 0$, $X_0(0) = I$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta(0) \\ -\beta(0) & 0 \end{pmatrix}$.

В [3] доказано существование функции $g : (-\infty, \infty) \times R^2 \times [0, \varepsilon_0] \to Q$ удовлетворяющей условиям $g(t, 0, \varepsilon) = 0$, $\|g(t, y, \varepsilon) - g(t, y', \varepsilon)\| \leqslant 0{,}5|y - y'|$ и такой, что множество $S_\varepsilon = \{(t, \varphi, \varepsilon) : t \in R,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \varphi = \Phi y + \zeta,\ y \in R^2,\ \zeta = g(t, y, \varepsilon),\ \zeta \in Q\}$ является локальным интегральным многообразием уравнения (5). Функция $g(t, y, \varepsilon)$ будет периодической по t с периодом T и трижды непрерывно дифференцируемой по y. Поведение решений уравнения (5) на интегральном многообразии S_ε описывается уравнением

$$du/dt = Bu + \Psi(0)F(t, \Phi u + g(t, u, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6}$$

Для любого решения $x_t = \Phi y(t) + z_t$ уравнения (5) существует решение $\xi_t = \Phi u(t) + g(t, u(t), \varepsilon)$, принадлежащее S_ε и такое, что справедлива оценка $\|x_t - \xi_t\| \leqslant Ke^{-\nu t}$, $K > 0$, $\nu > 0$.

В результате линеаризации уравнения (6) получим уравнение

$$du/dt = Bu + \Psi(0)[L(\varepsilon) - L][\Phi u + b(\varepsilon)u], \tag{7}$$

где функция $b(\varepsilon) : R^2 \to Q$ определяет интегральное многообразие уравнения $dx/dt = Lx_t + [L(\varepsilon) - L]x_t$.

Пусть $c \neq 0$ и $ce^{\lambda t}$ — решение уравнения (7). Тогда $[\Phi c + b(\varepsilon)c]e^{\lambda t}$ — решение уравнения (2), следовательно, $\lambda = \alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$. С помощью некоторого невырожденного линейного преобразования $u = H(\varepsilon)v + J(\varepsilon)\bar{v}$

уравнение (7) можно привести к диагональному виду. Если такое преобразование сделать в уравнении (6), то получим уравнение

$$dv/dt = [\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon)] v + V(t, v, \bar{v}, \varepsilon), \tag{8}$$

где v — комплексная переменная, $V(t+T, v, \bar{v}, \varepsilon) = V(t, v, \bar{v}, \varepsilon)$, $V(t, v, \bar{v}, \varepsilon) = O(|v|^2)$ при $|v| \to 0$.

Пусть $0 < \beta(0) < 2\pi/T$ и отсутствует сильный резонанс, т. е. $\beta(0) T/2\pi \neq 1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$, $3/4$. Преобразуем уравнение (8) с помощью подстановки

$$v = w + V_2(t, w, \bar{w}, \varepsilon) + V_3(t, w, \bar{w}, \varepsilon). \tag{9}$$

Здесь V_2 и V_3 — формы собственного второго и третьего порядка с периодическими коэффициентами. Преобразование (9) можно подобрать таким образом, что уравнение для w примет вид [4—6]

$$dw/dt = [\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon)] w + [\gamma(\varepsilon) + i\delta(\varepsilon)] w^2\bar{w} + U(t, w, \bar{w}, \varepsilon),$$

где $U(t+T, w, \bar{w}, \varepsilon) = U(t, w, \bar{w}, \varepsilon)$, $U(t, w, \bar{w}, \varepsilon) = O(|w|^4)$ при $|w| \to 0$. Перейдем к полярным координатам. Полагая $w = re^{i\varphi}$, получаем систему

$$d\varphi/dt = \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) r^2 + W(t, r, \varphi, \varepsilon),$$

$$dr/dt = \alpha(\varepsilon) r + \gamma(\varepsilon) r^3 + R(t, r, \varphi, \varepsilon), \tag{10}$$

где $R(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^4)$, $W(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^3)$ при $|r| \to 0$.

