УДК 519.21

Н. Н. Леоненко, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т),
Э. Орзингер, д-р философии (Рим. ун-т, Италия),
К. В. Рыбасов, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. I

We find Gaussian limit distributions of solutions of the multidimensional Bürgers equation with the initial condition given by a Gaussian homogeneous isotropic random field with strong dependence.

Знайдено гауссівські граничні розподіли розв'язків багатовимірного рівняння Бюргерса, у якого початкова умова є гауссівським однорідним ізотропним випадковим полем із сильною залежністю.

1. Введение. Уравнение Бюргерса [1] служит моделью многих физических явлений [2, 3]. Со случайными начальными данными его впервые изучал Розенблатт [4 – 6]. В частности, в [6] изучались предельные распределения интегралов от решений при фиксированной переменной времени, когда промежуток интегрирования стремится к бесконечности. В статьях [7, 8] изучалось предельное поведение на „больших временах" в случае, когда начальное условие представляет собой случайный процесс или поле типа дробового эффекта. В работе [9] доказаны качественные результаты о периодичности случайных решений неоднородного уравнения Бюргерса.

В настоящей работе, состоящей из двух частей, получены многомерные обобщения результатов работы [10], т. е. показано, что конечномерные распределения нормированных решений уравнения Бюргерса сходятся к конечномерным распределениям некоторого гауссовского (ч. I) или негауссовского (ч. II) случайного поля, если начальное условие есть однородное изотропное гауссовское (ч. I) случайное поле или поле типа χ^2 (ч. II) со слабым убыванием корреляции. Отметим, что предельные теоремы для аддитивных функционалов специального вида от случайных процессов и полей со слабым убыванием корреляции изучались в работах [11 – 14] и др.

2. Сходимость к гауссовскому случайному полю. Рассмотрим задачу Коши для n-мерного уравнения Бюргерса

$$\begin{gathered}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}, \vec{\nabla}\right)\vec{u} = \mu\Delta\vec{u}, \\ \vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}) = \vec{\nabla}v(\vec{x}),\end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

— векторное поле, $v(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, — скалярное поле, $\vec{\nabla}$ — градиент, Δ — лаплассиан.

Для потенциальных полей $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla}v(\vec{x}, t)$, где $v(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, — скалярное поле, заменой Куола – Хопфа

$$v(\vec{x}, t) = -2\mu \log z(\vec{x}, t) \tag{2}$$

уравнение Бюргерса (1) сводится к классическому уравнению теплопроводности для $z(\vec{x}, t)$. Если $g(\vec{x}, t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности, то, используя (2), аналогично [2, 3] решение задачи Коши (1) можно представить в виде

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\vec{x}-\vec{y}}{t} g(\vec{x}-\vec{y}, t) \exp\{-v(\vec{y})/2\mu\}\, d\vec{y}}{\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x}-\vec{y}, t) \exp\{-v(\vec{y})/2\mu\}\, d\vec{y}} =$$

$$= \frac{\vec{I}(\vec{x}, t)}{J(\vec{x}, t)} = -2\mu\vec{\nabla} \log J(\vec{x}, t), \tag{3}$$

где

$$g(\vec{x}, t) = (4\pi\mu t)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{|\vec{x}|^2}{4\mu t}\right\}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0.$$

В дальнейшем $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — полное вероятностное пространство.

А. Пусть $\xi(\vec{x}) = \xi(\omega, \vec{x})$, $\omega \in \Omega$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, — измеримое действительное дифференцируемое в среднем квадратическом однородное изотропное гауссовское случайное поле с $M\xi(\vec{x}) = 0$, $M\xi^2(\vec{x}) = 1$ и корреляционной функцией $B(|\vec{x}|) = M\xi(\vec{0})\xi(\vec{x}) \to 0$ монотонно при $|\vec{x}| \to \infty$, причем

$$B(|\vec{x}|) = L(|\vec{x}|)/|\vec{x}|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < n,$$

при $|\vec{x}| \to \infty$, где $L(t)$, $t \in (0, \infty)$, — медленно меняющаяся на бесконечности функция, ограниченная в каждом ограниченном интервале.

