УДК 517.925.35

В. М. Евтухов, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

ОБ УСЛОВИЯХ КОЛЕБЛЕМОСТИ И НЕКОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We give sufficient conditions for oscillation and nonoscillation of regular solutions of the second-order differential equation $y'' + p(t)|y|^{1-\lambda}|y'|^{\lambda}\operatorname{sign} y = 0$, where $\lambda < 1$ and $\rho: [a, \omega[\to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < < \omega \le +\infty)$ is a locally integrable function.

Встановлені достатні умови коливності та неколивності правильних розв'язків диференціального рівняння другого порядку $y'' + p(t)|y|^{1-\lambda}|y'|^{\lambda}\operatorname{sign} y = 0$, де $\lambda < 1$ і $\rho: [a, \omega[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, — локально сумовна функція.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + p(t)|y|^{1-\lambda}|y'|^{\lambda}\operatorname{sign} y = 0, \tag{1}$$

где $\lambda < 1$, $-\infty < a \le \omega < +\infty$ и $p: [a, \omega[\to \mathbb{R}$ — локально суммируемая функция такая, что для любого $t \in [a, \omega[$ $\operatorname{mes}\{s \in [t, \omega[: p(s) \ne 0\} > 0$. Это уравнение при $\lambda = 0$ является линейным, а при $\lambda \ne 0$ называется [1, 2] полулинейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Вопрос о колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка к настоящему времени исследован достаточно подробно (см. обзорные статьи Е. Хилла [3], М. Раба [4], Дж. С. В. Уонга [5] и Д. Виллетта [6]).

Для полулинейных дифференциальных уравнений вида (1) известны лишь отдельные результаты, относящиеся к случаю $\omega = +\infty$. Некоторые из них вытекают из теорем Д. Д. Мирзова, установленных в [7, 8] для систем дифференциальных уравнений специального вида, охватывающих уравнения (1). В отличие от линейных уравнений здесь случай $\omega < +\infty$ не может быть сведен с помощью замен переменных к случаю $\omega = +\infty$ и поэтому требует самостоятельного изучения.

В настоящей статье для полулинейного дифференциального уравнения (1) устанавливаются как при $\omega < +\infty$, так и при $\omega = +\infty$ аналоги некоторых известных теорем А. Кнезера, М. Бохера и И. Т. Кигурадзе.

Под решением уравнения (1) всюду в дальнейшем будем понимать любую локально абсолютно непрерывную со своей первой производной функцию $y: I \to \mathbb{R}$ $(I \subset [a, \omega[)$, которая почти всюду на I удовлетворяет (1).

Наряду с (1) рассмотрим также уравнение

$$y''|y'|^{-\lambda} + p(t)|y|^{1-\lambda}\operatorname{sign} y = 0, \tag{2}$$

полученное из (1) умножением на $|y'|^{-\lambda}$.

При $0 < \lambda < 1$ решение y уравнения (1) назовем правильным, если оно задано в некоторой левой окрестности ω, и для любого τ из этой окрестности удовлетворяет условию $\sup\{|y'(t)|: \tau \le t < \omega\} > 0$. При $\lambda \le 0$ правильным решением уравнения (1) будем называть каждое решение y уравнения (2), заданное в левой окрестности ω и удовлетворяющее для любого τ из этой окрестности условию $\sup\{|y(t)|: \tau \le t < \omega\} > 0$.

Правильное решение назовем колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к ω, и неколеблющимся — в противном случае.

1. Аналоги теорем А. Кнезера. Установим сначала следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. *Каждое непродолжаемое решение уравнения* (1) *определено в промежутке* $[a, \omega[$ и при $a \le s < t < \omega$ *выполняются неравенства*

$$\rho(y)(s)\exp\left[-(2-\lambda)\int_s^t |1-p(\tau)|\,d\tau\right] \le \rho(y)(t) \le$$

$$\le \rho(y)(s)\exp\left[(2-\lambda)\int_s^t |1-p(\tau)|\,d\tau\right], \tag{3}$$

где $\rho(y)(t) = |y'(t)|^{2-\lambda} + |y(t)|^{2-\lambda}$.

