УДК 530.145;530.182

А. М. ГАВРИЛИК, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т теорет. физики АН Украины, Киев)

Геометрия в нелинейных квантовополевых моделях на многообразиях Штифеля и бифуркации ассоциированных автономных систем

На основе найденных геометрических характеристик многообразий Штифеля $V_{N,k} = SO(N)/SO(N-k)$ получены двухпетлевые (матричная и пара скалярных) бета-функции ренормализационной группы (РГ) и динамическая система, описывающие РГ-эволюцию эффективного взаимодействия в нелинейных сигма-моделях на таких многообразиях. Показано, что в данной динамической системе при определенных значениях параметров наблюдаются бифуркации положений равновесия седло-узельного типа.

На основі знайдених геометричних характеристик многовидів Штіфеля $V_{N,k} = SO(N)/SO(N-k)$ одержано двопетльові (матричну і пару скалярних) бета-функції ренормалізаційної групи (РГ) та динамічну систему, які описують РГ-еволюцію ефективної взаємодії в нелінійних сігма-моделях на таких многовидах. Показано, що в даній динамічній системі при цілком певних значеннях параметрів спостерігаються біфуркації положень рівноваги сідло-вузольного типу.

1. Анализ динамических уравнений (систем), связанных с уравнениями движения классических неабелевых калибровочных полей, показывает их нетривиальное поведение в фазовом пространстве. Как известно, наличие статических источников достаточной интенсивности приводит к решению, претерпевающему бифуркацию [1]. Движение неабелевых полей стохастично [2, 3], однако стохастичность устранима, если добавить поле Хиггса: при условии, что параметр, характеризующий систему «Янг — Миллс — Хиггс», достигает своего критического значения, обнаруживается переход [4] от хаоса к регулярному поведению. Вопрос о соответствующих свойствах квантовых полей Янга — Миллса — Хиггса остается открытым (специфические черты, появляющиеся у квантовомеханического аналога системы Матиняна — Саввиди, рассматривались в работе [5]).

Двумерные ($d = 2$) нелинейные сигма-модели считаются в определенном смысле аналогами неабелевых калибровочных $d = 4$ теорий, прежде всего, благодаря существованию, и в том и другом случае, локализованных (инстантонных) классических решений [6—8] и, при квантовом рассмотрении, наличию свойства асимптотической свободы (стремления к нулю эффективной константы связи на малых расстояниях) [9—11]. Ввиду такой аналогии закономерен вопрос: могут ли какие-то из нелинейных сигма-моделей (НЛСМ) проявлять свойства, в той или иной степени подобные результатам работ [1—4]. В настоящей статье будет показано, что явление бифуркации стационарных решений в НЛСМ действительно обнаруживается, если рассматривать (вместо классических полевых уравнений движения) автономную динамическую систему, связанную с РГ-поведением эффективного взаимодействия, точнее, с уравнениями РГ-эволюции (перенормированных) констант связи в одном классе НЛСМ, компоненты поля в которых принимают значения в многообразиях Штифеля $V_{N,k} = SO(N)/SO(N-k)$ (заметим, что последние являются типичными представителями класса несимметрических однородных пространств с приводимым действием подгруппы изотропии).

Ниже будет продемонстрировано, что у динамической системы, получаемой для таких моделей, возможны два различных типа бифуркаций. Хотя в обоих случаях бифуркационному значению параметра отвечает наличие одного сложного двухкратного положения равновесия «седло-узел», различие состоит в мере потери устойчивости — полной либо частичной — при малых изменениях параметра около его бифуркационного значения. В первом случае бифуркационная картина включает в себя все три стадии: от наличия двух грубых (устойчивый узел и седло) положений равновесия изменение параметра ведет через двухкратное равновесное состояние «седло-узел» к полному отсутствию особых траекторий — положений равновесия. Во втором случае имеется лишь две стадии: сложная стационарная (седло-узельная) точка, либо разделившиеся устойчивый узел и седло.

Статья построена следующим образом. В п. 2 представлены те динамические системы, бифуркационные свойства которых будут составлять предмет изучения в пп. 7, 8. В п. 3 приведены самые необходимые сведения о нелинейных сигма-моделях и их ренормгрупповых бета-функциях. Пп. 4—6 посвящены нахождению геометрических характеристик вещественных многообразий Штифеля; выводимым на основе этих характеристик матричной и скалярной бета-функциям ренормгруппы для НЛСМ на таких многообразиях; получению интересующей нас динамической системы, зависящей от двух параметров. В п. 9 сформулированы краткие выводы.

2. Будем рассматривать в плоскости $\mathbb{R}^2$ нелинейную динамическую систему

$$\dot{x} = \lambda y + (\varkappa - 2\mu)\, xy + \mu x^2 y,$$
$$\dot{y} = \varepsilon y + (\varkappa - 2\mu)\, y^2 + \left(\lambda + \frac{1}{2}\varkappa\right) xy^2, \tag{1}$$