Заметим, что при условии А случайное поле $\xi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, имеет сильную зависимость, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} B(|\vec{x}|)\, d\vec{x} = \infty.$$

Рассмотрим задачу Коши (1), в которой начальное условие $v(\vec{x}) = \xi(\vec{x})$, где $\xi(\vec{x})$ удовлетворяет условию А. Будем рассматривать слабую сходимость при $t \to \infty$ нормированных конечномерных случайных полей

$$\vec{u}(\vec{a}\sqrt{t}, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} ((\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y})/t)\, g(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}, t) \exp\{-\xi(\vec{y})/2\mu\}\, d\vec{y}}{\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}, t) \exp\{-\xi(\vec{y})/2\mu\}\, d\vec{y}} = \frac{\vec{I}(\vec{a}\sqrt{t}, t)}{\vec{J}(\vec{a}\sqrt{t}, t)}. \tag{4}$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Замена $\vec{x} = \vec{a}\sqrt{t}$ является естественной из физических соображений. В дальнейшем

$$\varphi_n(\vec{w}) = (2\pi)^{-n/2} \exp\{-|\vec{w}|^2/2\},$$

$\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, — n-мерная гауссовская плотность.

Теорема 1. *Пусть* $\vec{u}(\vec{a}\sqrt{t}, t)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, — *решение задачи Коши* (1) *со случайным начальным условием* $v(\vec{x}) = \xi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющим условию* А. *Тогда конечномерные распределения случайных полей*

$$\vec{X}_t(\vec{a}) = L^{-1/2}(\sqrt{t})\, t^{1/2+\alpha/4}\, \vec{u}(\vec{a}\sqrt{t}, t), \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \ 0 < \alpha < n,$$

слабо сходятся при $t \to \infty$ *к конечномерным распределениям векторного гауссовского случайного поля* $\vec{X}(\vec{a}) = c_1(\mu, \alpha)\vec{Y}(\vec{a})$, *где* $c_1(\mu, \alpha) = (2\mu)^{-1/2-\alpha/4}$, *а* $\vec{Y}(\vec{a})$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, — *векторное гауссовское случайное поле с* $M\vec{Y}(\vec{a}) = \vec{0}$ *и матричнозначной корреляционной функцией*

$$M\vec{Y}(\vec{a})\vec{Y}(\vec{b}) = \left(\int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n} \frac{w_{1i} w_{2j} \varphi_n(\vec{w}_1)\varphi_n(\vec{w}_2)}{\left|\vec{w}_1 - \vec{w}_2 - (\vec{a}-\vec{b})/\sqrt{2\mu}\right|^{\alpha}} d\vec{w}_1 d\vec{w}_2 \right)_{1 \le i,\, j \le n}, \tag{5}$$

где $0 < \alpha < n$, $\vec{w}_k = (w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2$.

***Замечание* 1.** Предельное гауссовское поле в теореме 1 $\vec{Y}(\vec{a})$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, однородно (но не изотропно).

Доказательство теоремы 1 опирается на одно простое утверждение типа леммы Слуцкого. В дальнейшем символом $\xrightarrow{D}$ обозначена слабая сходимость случайных векторов, а символом $\xrightarrow{P}$ — сходимость по вероятности.

Лемма 1. *Пусть* $\{\vec{u}_t\}$ *и* $\{\vec{v}_t\}$ *— семейства случайных векторов из* $\mathbb{R}^n$, $\{w_t\}$ *— семейство случайных величин и* $\vec{u}_t$ *по распределению сходится к* $\vec{u}$ *при* $t \to \infty$, $\vec{v}_t$ *по вероятности сходится к* $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, *где* $c_i = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$, *и* w_t *по вероятности сходится к* $d = \text{const}$. *Тогда при* $t \to \infty$ $\vec{u}_t + \vec{v}_t \xrightarrow{D} \vec{u} + \vec{c}$, $w_t \vec{u}_t \xrightarrow{D} d\vec{u}$ *и, если* $d \neq 0$, *то* $\vec{u}_t / w_t \xrightarrow{D} \vec{u} / d$.