Пусть $\gamma(0) \neq 0$. Поскольку нулевое решение уравнения (1) при $\varepsilon = 0$ асимптотически устойчиво, то $\gamma(0) < 0$. Из [4, 7, 8] следует, что при достаточно малом ε система (10) имеет инвариантный тор $\bar{S}_\varepsilon = \{(t, \varphi, r) : t \in R, \varphi \in R, r = \rho(t, \varphi, \varepsilon)\}$. При этом $\rho(t+T, \varphi, \varepsilon) = \rho(t, \varphi, \varepsilon)$, $\rho(t, \varphi + 2\pi, \varepsilon) = \rho(t, \varphi, \varepsilon)$ и имеет место представление $\rho(t, \varphi, \varepsilon) = (\varepsilon N)^{1/2} + O(\varepsilon)$, $N = -\alpha'(0)/\gamma(0)$. Поведение решений системы (10) на торе $\bar{S}_\varepsilon$ описывается уравнением

$$d\psi/dt = \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \rho^2(t, \psi, \varepsilon) + W(t, \rho(t, \psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon). \tag{11}$$

Для любого решения $(\varphi(t), r(t))$ системы (10), удовлетворяющего условию $0 < r(\sigma) < r_0$, найдется решение $\psi(t)$ уравнения (11) такое, что справедливы оценки

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant Me^{-n\varepsilon t}, \ |r(t) - \rho(t, \psi(t), \varepsilon)| \leqslant Me^{-n\varepsilon t},$$

$$M > 0, \ n > 0. \tag{12}$$

Тору $\bar{S}_\varepsilon$ соответствует инвариантный тор уравнения (8), представимый в виде $v(t, \varphi, \varepsilon) = \rho(t, \varphi, \varepsilon) e^{i\varphi} + V_2(t, \rho(t, \varphi, \varepsilon) e^{i\varphi}, \rho(t, \varphi, \varepsilon) e^{-i\varphi}, \varepsilon) + V_3(t, \rho(t, \varphi, \varepsilon) e^{i\varphi}, \rho(t, \varphi, \varepsilon) e^{-i\varphi}, \varepsilon)$.

Инвариантное тороидальное многообразие уравнения (1) определяется функцией

$$h(t, \varphi, \varepsilon) = \Phi[H(\varepsilon) v(t, \varphi, \varepsilon) + J(\varepsilon) \bar{v}(t, \varphi, \varepsilon)] +$$

$$+ g(t, H(\varepsilon) v(t, \varphi, \varepsilon) + J(\varepsilon) \bar{v}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon). \tag{13}$$

Подставляя в (13) вместо φ решение $\psi(t)$ уравнения (11), получаем решение уравнения (1). Справедливо представление

$$h(t, \psi(t), \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon N} \Phi \begin{bmatrix} \cos\psi(t) \\ \sin\psi(t) \end{bmatrix} + O(\varepsilon).$$

Из оценок (12) следует неравенство

$$|u(t) - H(\varepsilon) v(t, \psi(t), \varepsilon) - J(\varepsilon) \bar{v}(t, \psi(t), \varepsilon)| \leqslant M_1 e^{-n\varepsilon t}, \ M_1 > 0.$$

Пусть x_t — любое решение уравнения (1) с начальным значением x_σ, $0 < \| x_\sigma \| < r_1$. Тогда при достаточно малом r_1 справедлива оценка

$$\| x_t - h(t, \psi(t), \varepsilon) \| \leqslant \| x_t - \Phi u(t) - g(t, u(t), \varepsilon) \| +$$
$$+ (\| \Phi \| + 0{,}5) M_1 e^{-n\varepsilon t} \leqslant K e^{-\nu t} + (\| \Phi \| + 0{,}5) M_1 e^{-n\varepsilon t}.$$

Теорема 1. *Множество $\{(t, \zeta) : t \in R, \zeta = h(t, \varphi, \varepsilon), \varphi \in R\}$ является инвариантным тороидальным многообразием уравнения* (1). *Для любого решения x_t уравнения* (1), $0 < \| x_\sigma \| < r_1$, *найдется решение $\psi(t)$ уравнения* (11) *такое, что справедлива оценка*

$$\| x_t - h(t, \psi(t), \varepsilon) \| \leqslant K e^{-\nu t} + (\| \Phi \| + 0{,}5) M_1 e^{-n\varepsilon t}.$$