где λ, $\mu \in \mathbb{R}$, точка сверху обозначает дифференцирование по эволюционной переменной τ $(0 < \tau < \infty)$, а ε — некоторое фиксированное число, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. В дальнейшем, если не оговорено особо, полагаем $\varkappa = +1$. Система (1) представляет собой автономную динамическую систему с двумя «управляющими» параметрами λ и μ. Нас будут интересовать такие аспекты ее качественного поведения, как существование положений равновесия, их устойчивость и связанные с изменением параметров качественные перестройки: смена режимов устойчивости, бифуркации. Система (1) нами выбрана не случайно — она связана с определенным классом нелинейных квантовополевых моделей. Действительно, если ограничиться дискретными значениями параметров, положив $\mu = (N-1)/2$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda = (k-2)/2$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то после отождествления $\tau \leftrightarrow \ln \Lambda$ $(\Lambda > 1)$, $x \leftrightarrow \eta$, $y \leftrightarrow t$ и при $\varkappa = 1$ система (1) переходит в динамическую систему

$$\Lambda dt/\mathrm{d}\Lambda = \varepsilon t - \left(N - 2 - \frac{k-1}{2}\eta\right) t^2, \tag{2а}$$

$$\Lambda d\eta/\mathrm{d}\Lambda = \frac{t}{2}\,[k - 2 - (2N-4)\,\eta + (N-1)\,\eta^2]. \tag{2б}$$

Последняя система возникает, как будет видно из результатов п. 6, при описании поведения относительно преобразований из РГ эффективных констант самовзаимодействия t, η в одном классе (перенормированных) НЛСМ, а именно: моделей с полями, заданными в квазидвумерном пространстве-времени $(d = 2 + \varepsilon)$ и принимающими значения в многообразиях $V_{N,k}$. Напомним некоторые сведения о перенормируемых НЛСМ (заметим, что топологические и некоторые другие классические аспекты различных НЛСМ довольно подробно освещены в обзоре [8]).

3. НЛСМ — это такие модели многокомпонентных скалярных полей, нелинейность самовзаимодействия (и уравнений движения) которых обусловлена наложением геометрической связи: полагается, что компоненты поля $\varphi^\alpha(x)$ принимают значения в римановом многообразии M с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}(\varphi)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \dim M$. Важный класс составляют модели с $M = G/H$, где G/H есть однородное пространство (ОП) полупростой группы Ли G по ее замкнутой компактной подгруппе Ли H, при этом допустимые $g(\varphi)$ лежат в классе $\mathcal{M}_{G/H}$ G-инвариантных римановых метрик на G/H.

Перенормируемость (в рамках метода размерной регуляризации, когда $\{d = 2\} \to \{d = 2 + \varepsilon\}$, и схемы минимального вычитания), а также поведение относительно РГ общих (M, g)-НЛСМ с функционалом действия

$$S = (2t)^{-1} \tilde{\Lambda}^{\varepsilon} \int d^d x g_{\alpha\beta}(\varphi)\, \partial_\mu \varphi^\alpha(x)\, \partial_\mu \varphi^\beta(x), \tag{3}$$

где роль (набора) констант связи играет $t^{-1}g_{\alpha\beta}$, а Λ^{-1}— обрезающий фактор на малых расстояниях, исследовались в работах [12, 13] и др. Перенормируемость НЛСМ носит обобщенный характер: модели ренормируемы в пространстве $\mathcal{M}_{G/H}$, и любое преобразование из РГ переводит метрику $g \in \mathcal{M}_{G/H}$ в некоторую другую метрику $\widetilde{g} \in \mathcal{M}_{G/H}$, т. е. РГ параметризует семейства инвариантных метрик. Инфинитезимально РГ-поведение описывается обобщенной (матричной) бета-функцией, имеющей в двухпетлевом приближении вид [12, 13]

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda}(t^{-1}g_{\alpha\beta}) \equiv \beta_{\alpha\beta}(t^{-1}g_{\alpha\beta}) = \varepsilon t^{-1}g_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} t R_{\alpha\gamma\delta\rho}R_{\beta}^{\gamma\delta\rho} + O(t^2) \quad (4)$$

(плюс начальное условие $t^{-1}g_{\alpha\beta}|_{\Lambda=\Lambda_0} = (t^{-1}g_{\alpha\beta})_0$). Из (4) видно, что РГ свойства НЛСМ на M зависят всецело от геометрии (метрики, тензоров кривизны Римана, Риччи) данного M.

4. В качестве M возьмем вещественные многообразия Штифеля, реализуемые [14, 15] как ОП ортогональных групп,

$$V_{N,k} = SO(N)/SO(N-k), \; 1 \leqslant k < N. \quad (5)$$

В двух вырожденных случаях $k = 1$ и $k = N - 1$ они совпадают со сферами и групповыми многообразиями соответственно:

$$V_{N,1} = S^{N-1}, \quad V_{N,N-1} = SO(N). \quad (6)$$

Аналогично, кватернионные многообразия Штифеля реализуются факторизацией симплектических групп по их канонически вложенным подгруппам

$$HV_{N,k} = Sp(N)/Sp(N-k), \quad 1 \leqslant k < N; \qquad HV_{N,1} = S^{4N-1}. \quad (7)$$