Доказательство леммы 1 опустим, так как оно аналогично одномерному случаю.

***Доказательство** теоремы* 1. Очевидно,

$$M \exp\left\{-\frac{\xi(\vec{y})}{2\mu}\right\} = \exp\left\{\frac{1}{8\mu^2}\right\},$$

$$M \exp\left\{-\frac{\xi(\vec{y}_1) + \xi(\vec{y}_2)}{2\mu}\right\} = \exp\left\{\frac{1 + B\left(|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|\right)}{4\mu^2}\right\}.$$

Цель доказательства — показать, что

$$\begin{gathered} L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4}\, \vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) \xrightarrow{D} \exp\left\{\frac{1}{8\mu^2}\right\} \vec{X}(\vec{a}), \\ J\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) \xrightarrow{P} \exp\left\{\frac{1}{8\mu^2}\right\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Тогда сходимость одномерных распределений в теореме 1 будет следовать из леммы 1, а сходимость конечномерных распределений можно доказать, используя метод Крамера – Уолда – Сапогова.

Представим $\vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right)$ в следующем виде:

$$\vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) = \vec{I}_1(t) + \vec{I}_2(t), \tag{7}$$

где

$$\vec{I}_1(t) = \int_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}}{t} \frac{\exp\left\{-\left|\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}\right|^2 / 4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\xi(\vec{y})}{2\mu}\right\} d\vec{y},$$

$$\vec{I}_2(t) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}}{t} \frac{\exp\left\{-\left|\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}\right|^2 / 4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\xi(\vec{y})}{2\mu}\right\} d\vec{y}$$

и $\mathbb{D}_t = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| \le r_t\right\}$, $r_t \to +\infty$, $r_t / \sqrt{t} \to +\infty$.

Доказательство основано на разложении функций из гильбертового пространства $L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(u)\,du)$ по полиномам Чебышева – Эрмита $\{H_k(u)\}_{k=0}^{\infty}$, образующих полную ортогональную систему в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(u)\,du)$. Заметим, что

$$H_m(u) = (-1)^m \exp\left\{\frac{u^2}{2}\right\} \frac{d}{du^m}\left(\exp\left\{\frac{-u^2}{2}\right\}\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

В частности, $H_0(u) = 1$, $H_1(u) = u$, $H_2(u) = u^2 - 1$.

Функция $G_1(u) = \exp\left\{-\frac{u}{2\mu}\right\} \in L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(u)\,du)$ имеет разложение

$$G_1(u) = \exp\left\{-\frac{u}{2\mu}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} H_k(u),$$

где

$$C_k = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G_1(u) H_k(u) \varphi(u)\,du, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} < \infty,$$

причем $C_0 = \exp\{1/8\mu^2\}$, $C_1 = (1/2\mu)\exp\{1/8\mu^2\}$.

Отсюда следует, что в $L_2(\Omega)$

$$G_1(\xi(\vec{y})) = \exp\left\{-\frac{\xi(\vec{y})}{2\mu}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} H_k(\xi(\vec{y})),$$

$$\vec{I}_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} \vec{\eta}_k(\vec{a}, t),$$

где

$$\vec{\eta}_k(\vec{a}, t) = \int\limits_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}}{t} \frac{\exp\left\{-\left|\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}\right|^2 / 4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} H_k\left(\xi(\vec{y})\right) d\vec{y}. \tag{8}$$

Корреляционную матрицу $\vec{I}_1(t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{D}\,\vec{I}_1(t) = \Sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} \Sigma_k,$$

где $\Sigma_k = \left[\sigma^2_{k,i,j}(t)\right]_{1 \le i, j \le n}$,

$$\sigma^2_{k,i,j}(t) = \int\limits_{\mathbb{D}_t}\int\limits_{\mathbb{D}_t} \frac{a_i\sqrt{t} - y_{1i}}{t} \frac{a_j\sqrt{t} - y_{2j}}{t} g\left(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}_1, t\right) g\left(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}_2, t\right) \times$$
$$\times B^k(|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|)\,d\vec{y}_1\,d\vec{y}_2. \tag{9}$$

При этом использован известный факт (см., например, [14, с. 55]), что

$$M H_i(\xi(\vec{y}_1)) H_j(\xi(\vec{y}_2)) = i!\,\delta^i_j B^i(|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|), \quad i, j \ge 0,$$

δ^i_j — символ Кронекера.