Доказательство. Пусть $y:]t_0, t_1[$ — произвольное непродолжаемое решение уравнения (1). Покажем, что это решение при $t_0 < s < t < t_1$ удовлетворяет неравенствам (3). Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ согласно (1) при $t_0 < s < t < t_1$ имеем

$$\rho(y)(t) + \varepsilon = [\rho(y)(s) + \varepsilon]\exp\int_s^t \frac{(2-\lambda)[1-p(\tau)]\,|y(\tau)|^{1-\lambda}y'(\tau)\operatorname{sign} y(\tau)}{\rho(y)(\tau)+\varepsilon}\,d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что при $\tau \in [s, t]$ выполняются неравенства

$$|y(\tau)|^{1-\lambda} \le [\rho(y)(\tau)]^{(1-\lambda)/(2-\lambda)}, \quad |y'(\tau)| \le [\rho(y)(\tau)]^{1/(2-\lambda)},$$

в силу произвольности ε получаем (3).

Установленные при $t_0 < s < t < t_1$ неравенства (3), очевидно, не противоречат тому, что $y:]t_0, t_1[\to \mathbb{R}$ — непродолжаемое решение уравнения (1) лишь в случаях, когда $t_0 = a$, $t_1 = \omega$ и точка a входит в область определения y. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если* $\lambda < 0$ $(0 \le \lambda < 1)$ *то любое решение* (*ненулевое решение*) *уравнения* (1) *на каждом отрезке* $[a, b] \subset [a, \omega[$ *имеет не более конечного числа нулей.*

Следствие 2. *Если* $\lambda < 0$ $(\lambda = 0)$, *то каждое решение* (*ненулевое решение*) *уравнения* (1) *является правильным. Если же* $0 < \lambda < 1$, *то каждое ненулевое решение уравнения* (1) *либо является правильным, либо тождественно равно постоянной, отличной от нуля на некотором промежутке* $[t_0, \omega] \subset [a, \omega[$.

***Замечание* 1.** При $0 < \lambda < 1$ уравнение (1) имеет решения каждого из указанных в следствии 2 типов. В частности, любое решение уравнения (2) при $0 < \lambda < 1$ определено в промежутке $[a, \omega[$ и является правильным решением уравнения (1).

Теорема 1. *Если* $\omega < +\infty$ *и для некоторого* $t_0 \in [a, \omega[$

$$p(t)(\omega - t)^{2-\lambda} \le \frac{1}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \tag{4}$$

то каждое правильное решение уравнения (1) *является неколеблющимся.*

Доказательство. Уравнение (1) с помощью преобразования

$$y(t) \le (\omega - t)^{(1-\lambda)/(2-\lambda)}\xi(\tau), \quad \tau = -\ln(\omega - t), \tag{5}$$

сведем к уравнению

$$\left(\xi' - \frac{1-\lambda}{2-\lambda}\xi\right)' + \frac{1}{2-\lambda}\left(\xi' - \frac{1-\lambda}{2-\lambda}\xi\right) =$$

$$= -\rho_*(\tau)|\xi|^{1-\lambda}\left|\xi' - \frac{1-\lambda}{2-\lambda}\xi\right|^{\lambda} \operatorname{sign}\xi, \tag{6}$$

где

$$p_*(\tau) = p_*(\tau(t)) = p(t)(\omega - t)^{2-\lambda}. \tag{7}$$

Предположим теперь, что уравнение (1) имеет правильное колеблющееся решение y. Согласно лемме 1 это решение определено в промежутке $[a, \omega[$ и такое, что $|y(t)| + |y'(t)| \neq 0$ при $t \in [a, \omega[$. В силу замен (5) соответствующее y решение $\xi\colon [\alpha, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\alpha = -\ln(\omega - a)$, уравнения (6) также является колеблющимся и удовлетворяет условию $|\xi(\tau)| + |\xi'(\tau)| \neq 0$ при $t \in [a, \omega[$. Поэтому в любой окрестности $+\infty$, а значит, и на промежутке $[-\ln(\omega - t_0), +\infty]$ существуют точки τ_1 и τ_2, где $\tau_1 < \tau_2$ такие, что

$$\xi(\tau_1) = 0, \ \ \xi'(\tau_2) = 0 \ \text{ и } \ \xi'(\tau) > 0 \ \text{ при } \ \tau \in [\tau_1, \tau_2[. \tag{8}$$