Если имеет место сильный резонанс вида $\beta(0) T/2\pi = 1/4$ или $\beta(0) T/2\pi = 3/4$, то с помощью замены вида (9) в уравнении (8) уничтожаются все нерезонансные члены. В результате получаем уравнение

$$dw/dt = [\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon)] w + \zeta(\varepsilon) w^2 \bar{w} + \eta(\varepsilon, t) \bar{w}^3 + O(| w |^4). \tag{14}$$

Полагая в (14) $w = z \exp[i\beta(0) t]$, имеем

$$dz/dt = \lambda(\varepsilon) z + \zeta(\varepsilon) z^2 \bar{z} + \eta(\varepsilon, t) \exp[-4i\beta(0) t] \bar{z}^3 + O(| z |^4). \tag{15}$$

С помощью замены $z = y + A(t, \varepsilon) \bar{y}^3$ уравнение (15) приводится к виду

$$dy/dt = \lambda(\varepsilon) y + \zeta(\varepsilon) y^2 \bar{y} + \xi(\varepsilon) \bar{y}^3 + O(| y |^4). \tag{16}$$

Здесь коэффициенты $\lambda(\varepsilon)$, $\zeta(\varepsilon)$, $\xi(\varepsilon)$ комплексные, $\lambda(0) = 0$.

Если имеет место резонанс вида $\beta(0) T/2\pi = 1/2$, то уравнение (8) приводится к уравнению

$$dy/dt = \lambda(\varepsilon) y + C(\varepsilon) y^3 + \zeta(\varepsilon) y^2 \bar{y} + E(\varepsilon) y \bar{y}^2 + \xi(\varepsilon) \bar{y}^3 + O(| y |^4).$$

Уравнение (16) может иметь несколько положений равновесия или предельный цикл [9]. Устойчивому (неустойчивому) положению равновесия соответствует устойчивое (неустойчивое) периодическое решение уравнения (1). Предельному циклу соответствует квазипериодическое решение уравнения (1).

Для приближенного нахождения решений уравнения (1), принадлежащих инвариантному тору, достаточно ограничиться членами второго и третьего порядка в разложении функции $\Psi(0) f(t, \Phi u + g(t, u, 0), 0)$ в ряд по степеням u. А для этого достаточно знать члены второго порядка в разложении функции $g(t, u, 0)$. Первое приближение функции $g(t, u, 0)$ имеет вид [3]

$$g_1(t, u, 0) = \int_{-\infty}^{t} T(t - s) X_0^Q f(s, \Phi e^{B(s-t)} u, 0)\, ds. \tag{17}$$

Представим функцию $f(s, \Phi y, 0)$ в виде $f(s, \Phi y, 0) = f_1(s) y_1^2 + f_2(s) \times y_1 y_2 + f_3(s) y_2^2 + O(| y |^3)$. Функции f_1, f_2, f_3 разложим в ряд Фурье $f_k(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{km} e^{2im\pi s/T}$, $k = 1, 2, 3$. Тогда определение функции $g_1(t, u, 0)$ сводится к вычислению интеграла

$$\int_{-\infty}^{t} T(t - s) X_0^Q e^{i\mu s} e^{i\omega(s-t)} ds = e^{i\mu t} \int_{-\infty}^{0} T(-s) X_0^Q e^{i(\mu+\omega)s} ds,$$

где $\mu = 2m\pi/T$, $\omega = 0, \pm 2\beta(0)$. Заметим, что интеграл $z = \int_{-\infty}^{0} T(-s) X_0^Q e^{i\delta s} ds$ сходится и ограничен равномерно по δ.

Теорема 2. *При любых действительных δ функция $z(\theta)$ принадлежит $Q \cap D(A)$ и выполняется равенство*

$$(i\delta I - A) z = X_0^Q. \tag{18}$$

Доказательство. Действительно,

$$(\Psi, z) = \int_{-\infty}^{0} (\Psi, T(-s) X_0^Q) e^{i\delta s} ds = 0,$$

поэтому $z \in Q$. Согласно определению производящего оператора имеем $A\varphi = \lim_{t\to 0} A_t\varphi$, где $A_t = (T(t) - I)/t$. При $t > 0$ находим

$$A_t z = t^{-1} \int_{-\infty}^{0} T(t-s) X_0^Q e^{i\delta s} ds - t^{-1} \int_{-\infty}^{0} T(-s) X_0^Q e^{i\delta s} ds =$$

$$= t^{-1} (e^{i\delta t} - 1) \int_{-\infty}^{0} T(-s) X_0^Q e^{i\delta s} ds - t^{-1} e^{i\delta t} \int_{-t}^{0} T(-s) X_0^Q e^{i\delta s} ds,$$

так что $A_t z \to i\delta z - X_0^Q$ при $t \to 0$. Значит, $z \in D(A)$ и $Az = i\delta z - X_0^Q$. Отсюда следует равенство (18). Теорема доказана.