Используя в (9) замену переменных

$$\frac{\vec{y}_i - \vec{a}\sqrt{t}}{\sqrt{2\mu t}} = \vec{w}_i, \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

получаем

$$\sigma^2_{k,i,j}(t) = \int\limits_{\tilde{\mathbb{D}}_t}\int\limits_{\tilde{\mathbb{D}}_t} \frac{2\mu}{t} w_{1i} w_{2j} \frac{\exp\left\{-|\vec{w}_1|^2 + |\vec{w}_2|^2/2\right\}}{(2\pi)^{n/2}(2\pi)^{n/2}} B^k\left(\sqrt{2\mu t}\,|\vec{w}_1 - \vec{w}_2|\right) d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2,$$

где

$$\tilde{\mathbb{D}}_t = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \left|\vec{x} + \frac{\vec{a}}{\sqrt{2\mu}}\right| \le \frac{r_t}{\sqrt{2\mu}}\right\}, \quad \frac{r_t}{\sqrt{2\mu t}} \to \infty \text{ при } t \to \infty.$$

Из условия А при $0 < \alpha < n/k$ и $t \to \infty$

$$\sigma^2_{k,i,j}(t) \sim \frac{L^k(\sqrt{t})}{t^{1+k\alpha/2}}(2\mu)^{1-k\alpha/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{w_{1i}w_{2j}\,\varphi_n(\vec{w}_1)\varphi_n(\vec{w}_2)}{|\vec{w}_1 - \vec{w}_2|^{k\alpha}}\, d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2 =$$

$$= L(k, \alpha, t)(2\mu)^{1-k\alpha/2} c_2(k, \alpha, \mu), \tag{11}$$

где $L(k, \alpha, t) = L^k(\sqrt{t})\, t^{-1-k\alpha/2}$ и

$$c_2(k, \alpha, \mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{w_{1i}w_{2j}\,\varphi_n(\vec{w}_1)\varphi_n(\vec{w}_2)}{|\vec{w}_1 - \vec{w}_2|^{k\alpha}}\, d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2.$$

Отсюда при $t \to \infty$, $0 < \alpha < n/k$ $\Sigma_k \sim L(k, \alpha, t)A$ и

$$A = (2\mu)^{1-k\alpha/2}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{w_{1i}w_{2j}\,\varphi_n(\vec{w}_1)\varphi_n(\vec{w}_2)}{|\vec{w}_1 - \vec{w}_2|^{k\alpha}}\, d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2\right]_{1 \le i,\, j \le n}$$

Очевидно,

$$\lim_{t\to\infty} M\vec{I}_1(t) = M\vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) = \vec{0}, \quad \lim_{t\to\infty} C_0\vec{\eta}_0(\vec{a}, t) = \vec{0}.$$

Поэтому

$$\vec{I}_1(t) = C_1\vec{\eta}_1(\vec{a}, t) + \vec{R}(t), \tag{12}$$

где

$$\vec{R}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k}{k!}\vec{\eta}_k(\vec{a}, t).$$

Далее, справедливо соотношение

$$\frac{\vec{I}_1(t)}{C_1\sqrt{L(1, \alpha, t)}} = \frac{\vec{\eta}_1(\vec{a}, t)}{\sqrt{L(1, \alpha, t)}} + \frac{\vec{R}(t)}{C_1\sqrt{L(1, \alpha, t)}} = \vec{U}_1(t) + \vec{U}_2(t). \tag{13}$$