Геометрия многообразий (5) ввиду их однородности целиком определяется свойствами касательного пространства T_e в точке, отвечающей классу смежности $\{e \cdot SO(N-k)\}$, а T_e отождествляется с линейным пространством $\mathfrak{m}$ в разложении алгебры Ли $so(N) = so(N-k) + \mathfrak{m}$ (заметим, что $\mathfrak{m}$ содержит в качестве подпространства подалгебру Ли, изоморфную $so(k)$: $: \mathfrak{m} = so(k) + \widetilde{\mathfrak{m}}$ $(\dim \widetilde{\mathfrak{m}} = k(N-k))$. Описание базиса $\{Z_A\}$, $A = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \dim \mathfrak{m} = k(N-k) + n$, где $n \equiv k(k-1)/2$, для многообразий (5) и коммутационные соотношения между базисными элементами можно найти в [16]. Тензор римановой метрики ОП G/H строится по форме Киллинга $B(,)$ группы G стандартным образом [17] путем ее сужения на $\mathfrak{m}$, и в рассматриваемом случае равен

$$g^0_{AB} = g(Z_A, Z_B) = -(2N-4)^{-1}B(Z_A, Z_B) = \delta_{AB}. \quad (8)$$

Всюду ниже индексы считаем принимающими значения

$$1 \leqslant a, b, c, d \leqslant n; \qquad n+1 \leqslant p, q, r, s \leqslant \dim \mathfrak{m}; \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant N-k;$$
$$0 \leqslant \nu, \rho \leqslant k-1. \quad (9)$$

Для любой пары независимых элементов $Y, Z \in T_e$ величина $k(Y, Z) \equiv$ $\equiv g(R(Y, Z)Z, Y)$ определяет соответствующую секционную кривизну $K(Y, Z) \overset{\text{def}}{=} k(Y, Z)/\{\|Y\|^2\|Z\|^2 - g(Y, Z)^2\}$. На основе известной формулы для вычисления секционных кривизн ОП [17],

$$K(Y, Z) = \left\{\frac{1}{4} g([Y, Z]_{\mathfrak{m}}, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}) + g([Y, Z]_{\text{н}}, [Y, Z]_{\text{н}})\right\}/\{\|Y\|^2\|Z\|^2 - g(Y, Z)^2\}, \quad (10)$$

можно найти все значения $K(Z_A, Z_B)$ для многообразий Штифеля.

Предложение 1. *Секционные кривизны, отвечающие парам элементов базиса* $\{Z_A\}$ *для многообразий* (5) *с метрикой* (8), *принимают следую-*

щие значения: для всех пар $i \neq j$ и всех ν из (9) *имеем*

$$K(Z_{n+\nu(N-k)+i}, Z_{n+\nu(N-k)+j}) = 1; \tag{11}$$

для всех пар $\nu \neq \rho$ и всех j из (9) —

$$K(Z_{n+\nu(N-k)+j}, Z_{n+\rho(N-k)+j}) = \frac{1}{4}; \tag{12}$$

для всех a, b, p из (9) *таких, что* $[Z_a, Z_b] \neq 0$, $[Z_a, Z_p] \neq 0$, —

$$K(Z_a, Z_b) = \frac{1}{4}, \quad K(Z_a, Z_p) = \frac{1}{4}. \tag{13}$$

Для всех остальных пар элементов Z_A, Z_B секционные кривизны равны нулю.

Предложение 2. *Пусть все четыре индекса A, B, C, D различны. Тогда компоненты тензора Римана (КТР) для* (5) *вместе с* (8) *находятся по формуле*

$$g(R(Z_A, Z_B)Z_C, Z_D) = \frac{1}{6}\{k(Z_A + Z_D, Z_B + Z_C) - k(Z_A + Z_C, Z_B + Z_D) +$$

$$+ k(Z_A, Z_D) + k(Z_B, Z_C) - k(Z_A, Z_C) - k(Z_B, Z_D)\}. \tag{14}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться общей формулой, выражающей* КТР произвольного риманова многообразия через его величины $k(,)$ и учесть свойство «аддитивности» $k(Z_A + Z_B, Z_C) = k(Z_A, Z_C) + k(Z_B, Z_C)$, характерное [16] для (5), (8).

Можно показать, что у (5) вместе с (8) ненулевыми могут быть только КТР вида R_{ABAB} (а они тождественны секционным кривизнам $K(Z_A, Z_B)$ и поэтому описываются предложением 1) и КТР с полностью несовпадающими значениями индексов, т. е. находимые по формуле (14).

Предложение 3. *Пусть $a < b < c < d$, $p < q < r < s$, $[Z_a, Z_b] \neq 0$. Тогда для КТР многообразий* (5) *имеем значения*

$$R_{abcd} = R_{acbd} = -\frac{1}{4}, \quad R_{adcb} = 0; \qquad R_{pqrs} = -\frac{3}{4}, \quad R_{prqs} = -\frac{1}{2},$$

$$R_{psqr} = \frac{1}{4}; \qquad R_{abpq} = R_{apbq} = \frac{1}{4}, \quad R_{aqbp} = 0. \tag{15}$$

Все остальные КТР либо сводятся к (11) — (13), *либо получаются из КТР* (15) *и* (11) — (13) *с помощью соотношений (анти)симметрии $R_{ABCD} = -R_{BACD} = -R_{ABDC} = R_{CDAB}$; в противном случае они равны нулю.*

Важными характеристиками геометрии многообразий (5) являются также тензор Риччи $R_{AB} = \sum_D R^D_{ADB}$ и трехиндексная свертка произведения КТР $(RR)_{AB} \equiv R_{ACDE}R_B^{CDE}$. Непосредственным вычислением доказывается следующее предложение.

Предложение 4. *Тензор Риччи и свертка $(RR)_{AB}$ многообразий* (5) *имеют компоненты*

$$R_{ab} = \frac{1}{2}(N-2)\delta_{ab}, \quad R_{pq} = \left(N - 2 - \frac{k-1}{2}\right)\delta_{pq}, \quad R_{aq} = R_{pb} = 0; \tag{16}$$

$$(RR)_{ab} = \frac{1}{4}\{N - 2 + (k-2)(2N-k-3)\}\delta_{ab}, \quad (RR)_{pq} = \frac{1}{4}\{N + k(7N -$$

$$- 6k - 10)\}\delta_{pq}, \quad (RR)_{ap} = (RR)_{qb} = 0. \tag{17}$$

---

* Вывод этой формулы можно найти в [18]. Заметим лишь, что ее правая часть содержит 14 слагаемых.