Так как $\xi'(\tau_2) = 0$ и $\xi(\tau_2) > 0$ в некоторой левой окрестности τ_2, то согласно (1) справедливо соотношение

$$\left(1 - \frac{2-\lambda}{1-\lambda}\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)'\left(1 - \frac{2-\lambda}{1-\lambda}\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)^{-\lambda} =$$

$$= p_*(\tau)\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{\lambda-1} - \left(1 - \frac{2-\lambda}{1-\lambda}\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)^{1-\lambda}\left[\frac{1}{2-\lambda} + \frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right],$$

при $\tau \to \tau_2 - 0$ оно может быть записано в виде

$$\left(\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)' = \frac{1-\lambda}{2-\lambda}(1 + o(1))\left[\frac{1}{2-\lambda} - p_*(\tau)\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{\lambda-1} -\right.$$

$$\left. - \frac{(2-\lambda)^2}{2(1-\lambda)}\left(\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)^2[1 + o(1)]\right].$$

Отсюда, с учетом (4) и (7) ясно, что для некоторого $\tau_* \in \,]\tau_1, \tau_2[$

$$\left(\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)^{-2}\left(\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)}\right)' \geq -(2-\lambda) \quad \text{при } \ \tau \in \,]\tau_*, \tau_2[.$$

Интегрируя это неравенство от τ_* до τ, находим

$$-\frac{\xi(\tau)}{\xi'(\tau)} + \frac{\xi(\tau_*)}{\xi'(\tau_*)} \geq -(2-\lambda)(\tau - \tau_*) \quad \text{при } \ \tau \in \,]\tau_*, \tau_2[,$$

откуда, переходя к пределу при $\tau \to \tau_2 - 0$, в силу (8) будем иметь

$$-\infty \geq -(2-\lambda)(\tau_2 - \tau_*) = \text{const}.$$

Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что уравнение (1) имеет правильное колеблющееся решение, было неверным. Следовательно, любое правильное решение (1) является неколеблющимся. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $\omega < +\infty$ *и выполняется условие*

$$\liminf_{t \to \omega - 0} p(t)(\omega - t)^{2-\lambda} > \frac{1}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda}, \tag{9}$$

то каждое правильное решение уравнения (1) *является колеблющимся.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что уравнение (1) имеет правильное неколеблющееся решение y. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что $y(t) > 0$ и $y'(t) \neq 0$ при $t \in [t_0, \omega[$, где t_0 — некоторое число из промежутка $[a, \omega[$. Данному решению y уравнения (1) в силу замен (5) соответствует решение $\xi\colon [\tau_0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$, $\tau_0 = -\ln(\omega - t_0)$, уравнения (6), удовлетворяющее условиям

$$\xi(\tau) > 0 \ \text{ и } \ \xi'(\tau) - \frac{1-\lambda}{2-\lambda}\xi(\tau) \neq 0 \ \text{ при } \ \tau \geq \tau_0.$$

В силу этих условий согласно (6) имеем

$$z'(\tau) + z^2(\tau) + z(\tau) + p_*(\tau)\,|z(\tau)|^{\lambda} = 0 \ \text{ при } \ \tau \geq \tau_0, \tag{10}$$

где

$$z(\tau) = \left(\xi'(\tau) - \frac{1-\lambda}{2-\lambda}\xi(\tau)\right)(\xi(\tau))^{-1}.$$

Теперь заметим, что функция $\varphi(z) = |z|^{2-\lambda} + |z|^{1-\lambda}\operatorname{sign} z$ имеет свойство

$$\varphi(z) \geq \varphi\left(-\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right) = -\frac{1}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda} \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, в силу (9), (5) и (7) существуют $\varepsilon > 0$ и $\tau_1 \geq \tau_0$ такие, что

$$p_*(\tau) \geq \frac{1+\varepsilon}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_1. \tag{11}$$

Поэтому из (10) получаем

$$\frac{z'(\tau)}{|z(\tau)|^{\lambda}} \geq -\frac{\varepsilon}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_1.$$