Можно показать, что $\vec{U}_2(t) \xrightarrow{P} \vec{0}$ при $t \to \infty$, и из леммы 1 будет следовать, что предельное распределение $\vec{I}_1(t)/C_1\sqrt{L(1, \alpha, t)}$ такое же, как $\vec{\eta}_1(\vec{a}, t)/\sqrt{L(1, \alpha, t)}$. Для этого достаточно показать, что дисперсионная матрица

$$D\left(\frac{\vec{R}(t)}{C_1\sqrt{L(1, \alpha, t)}}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Из условия А следует, что для произвольного положительного ε существует $T_0 > 0$ такое, что из $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| > T_0$ следует $\left|B\left(|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|\right)\right| < \varepsilon$. Пусть

$$\Delta_1 = \{(\bar{y}_1, \bar{y}_2) : |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| \le T_0\}, \quad \Delta_2 = \{(\bar{y}_1, \bar{y}_2) : |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| > T_0\}.$$

Используя неравенство $|B(\cdot)|^2 \le 1$ на множестве Δ_1 и неравенство $|B(\cdot)|^2 \le \varepsilon |B(\cdot)|$ на множестве Δ_2, получаем

$$\left|D\vec{R}(t)\right| = \left|\left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} \sigma_{k,i,j}^2(t)\right]_{1 \le i, j \le n}\right| \le \left|\left[\frac{\sigma_{k,i,j}^2(t)}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!}\right]_{1 \le i, j \le n}\right|.$$

Представим $\sigma_{k,i,j}^2(t)$ в виде

$$\sigma_{k,i,j}^2(t) = \sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t) = \left(\iint\limits_{\substack{\mathbb{D}_t\, \mathbb{D}_t \\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \Delta_1}} + \iint\limits_{\substack{\mathbb{D}_t\, \mathbb{D}_t \\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \Delta_2}} \right) \frac{a_i\sqrt{t} - y_{1i}}{t} \times$$

$$\times \frac{\exp\left\{-\left|a\sqrt{t} - \bar{y}_1\right|^2 / 4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} \frac{\exp\left\{-\left|a\sqrt{t} - \bar{y}_2\right|^2 / 4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} B^2(|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|)\, d\bar{y}_1\, d\bar{y}_2.$$

Далее k_1, k_2 и т. п. — положительные постоянные.

Используя замену переменных (10), нетрудно получить

$$\sigma_1^2(t) = \iint\limits_{\substack{\tilde{\mathbb{D}}_t\, \tilde{\mathbb{D}}_t \\ |\vec{w}_1 - \vec{w}_2| \le T_0/\sqrt{2\mu t}}} \frac{2\mu}{t} w_{1i} w_{2j} \varphi_n(\vec{w}_1) \varphi_n(\vec{w}_2) B^2\left(\sqrt{2\mu t}\, |\vec{w}_1 - \vec{w}_2|\right) d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2 \le$$

$$\le \frac{2\mu}{t} \int\limits_{\left|w_{1i} + \frac{a_i}{\sqrt{2\mu}}\right| < \frac{r_t}{\sqrt{2\mu t}}} \int\limits_{\substack{\left|w_{2j} + \frac{a_j}{\sqrt{2\mu}}\right| < \frac{r_t}{\sqrt{2\mu t}} \\ |w_{1i} - w_{2j}| \le T_0/\sqrt{2\mu t}}} w_{1i} w_{2j} \varphi_1(w_{1i}) \varphi_1(w_{2j})\, dw_{1i}\, dw_{2j} \times$$

$$\times \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi_1(w_{1k})\, dw_{1k} \prod_{\substack{m=1 \\ m \ne j}}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi_1(w_{1m})\, dw_{1m} \le$$