5. С учетом приведенных выше геометрических характеристик на основе выражения (4) находим двухпетлевую матричную бета-функцию двумерных ($\varepsilon = 0$) сигма-моделей на многообразиях (5) со стандартной метрикой (8)

$$\beta_{ab}(t^{-1}g^0) = \frac{1}{2}\left\{N - 2 + \frac{1}{4}t[N - 2 + (k-2)(2N - k - 3)]\right\}\delta_{ab}, \quad (18)$$

$$\beta_{pq}(t^{-1}g^0) = \left\{N - 2 - \frac{k-1}{2} + \frac{1}{8}t[N + k(7N - 6k - 10]\right\}\delta_{pq},$$

$$\beta_{ap} = \beta_{qb} = 0. \quad (19)$$

Поскольку β_{AB} действует на пространстве метрик $\mathcal{M}_{V_{N,k}}$ (точнее, метрических тензоров) как градиент [12], из соотношений (18), (19) вытекает: инфинитезимальное преобразование РГ (не говоря о конечных) любую изотропную (гомотетичную (8)) метрику с неизбежностью переводит в неизотропную. Это указывает на необходимость введения семейства $SO(N)$-инвариантных метрик, гомотетичных метрикам с анизотропией [19]

$$t^{-1}g(\eta) = t^{-1}\,\mathrm{diag}\,(\underbrace{\eta, \eta, \ldots, \eta}_{k(k-1)/2}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k(N-k)}). \quad (20)$$

Непротиворечивость формул (18), (19) требует, чтобы из них вытекали при $k = 1$ и $k = N - 1$, ввиду (6), ранее известные двухпетлевые выражения для бета-функций $d = 2$ НЛСМ на сферах S^{N-1} и на групповых многообразиях, которые сводятся к одной лишь гомотетической зависимости, именно (см. [20—22]; $\beta(t) \equiv dt/d\ln\Lambda$):

$$\beta(t; S^{N-1}) = -(N-2)t^2 - (N-2)t^3 + O(t^4), \quad (21)$$

$$\beta(t; SO(N) = -\frac{1}{2}(N-2)t^2 - \frac{1}{8}(N-2)^2t^3 + O(t^4). \quad (22)$$

Необходимо сделать переход от матричной (18), (19) к паре обычных (скалярных) бета-функций (см. (20))

$$\beta_t(\eta, t) = \Lambda dt/d\Lambda, \quad \beta_\eta(\eta, t) = \Lambda d\eta/d\Lambda. \quad (23)$$

Предложение 5. *Двумерные НЛСМ на многообразиях* (5) *с* (8) *обладают такой парой двухпетлевых бета-функций*

$$\beta_t(\eta = 1, t; V_{N,k}) = -\left(N - 2 - \frac{k-1}{2}\right)t^2 - \frac{1}{8}[N + k(7N - 6k - 10)]t^3 + O(t^4), \quad (24)$$

$$\beta_\eta(\eta = 1, t; V_{N,k}) = -\frac{1}{2}(N - k - 1)t - \frac{1}{8}(N - k - 1) \times (5k + 4)t^2 + O(t^3). \quad (25)$$

Последние формулы содержат выражения (21) *и* (22) *в качестве специальных случаев* $k = 1$ *и* $k = N - 1$.

Вывод (24), (25) проводится непосредственно. Далее, из (24) при $k = 1$ следует (21) очевидным образом, а вторая бета-функция (25), как это видно из (20), в данном случае вообще отсутствует. Если теперь положить $k = N - 1$, то соотношение (25) указывает на инвариантность класса НЛСМ с изотропными ($\eta = 1$) метриками групповых многообразий $SO(N)$ относительно РГ: $\beta_\eta(\eta = 1, t; V_{N,N-1}) = 0$. Переопределив гомотетическую константу связи, $t \to \tilde{t} = t/2$, из формулы (24) получим (22).

Отметим, что вытекающее из (24), (25) соотношение

$$(dt/d\eta)\,|_{\eta=1} = 2t\left\{N - 2 - \frac{k-1}{2} + \frac{t}{8}\,[N + k\,(7N - 6k - 10)]\right\} \times$$
$$\times\,(N - k - 1)^{-1}\left[1 + \frac{t}{4}\,(5k + 4)\right]^{-1} \tag{26}$$

характеризует зависимость угла наклона РГ-траекторий (в точках их пересечения с прямой $\eta = 1$) от гомотетической эффективной константы связи. Видно, что при любых $t > 0$, $N > 3$ и k таких, что $1 < k < N - 1$, имеем $(dt/d\eta)/_{\eta=1} > 0$.

6. Секционные кривизны и тензор Риччи многообразий Штифеля, содержащиеся в предложениях 1 и 4, отвечают изотропной метрике (8). Аналогичные геометрические характеристики могут быть найдены и для анизотропных метрик $g\,(\eta)$, $\eta \neq 1$, из (20). В результате для тензора Риччи имеем компоненты $R_{ab} = \frac{1}{2}\,(k - 2 + \eta^2\,(N - k))\,\delta_{ab}$, $R_{pq} = \left[N - 2 - \frac{1}{2}\,(k - 1)\,\eta\right]\delta_{pq}$, $R_{ap} = R_{bq} = 0$. С учетом последних выражений из формулы (4) получается (однопетлевая) матричная бета-функция, а из последней, аналогично предыдущему, вытекает пара скалярных бета-функций, что мы и подытожим в следующем предложении.