Итак, для нахождения z нужно решить уравнение (18) относительно z. Это уравнение равносильно следующей системе:

$$dz(\theta)/d\theta - i\delta z(\theta) = -X_0^Q(\theta), \quad -\Delta \leqslant \theta < 0, \tag{19}$$

$$\int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta, 0)] z(\theta) - i\delta z(0) = -X_0^Q(0). \tag{20}$$

Решение уравнения (19) имеет вид

$$z(\theta) = e^{i\delta\theta} a - \int_{0}^{\theta} e^{i\delta(\theta - s)} X_0^Q(s) ds, \quad -\Delta \leqslant \theta < 0. \tag{21}$$

Подставляя последнее решение в (20), получаем уравнение для определения постоянной a:

$$\int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta, 0)] e^{i\delta\theta} a - \int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta, 0)] \int_{0}^{\theta} e^{i\delta(\theta - s)} X_0^Q(s) ds - i\delta a = -X_0^Q(0),$$

или

$$\Lambda_0(i\delta) a = (e^{-i\delta \cdot} I, X_0^Q). \tag{22}$$

Если число $i\delta$ не является корнем характеристического уравнения, то матрица $\Lambda_0(i\delta)$ имеет ненулевой определитель и вектор a однозначно определен.

Пусть теперь число $i\delta$ является корнем характеристического уравнения. Поскольку должно выполняться условие $(\Psi, z) = 0$, то согласно (21) можно дополнить уравнение (22) следующим уравнением:

$$(\Psi, e^{i\delta \cdot} a) = \left(\Psi, \int_{0}^{\cdot} e^{i\delta(\cdot - s)} X_0^Q(s) ds\right). \tag{23}$$

Согласно теореме 2 существует решение $z \in Q \cap D(A)$ уравнения (18). Поэтому существует решение системы уравнений (22), (23). Это решение будет единственным тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система

$$\Lambda_0(i\delta) a = 0, \quad (\Psi, e^{i\delta \cdot} a) = 0 \tag{24}$$

имеет только нулевое решение. Пусть вектор a является решением системы (24). Из первого уравнения системы (24) следует, что $e^{i\delta\theta} a$ будет решением уравнения (3), значит, справедливо представление $e^{i\delta\theta} a = b_1\varphi_1(\theta) + b_2\varphi_2(\theta)$, где $\varphi_1(\theta)$, $\varphi_2(\theta)$ — столбцы матрицы Φ. Поскольку $(\Psi, \Phi) = I$, то, учитывая второе равенство системы (24), получаем $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$

$=(\Psi, e^{i\delta\cdot} a) = 0$. Отсюда $a = 0$, следовательно, существует единственное решение системы уравнений (22), (23).

Замечание 1. Описанный выше метод построения интегральных многообразий легко обобщается на общий случай, когда характеристический квазиполином $\det \Lambda_0(\lambda)$ имеет произвольное число корней с нулевыми действительными частями.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$dx/dt = -(\pi/2 + \varepsilon)\, x(t-1)\,[1 + x(t)] + x^3(t) \cos \pi t. \tag{25}$$