$$\le \frac{K_1}{t} \int\limits_{-\frac{r_t}{\sqrt{2\mu t}} - \frac{a_i}{\sqrt{2\mu}}}^{\frac{r_t}{\sqrt{2\mu t}} - \frac{a_i}{\sqrt{2\mu}}} w \varphi_1(w)\, dw \int\limits_{-\frac{r_t}{\sqrt{2\mu t}} - \frac{a_j}{\sqrt{2\mu}}}^{\frac{r_t}{\sqrt{2\mu t}} - \frac{a_j}{\sqrt{2\mu}}} w \varphi_1(w)\, dw \le$$

$$\le \frac{K_2}{t} \varphi_1\left(\frac{r_t}{\sqrt{2\mu t}} - \frac{a_i}{\sqrt{2\mu}}\right) \varphi_1\left(\frac{r_t}{\sqrt{2\mu t}} - \frac{a_j}{\sqrt{2\mu}}\right) = \frac{K_3}{t}\left(\exp\left\{-\frac{r_t^2}{2\mu t}\right\}\right)^2. \qquad (15)$$

Аналогично

$$\sigma_2^2(t) < \varepsilon \frac{2\mu}{t} \iint\limits_{\substack{\tilde{\mathbb{D}}_t\, \tilde{\mathbb{D}}_t \\ |\vec{w}_1 - \vec{w}_2| \le T_0/\sqrt{2\mu t}}} w_{1i} w_{2j} \varphi_n(\vec{w}_1) \varphi_n(\vec{w}_2) B^2\left(\sqrt{2\mu t}\, |\vec{w}_1 - \vec{w}_2|\right) d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2 \le$$

$$\le \varepsilon \frac{K_4}{t^{1+\alpha/2}} L\left(\sqrt{t}\right). \qquad (16)$$

Из (15) и (16) следует

$$\sigma^2_{2,i,j}(t) \le \frac{K_3}{t} \exp\left\{-\frac{r_t^2}{2\mu t}\right\} + \varepsilon \frac{K_4}{t^{1+\alpha/2}} L\left(\sqrt{t}\right). \tag{17}$$

Разделив (17) на $\sqrt{L(1, \alpha, t)}$, получим

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sigma^2_{2,i,j}(t)}{\sqrt{L(1, \alpha, t)}} = 0,$$

а поэтому выполнено (14) и $\vec{U}_2(t) \xrightarrow{P} 0$ при $t \to \infty$. Тогда из (13) и леммы 1 следует, что предельные распределения

$$\vec{I}_1(t) \,/\, C_1\sqrt{L(1, \alpha, t)} \quad \text{и} \quad \vec{\eta}_1(\vec{a}, t) \,/\, \sqrt{L(1, \alpha, t)}$$

совпадают. Итак, при $t \to \infty$

$$C_1^{-1} L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4} \vec{I}_1(t) \xrightarrow{D} \vec{\eta}_1(\vec{a}, t) L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4}. \tag{18}$$

Рассмотрим $\vec{I}_2(t)$ из (7). Используя неравенство

$$M \exp\left\{-\frac{\xi(\vec{y}_1)+\xi(\vec{y}_2)}{2\mu}\right\} = \exp\left\{\frac{1}{4\mu^2}\left(1 + B\left(\left|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\right|\right)\right)\right\} < \exp\left\{\frac{1}{\mu^2}\right\}$$

для дисперсионной матрицы $\vec{I}_2(t)$ можно получить выражение

$$\mathbf{D}\vec{I}_2(t) = \Sigma^* = \left[\tau^2_{i,j}\right]_{1 \le i,\, j \le n},$$

где

$$\tau^2_{i,j} = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_t} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_t} \frac{a_i\sqrt{t} - y_{1i}}{t} \frac{a_j\sqrt{t} - y_{2j}}{t} \times$$

$$\times \frac{\exp\left\{-\left|a\sqrt{t} - \vec{y}_1\right|^2 / 4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} \frac{\exp\left\{-\left|a\sqrt{t} - \vec{y}_2\right|^2 / 4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} \times$$

$$\times M \exp\left\{-\frac{\xi(\vec{y}_1)+\xi(\vec{y}_2)}{2\mu}\right\} d\vec{y}_1 \, d\vec{y}_2 \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{1}{\mu^2}\right\} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_t} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_t} \frac{K_5}{t} w_{1i} w_{2j} \varphi_1(w_{1i}) \varphi_1(w_{2j}) \, dw_{1i} \, dw_{2j} \le$$

$$\le \frac{K_6}{t} \exp\left\{-\frac{r_t^2}{2\mu t}\right\} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Итак,

$$\mathbf{D}\left(L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4} \vec{I}_2(t)\right) \to \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad t \to \infty,$$

$$L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4} \vec{I}_2(t) \xrightarrow{P} \vec{0}, \quad t \to \infty. \tag{19}$$