Предложение 6. *Ренормгрупповая эволюция квазидвумерных* ($\varepsilon > 0$) *НЛСМ на многообразиях Штифеля* (5) *описывается в однопетлевом приближении парой дифференциальных уравнений* (*с ренормгрупповыми бета-функциями*) *

$$\beta_t\,(\eta, t; V_{N,k}) = \varepsilon t - t^2\left(N - 2 - \frac{k-1}{2}\,\eta\right) + O\,(t^3), \tag{27}$$

$$\beta_\eta\,(\eta, t; V_{N,k}) = t\left[\frac{1}{2}\,(N - 1)\,\eta^2 - (N - 2)\,\eta + (k - 2)/2\right] + O\,(t^2). \tag{28}$$

Данные соотношения ввиду определения бета-функций (23) *совпадают с динамической системой* (2).

Замечание 1. Помимо случаев (6), можно рассмотреть частный случай формул (27), (28). Как известно [14], вещественные многообразия Штифеля являют собой главные расслоения $V_{N,k} = P\,(B,\ SO\,(k))$ с вещественными грассмановыми многообразиями $B = Gr_{N,k} = SO\,(N)/SO\,(N - k) \times SO\,(k)$ в качестве базы и слоем $SO\,(k)$. Значению $\eta = 0$ в соотношении (20) отвечает вырожденная метрика на многообразиях (5), которая, однако, становится невырожденной после сужения с $\mathfrak{m}$ на линейное подпространство $\tilde{\mathfrak{m}}$ (последнее реализует касательное пространство к базе — грассманиану — в точке, отвечающей классу смежности, характеризуемому единицей группы $SO\,(N)$). Так как инвариантная риманова метрика на любом неприводимом симметрическом ОП (и на грассманиане в том числе) единственна с точностью до гомотетий (и пропорциональна стандартной изотропной метрике), то анизотропия и ее бета-функция (28) при $\eta = 0$ отсутствуют, а формула (27) дает в этом случае выражение, совпадающее с однопетлевым вкладом в известной [22, 24] бета-функции НЛСМ на вещественных грассманианах.

Замечание 2. Динамическая система (1) и содержащаяся в ней при дискретных значениях параметров система (2) отвечают простейшему (т. е. однопетлевому) приближению скалярных бета-функций. Совершенно аналогично (1), (2), динамические системы могут быть выведены также и на основе двухпетлевого приближения бета-функций с произвольным η для сигма-моделей на многообразиях Штифеля. Очевидно, степень нелинейности таких систем повысится за счет появления в правых частях уравнений слагаемых порядка более высокого, чем кубический.

* См. также [23], где рассматриваются двумерные НЛСМ на вещественных штифелевых многообразиях.

7. Перейдем к анализу систем (1) и (2). Нетрудно видеть, что при значении параметра $\lambda = -1/2$ переменные в (1) разделяются и система легко интегрируется. Однако, с точки зрения системы (2) этот случай малоинтересен, так как он отвечает частному значению $k = 1$ и вырождению системы (см. (6) и предложение 5) в одно дифференциальное уравнение. Второй случай разделения переменных в системах (1), (2) (и интегрируемости последних) возникает при $\varepsilon = 0$. Это означает, что траектории в плоскости могут быть описаны аналитически: например, для системы (2) при $k = 2$ траектории определяются формулой [23]

$$\frac{t}{t_0} = \frac{\eta}{\eta_0} [(\eta_0 - \tilde{\eta})/(\eta - \tilde{\eta})]^{(N-2)/(N-1)}, \tag{29}$$

где $\tilde{\eta} \equiv (2N - 4)/(N - 1)$, а начальные значения η_0, t_0 отвечают некоторому начальному Λ_0. Помимо траекторий, описываемых согласно (29), имеется также одна (не считая точек оси абсцисс) особая траектория — сепаратриса $\eta = \tilde{\eta}$. Заметим, что с точки зрения нетривиальности качественной структуры фазовой плоскости и возможности бифуркационного поведения интерес для нас представляет общий случай систем (1), (2) при $\lambda \neq -\dfrac{1}{2}$ $(k \neq 1)$ и $\varepsilon > 0$.

Каждая точка оси абсцисс является положением равновесия для системы (1) ввиду наличия в правых частях обоих уравнений общего множителя y, причем в любой такой точке система пребывает «бесконечно долго». По этой причине будем рассматривать динамическую систему (1) в плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, из которой исключена прямая $y = 0$.

Анализ системы (1) начнем не с общего случая, а с приведенного, более простого. Положим, для примера, $\lambda = \mu - 3/2$, и рассмотрим случай однопараметрического семейства динамических систем

$$\begin{gathered} \dot{x} = \left(\mu - \frac{3}{2}\right) y + (1 - 2\mu) xy + \mu x^2 y \equiv P(x, y; \mu), \\ \dot{y} = \varepsilon y + (1 - 2\mu) y^2 + (\mu - 1) xy^2 \equiv Q(x, y; \mu). \end{gathered} \tag{30}$$

Будем использовать терминологию, а также некоторые результаты и методы, изложенные в [25, 26].