Согласно [1], находим

$$\Phi(\theta) = \left(\cos\frac{\pi}{2}\theta,\ \sin\frac{\pi}{2}\theta\right),\quad \Psi(0) = \frac{8}{\pi^2+4}\begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение на многообразии примет вид (6), где $F(t, \Phi u + z_t, \varepsilon) = \varepsilon\,[u_2 - z(t-1)] + (\pi/2 + \varepsilon)\,[u_2 - z(t-1)]\,[u_1 + z(t)] + \cos \pi t\,[u_1 + z(t)]^3$. Использовав (17), найдем первое приближение функции $g(t, u, 0)$. Оставляя только члены второго порядка, получаем

$$g_1(u) = (\pi/4) \int_{-\infty}^{0} T(-s)\, X_0^Q\,[(u_2^2 - u_1^2)\sin \pi s + 2u_1u_2 \cos \pi s]\, ds =$$

$$= i\pi\,(u_2^2 - u_1^2)\,[(-i\pi - A)^{-1} X_0^Q - (i\pi - A)^{-1} X_0^Q]/8 +$$

$$+ \pi u_1 u_2\,[(-i\pi - A)^{-1} X_0^Q + (i\pi - A)^{-1} X_0^Q]/4. \tag{26}$$

Выполняется равенство

$$(i\omega - A)^{-1} X_0^P = \Phi \begin{pmatrix} i\omega & -\pi/2 \\ \pi/2 & i\omega \end{pmatrix}^{-1} \Psi(0) = \frac{-8\Phi}{3\pi^2(\pi^2+4)}\begin{pmatrix} \pi^2 + 4i\omega \\ 2i\omega\pi - 2\pi \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $\omega = \pm\pi$. Вычислим $\varphi = (i\omega - A)^{-1} X_0$. Для этого нужно решить систему $i\omega\varphi(\theta) - \varphi(\theta) = 0$, $-1 \leqslant \theta < 0$, $i\omega\varphi(0) + 0{,}5\pi\varphi(-1) = 1$. Решение этой системы имеет вид

$$\varphi(\theta) = e^{i\omega\theta}/(i\omega + 0{,}5\pi e^{-i\omega}). \tag{28}$$

Учитывая, что $X_0^Q = X_0 - X_0^P$ и подставляя (27) и (28) в (26), получаем $g_1(u)\big|_{\theta=-1} = k(u_2^2 - u_1^2) + lu_1u_2$, $g_1(u)\big|_{\theta=0} = m(u_2^2 - u_1^2) - ku_1u_2$, где $k = 1/5 - 4\pi/(3\pi^2 + 12)$, $l = 1/5 + 8/(3\pi^2 + 12)$, $m = 8/(3\pi^2 + 12) - 1/5$.

Если в уравнении на многообразии отбросить члены четвертого порядка и выше, то получим уравнение

$$du/dt = \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 + 8\varepsilon/(\pi^2+4) \\ -\pi/2 & 4\pi\varepsilon/(\pi^2+4) \end{pmatrix} u + \frac{2\pi}{\pi^2+4}\begin{pmatrix} 2 \\ \pi \end{pmatrix} [u_1u_2 + ku_1^3 -$$

$$- (m + l)\, u_1^2 u_2 - 2ku_1u_2^2 + mu_2^3 + (2/\pi)\, u_1^3 \cos \pi t].$$

Уравнение (25) имеет при малом положительном ε инвариантный тор. Решения уравнения (25), принадлежащие инвариантному тору, имеют вид $x(t) = (40\varepsilon/(3\pi - 2))^{1/2} \cos \psi(t) + O(\varepsilon)$, где $\psi(t) = c + \pi t/2 + 2\varepsilon t/(3\pi - 2)$, c — произвольная постоянная.

Замечание 2. Для автономных дифференциально-функциональных уравнений аналогичные вопросы рассматривались в [10, 11].

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.
2. *Фодчук В. И.* Интегральные многообразия для нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн.—1969.— **21**, № 5.— С. 627—639

3. *Фодчук В. И., Клевчук И. И.* Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений // Там же.— 1982.— **34**, № 3.— С. 334—340.
4. *Chow S. N., Hale J. K.* Methods of bifurcation theory.— Berlin : Springer, 1982.— 515 p.
5. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.— 300 с.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М.: Наука, 1966.— 530 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 503 с.
8. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1977.— 304 с.
9. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 304 с.
10. *Chow S. N., Mallet-Paret J.* Integral averaging and bifurcation // J. Different. Equat.— 1977.— **26**, N 1.— P. 112—159.
11. *Колесов Ю. С.* Амплитудный метод построения многочастотных колебаний нелинейных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения.— 1981.— **17**, № 9.— С. 1596—1602.

Черновиц. ун-т

Получено 02.04.85