Из (18), (19) и леммы 1 получаем

$$\vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4}\, 2\mu \exp\left\{-\frac{1}{8\mu^2}\right\} \xrightarrow[t\to\infty]{D}$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{D} \vec{\eta}_1(\vec{a}, t) L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4}. \tag{20}$$

Аналогично можно получить, что при $t \to \infty$

$$J\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) \xrightarrow{P} \exp\left\{\frac{1}{8\mu^2}\right\}. \tag{21}$$

Из (20), (21) и леммы 1 следует, что при $t \to \infty$

$$L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4}\, \vec{u}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) \xrightarrow{D} \vec{\eta}_1(\vec{a}, t) L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4}.$$

Отсюда следует сходимость одномерных распределений случайных полей из условий теоремы 1, так как случайный вектор

$$\vec{\eta}_1(\vec{a}, t) L^{-1/2}\left(\sqrt{t}\right) t^{1/2+\alpha/4} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t} - y}{t} \frac{\exp\left\{-\left|\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}\right|^2 / 4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} \xi(\vec{y})\, d\vec{y} \left(\sqrt{L(1, \alpha, t)}\right)^{-1}$$

имеет нормальное распределение с нулевым средним и корреляционной матрицей (4). Доказательство сходимости соответствующих конечномерных распределений в теореме 1 просто выводится из сходимости одномерных распределений методом Крамера – Уолда – Сапогова. Мы его опускаем.

1. *Burgers J. M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. – 1948. – P. 171 – 189.
2. *Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсий. – М.: Наука, 1990. – 216 с.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
4. *Rosenblatt M.* Remark on the Burgers equation // J. Math. Phys. – 1968. – **9**. – P. 1129 – 1136.
5. *Rosenblatt M.* Fractional integrals of stationary processes and the central limit theorem // J. Appl. Probab. – 1976. – **13**. – P. 723 – 732.
6. *Rosenblatt M.* Scale normalization and random solutions of the Burgers equation // Ibid. – 1987. – **24**. – P. 328 – 338.
7. *Булинский А. Б., Молчанов С. А.* Асимптотическая гауссовость решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – **36**. – № 2. – С. 217 – 235.
8. *Giraitis L., Molchanow S. A., Surgailis D.* Long memory shot noises and limit theorems with applications to Burger's equations. New direction in time series analysis. Pt II // IMA Volumes Math. and Appl. – 1993.-**46**. – P. 153–171.
9. *Sinai Ya. G.* Two resalts concerning asymptotic behaviour of solutions of the Burgers equations with force // J. Statist. Phys. – 1991. – **64**. – P. 1 – 12.
10. *Leonenko N., Orsingher E.* Limit theorems for solutions of Burgers equation with Gaussian and non-Gaussian initial conditions. – 1991. – 22 p. – (Preprint / Univ. of Rome; 91. 1).
11. *Berman S. M.* High level sojours for strongly dependent Gaussian processes // Z. Wahrscheinlich. Keitstheor. und verw. geb. – 1979. – **50**. – P. 223 – 236.
12. *Dobrushin R. L., Major P.* Non-central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields // Ibid. – 1979. – **50**. – P. 1 – 28.
13. *Taqqu M. S.* Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rang // Ibid. – 1979. – **50** № 1. – P. 55 – 83.
14. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Statistical Analysis of Random Fields. – Dordrecht: Kluwer Aca Publ., 1989. – 224 p.

Получено 20.05.9