Предложение 7. *Параметризуемое вещественным параметром* μ $(\mu \neq 0)$ *семейство динамических систем* (30) *обладает следующими особенностями качественной* (*топологической*) *структуры фазовой плоскости.*

A) Динамическая система (30) *при* $\mu = \mu_0 \equiv -1/2$ *обладает только одним состоянием равновесия — сложной равновесной точкой* $D(x_0, y_0)$ *кратности* $m = 2$ *с координатами* $x_0 = 2$, $y_0 = \varepsilon$, *являющейся седло-узлом.*

B) Пусть $\mu = (-1 - \delta)/2$, *где* δ *— малая положительная величина. Тогда при каждом фиксированном значении параметра* $\mu = (-1 - \delta)/2$ *фазовая плоскость динамической системы* (30) *расслаивается на фазовые траектории, среди которых особые траектории, за исключением точек оси* $y = 0$, *отсутствуют* (*нет положений равновесия*).

C) Пусть $\mu = (-1 + \delta)/2$. *Тогда при каждом фиксированном значении параметра* $\mu = (-1 + \delta)/2$ *динамическая система* (30) *имеет два простых* (*грубых*) *положения равновесия* $D_{\pm}(x_{\pm}, y_{\pm})$, *одно из которых есть устойчивый узел, а другое — седло.*

Докажем сначала утверждение A). Положим $\mu = -1/2$ в (30). Точка $D(2, \varepsilon)$ является положением равновесия, так как $P(2, \varepsilon; -1/2) = Q(2, \varepsilon; -1/2) = 0$. После замены переменных $x = 2 + u$, $y = \varepsilon + v$ особая точка оказывается в начале координат, а система (30) переходит в систему

$$\begin{gathered} \dot{u} = R(u, v) \equiv -\frac{1}{2} u^2 v - \frac{1}{2} \varepsilon u^2, \\ \dot{v} = S(u, v) \equiv -\frac{3}{2} \varepsilon^2 u - \varepsilon v - 3\varepsilon uv - v^2 - \frac{3}{2} uv^2. \end{gathered} \tag{31}$$

Из того, что $\Delta(0,0) \equiv \begin{vmatrix} R'_u(0,0) & R'_v(0,0) \\ S'_u(0,0) & S'_v(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\varepsilon^2 & -\varepsilon \end{vmatrix} = 0$, $\sigma \equiv$

$\equiv R'_u(0,0) + S'_v(0,0) = -\frac{3}{2}\varepsilon^2 < 0$, следует, что точка $D(2, \varepsilon)$ сложное состояние равновесия (один из характеристических корней равен нулю) [26]. Сделав замену переменных, $u \to u$, $v \to -\frac{3}{2}\varepsilon u + w$, приводим рассматриваемую систему к виду

$$\dot{u} = \widetilde{R}(u, w) \equiv \frac{1}{2} u^2 \left(-\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon u - w\right),$$

$$\dot{w} = bw + \widetilde{S}(u, w) \equiv bw - 3\varepsilon u \left(w - \frac{3}{2}\varepsilon u\right) - \left(1 + \frac{3}{2}u\right)\left(w - \frac{3}{2}\varepsilon u\right)^2,$$

где $b = -\varepsilon$, а функции $\widetilde{R}(u, w)$ и $\widetilde{S}(u, w)$ содержат слагаемые не менее, чем второго порядка по u, w. Находя решения $w_\pm(u)$ уравнения $bw + \widetilde{S}(u, w) = 0$ и подставляя их в $\widetilde{R}(u, w)$, убеждаемся в том, что разложение $\widetilde{R}$ по степеням u имеет вид $\widetilde{R}(u, w_\pm(u)) = \Delta_\pm u^m + \ldots$, где $m = 2$ (т. е. наименьшая степень — квадрат), причем оба $\Delta_\pm < 0$. Следовательно, имеем простой двукратный ($m = 2$) седло-узел, узловой сектор которого устойчив, так как $b < 0$. Таким образом, А) доказано. В случае $\mu = (-1 + \delta)/2$ уравнения $P\left(x, y; \frac{1}{2}(\delta - 1)\right) = 0$, $Q\left(x, y; \frac{1}{2}(\delta - 1)\right) = 0$, имеют два решения $D_\pm(x_\pm, y_\pm)$. С помощью линеаризации системы в окрестности каждого из решений находим, что для одного из них $\Delta > 0$, т. е. оба характеристических корня действительны и отрицательны (этому соответствует устойчивый узел), а для другого $\Delta < 0$, т. е. характеристические корни действительны и имеют противоположные знаки (этому отвечает седло). Если же $\mu = (-1 - \delta)/2$, то уравнения $P\left(x, y; -\frac{1}{2}(1 + \delta)\right) = 0$, $Q\left(x, y; -\frac{1}{2}(1 + \delta)\right) = 0$ вещественных решений не имеют.

С л е д с т в и е . *Число $\mu_0 = -1/2$ есть бифуркационное значение параметра для системы* (30). *Бифуркация двукратного состояния равновесия «седло-узел» D (2, ε) происходит следующим образом. При сколь угодно малых изменениях правых частей системы* (30) *с таким значением μ_0, вызываемых малым «шевелением» $\mu_0 \to \mu_0 \pm \tilde{\delta}$, система становится грубой и возможны два случая: либо седло-узел просто исчезает* (*при $\mu_0 \to \mu_0 - \tilde{\delta}$*), *либо седло-узел разделяется на два грубых состояния равновесия — седло и устойчивый узел* (*это происходит при $\mu_0 \to \mu_0 + \tilde{\delta}$*). *Поскольку узел устойчив, он является аттрактором для всех траекторий, проходящих в его окрестности, а седло-узельное положение равновесия известно как полуаттрактор, притягивающий траектории лишь в одном, левом либо правом секторе. На основании этого делаем вывод, что качественная* (*топологическая*) *структура динамических систем* (30) *при $\mu = -1/2$, $\mu = (-1 - \delta)/2$ и $\mu = (-1 + \delta)/2$ совершенно различна. При бифуркации происходит скачкообразная качественная перестройка картины расслоения фазовой плоскости на траектории.*

8. Вернемся к общему случаю динамических систем с двумя параметрами λ и μ (1).

П р е д л о ж е н и е 8. *Пусть $|\mu| < \infty$, $|\lambda| < \infty$. Множество бифуркационных значений параметров для системы* (1) *одномерно, является объединением двух непересекающихся подмножеств, и описывается уравнением*

$$\lambda + 1 = \mu + \frac{1}{4\mu} \quad (32)$$

(подмножества — это положительная, $\mu > 0$, и отрицательная, $\mu < 0$, ветви кривой, задаваемой в плоскости λ, μ указанным уравнением). Бифуркация положения равновесия типа «седло-узел» происходит всякий раз при пересечении кривой (32) *в любом из трансверсальных направлений.*

Доказательство данного утверждения вытекает из такого легко доказываемого факта: каждая точка из области $\{\lambda, \mu : \mu > 0, \lambda > \mu + 1/4\mu - 1\} \cup \{\lambda, \mu : \mu < 0, \lambda < \mu + 1/4\mu - 1\}$ задает динамическую систему вида (1), причем у этой системы нет равновесных состояний; каждая точка из области $\{\lambda, \mu : \mu > 0, \lambda < \mu + 1/4\mu - 1\}$ $\{\lambda, \mu : \mu < 0, \lambda > \mu + 1/4\mu - 1\}$ задает динамическую систему вида (1), обладающую двумя грубыми состояниями равновесия — седлом и узлом.

Замечание 3. В предложении 8 исключены из рассмотрения бесконечно удаленные точки плоскости λ, μ, хотя анализ систем (1) (или топологически им эквивалентных), отвечающих таким точкам, также возможен [26]. Например, можно положить в (1) $\lambda = \mu - 1$, и в формулах, определяющих при любом конечном μ пару особых (равновесных) решений системы — седло и узел,— перейти к пределу $\mu \to \pm\infty$. В бесконечности решения сливаются в одно. Понятно, что соответствующая бифуркация является «односторонней»: нельзя указать такое дальнейшее изменение параметра μ, которое приводило бы к полному исчезновению равновесных состояний и (ввиду устойчивости узла) к полной потере устойчивости.

Рассмотрим импликации предложений 7, 8 для динамических систем (2).

Предложение 9. *Из целочисленных N и k динамические системы* (2) *имеют две бифуркационные пары значений: A) $N = 0$, $k = 2$; B) $k = N - q$, $N = \infty$, причем $\frac{q}{N} \underset{N\to\infty}{\to} 0$. В обоих случаях появляется сложное двукратное равновесное состояние седло-узел.* Если $4 < N < \infty$, $2 < k < N - 1$, *то у динамической системы* (2) *имеется два простых положения равновесия — седло и устойчивый узел.*

Отметим, что весьма любопытный случай возникает, если при целочисленных N рассматривать, по крайней мере формально, k не обязательно целые.

Предложение 10. *Пусть $(N - 2) \in \mathbb{Z}_+$. Тогда каждая пара значений $(N, k(N))$, определяет бифуркационную динамическую систему вида* (2) *при условии, что $k(N) = N - 1 + 1/(N - 1)$. Координаты N-го положения равновесия из серии $Q_N(\eta_N, t_N)$ (оно является седло-узлом) определяются формулами*

$$\eta_N = 1 - (N - 1)^{-1}, \quad t_N = \varepsilon \left\{ N - 2 - \frac{1}{2}[k(N) - 1]\eta_N \right\}^{-1}. \quad (33)$$

При малых изменениях правых частей уравнений (2), *вызываемых «шевелением» $k(N) \to k(N) \pm \delta$, происходит, в зависимости от знака малой добавки, либо распадение седло-узла на два грубых положения равновесия (узел и седло), либо исчезновение особой траектории.*

9. Геометрические характеристики вещественных штифелевых многообразий (5), вычисленные для изотропной метрики (8) в п. 4, позволили нам выписать относящиеся к этой метрике двухпетлевые выражения для матричной (18), (19) и пары скалярных (24), (25) ренормгрупповых бета-функций НЛСМ на $V_{N,k}$. На основе тензора Риччи многообразий (5) с анизотропными метриками (20) вытекают дифференциальные уравнения (бета-функции) (27), (28), что эквивалентно динамической системе (2). Анализ автономной системы (1), содержащей систему (2) при целочисленных значениях параметров, выявляет характерные особенности качественного поведения: существование особых (грубых либо вырожденных) траекторий, бифуркационные режимы (предложения 7—10), влекущие качественные перестройки фазовых портретов.

Следует заметить, что если попытаться интерпретировать бифуркационные значения (33) из предложения 10 как (двухкратно вырожденные) равновесные значения эффективных констант связи в некоторых НЛСМ, то необходимо, прежде всего, осуществить корректное описание соответствующих необычных геометрических объектов, которые (чисто формально) естественно обозначить символом «фактор-пространств»: $\hat{V}_{N,k(N)} = SO(N)/ /SO(N - k(N)) = SO(N)/SO\left(\frac{N-2}{N-1}\right)$. Такое описание, по-видимому, можно сделать с помощью некоторого класса (ковариантных) функций на $\hat{V}_{N,k(N)}$. Этот вопрос несомненно заслуживает специального исследования.

Всюду выше свойства динамической системы (1) анализировались при зафиксированном значении $\varkappa = +1$. Если же в (1) положить $\varkappa = -1$, то такая динамическая система при целочисленных значениях параметров связана с РГ-эволюцией НЛСМ на кватернионных штифелевых многообразиях (7). Можно показать, что и этим динамическим системам также свойственно бифуркационное поведение при определенных значениях параметров. Кривая бифуркационных значений в плоскости λ, μ описывается в данном («кватернионном») случае уравнением $\mu + 1/4\mu = \lambda - 1$.

1. *Jackiw R.*, *Rossi P.* Stability and bifurcation in Yang-Mills theory // Phys. Rev.— 1980.— **21D**.— P. 426—445.
2. *Матинян С. Г.*, *Саввиди Г. К.*, *Тер-Арутюнян Н. Г.* Классическая механика Янга — Миллса. Нелинейные колебания цвета // Журн. эксперимент. и теорет. физики.— 1981. — 80.— С. 830—838.
3. *Чириков Б. В.*, *Шепелянский Д. Л.* Динамика некоторых однородных моделей классических полей Янга — Миллса // Ядер. физика.— 1982.— **36**.— С. 1563—1576.
4. *Матинян С. Г.*, *Саввиди Г. К.*, *Тер-Арутюнян Н. Г.* Стохастичность классической механики Янга — Миллса и ее устранение механизмом Хиггса // Письма в журн. эксперимент. и теорет. физики.— 1981.— **34**.— С. 613—616.
5. *Медведев Л. В.* Динамическая стохастичность и квантование // Теорет. и мат. физика.— 1989.— **60**.— С. 224—244.
6. *Белавин А. А.*, *Поляков А. М.* Метастабильные состояния двухмерного изотропного ферромагнетика // Письма в журн. эксперимент. и теорет. физики.— 1975.— **22**, № 10.— С. 503—505.
7. *Pseudoparticle* solutions of the Yang - Mills Theory / A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin // Phys. Lett.— 1975.— **59B**, N 1.— P. 85—87.
8. *Переломов А. М.* Решения типа инстантонов в киральных моделях // Успехи физ. наук.— 1981.— **134**, вып. 4.— С. 577—610.
9. *Gross D. J.* *Wilczek F.* Ultraviolet behaviour of Non-Abelian gauge theories // Phys. Rev. Lett. — 1973.— 30.— P. 1343—1346.
10. *Politzer H. D.* Reliable perturbative results for strong interactions? // Phys. Rev. Lett.— 1973.— 30.— P. 1346—1349.
11. *Polyakov A. M.* Interaction of Goldstone particles in two dimensions // Phys. Lett.— 1975.— 59B.— P. 79—81.
12. *Friedan D.* Nonlinear models in $2 + \varepsilon$ dimensions // Phys. Rev. Lett.— 1980.— **45**.— P. 1057—1060.
13. *Alvarez-Gaume L.*, *Friedman D. Z.*, *Mukhi S.* The background field method and the UV structure of σ-models // Ann. Phys.— 1981.— **134**.— P. 85—109.
14. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства.— М. : Мир, 1970.— 442 с.
15. *Дубровин Б. А.*, *Новиков С. П.*, *Фоменко А. Т.* Современная геометрия.— М. : Наука, 1979.— 760 с.
16. *Гаврилик А. М.*, *Теличко Н. В.* Двухпетлевые бета-функции штифелевых сигма-моделей.— Киев, 1989.— 12 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; № 89—56Р).
17. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии : В 2-х т. —М. : Наука, 1981.— Т. 2.— 414 с.
18. *Громол Д.*, *Клингенберг В.*, *Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М. : Мир, 1971.— 343 с.
19. *Sagle A.* Some homogeneous Einstein manifolds // Nagoya Math. J.— 1970.— **39**.—P. 81—106.
20. *Brezin E.*, *Zinn-Justin J.* Spontaneous breakdown of continuous symmetries near two dimensions // Phys. Rev. — 1976.— **14B**.— P. 3110—3120.
21. *McKane A.*, *Stone M.* Nonlinear σ-models: a perturbative approach to symmetry restoration // Nucl. Phys.— 1980.— **163B**.— P. 169—188.
22. *Hikami S.* Three-loop β-functions of nonlinear σ-models on symmetric spaces // Phys. Lett.— 1981.— **98B**.— P. 208—210.
23. *Gavrilik A. M.* Self-interaction anisotropy of Stiefel systems of Goldstonions // Modern Phys. Lett.— 1989.— **4A**.— P. 1783—1788.

24. *Brezin E., Hikami S., Zinn-Justin J.* Generalized nonlinear σ-models with gauge invariance // Nucl. Phys.— 1980.— 165B.— P. 528—544.
25. *Теория* бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер.— М. : Наука, 1967.— 487 с.
26. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М. : Наука, 1976.— 496 с.

Получено 28.06.91