Интегрируя это неравенство от τ_1 до τ, находим

$$\frac{|z(\tau)|^{1-\lambda}\operatorname{sign} z(\tau)}{1-\lambda} \leq \frac{|z(\tau_1)|^{1-\lambda}\operatorname{sign} z(\tau_1)}{1-\lambda} - \frac{\varepsilon}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda}(\tau - \tau_1)$$

при $\tau \geq \tau_1$, откуда следует

$$z(\tau) \to -\infty \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty. \tag{12}$$

Принимая во внимание это условие, подберем число $\tau_2 \geq \tau_1$ настолько большим, чтобы при $\tau \geq \tau_2$ выполнялось неравенство $|1/z(\tau)| \leq 1/2$. Тогда из (10) с учетом (11) получаем

$$\frac{z'(\tau)}{z^2(\tau)} \leq -\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_2.$$

Интегрируя данное неравенство от τ_2 до τ, имеем

$$\frac{1}{z(\tau)} - \frac{1}{z(\tau_2)} \geq \frac{1}{2}(\tau - \tau_2) \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_2,$$

что, очевидно, противоречит условию (12). Полученное противоречие доказывает теорему.

Аналогично теоремам 1 и 2 с использованием вместо (5) преобразования $y(t) = t^{(1-\lambda)/(2-\lambda)}\xi(\tau)$, $\tau = \ln t$, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. *Если* $\omega = +\infty$ *и для некоторого* $t_0 > a$

$$p(t)t^{2-\lambda} \leq \frac{1}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda} \quad \text{при} \quad t \geq t_0,$$

то каждое правильное решение уравнения (1) *является неколеблющимся.*

Теорема 4. *Если* $\omega = +\infty$ *и выполняется условие*

$$\lim_{t \to +\infty} \inf p(t)t^{2-\lambda} > \frac{1}{2-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right)^{1-\lambda},$$

то каждое правильное решение уравнения (1) *является колеблющимся.*

Замечания. 2. Следует отметить, что теорема 3 в случае $p(t) \geq 0$ и теорема 4 вытекают также из результатов Д. Д. Мирзова [8], установленных для одного класса систем двух дифференциальных уравнений.

3. Теоремы 3 и 4 при $\lambda = 0$ (т. е. в линейном случае) совпадают с известными теоремами А. Кнезера [9].

2. Аналоги теорем М. Бохнера и И. Т. Кигурадзе.

Теорема 5. *Если* $\omega < +\infty$ *и выполняется условие*

$$\int_a^\omega (\omega - t)^{1-\lambda}|p(t)|\,dt < +\infty, \tag{13}$$

то каждое правильное решение уравнения (1) *является неколеблющимся.*

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет правильное колеблющееся решение y. Так как для данного решения в силу леммы 1 выполняется условие $|y(t)| + |y'(t)| \neq 0$ при $t \in [a, \omega[$, существуют последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ такие, что

$$\begin{gathered} a < b_k < a_k < b_{k+1}, \quad \lim_{k \to +\infty} b_k = \omega, \\ y(t) < 0, \ \ y'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in \,]b_k, a_k[, \\ y(a_k) = y'(b_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{14}$$

Поэтому согласно (1) имеем

$$\frac{|y'(t)|^{1-\lambda}}{1-\lambda} = \int_{b_k}^{t} p(t)|y(\tau)|^{1-\lambda}d\tau \quad \text{при} \quad t \in [b_k, a_k].$$

Умножая это равенство на $y'(t)$ и интегрируя от b_k до a_k, с использованием метода интегрирования по частям получаем

$$\int_{b_k}^{a_k} \frac{|y'(\tau)|^{2-\lambda}}{1-\lambda}\,d\tau = \int_{b_k}^{a_k} p(t)|y(\tau)|^{2-\lambda}d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Кроме того, в силу (14) и неравенства Гельдера

$$|y(t)| = \int_t^{a_k} |y'(\tau)|\, d\tau \le \left(\int_t^{a_k} |y'(\tau)|^{2-\lambda} d\tau \right)^{1/(2-\lambda)} (a_k - t)^{(1-\lambda)/(2-\lambda)} \le$$

$$\le \left(\int_{b_k}^{a_k} |y'(\tau)|^{2-\lambda} d\tau \right)^{1/(2-\lambda)} (\omega - t)^{(1-\lambda)/(2-\lambda)}$$

$$\text{при } t \in [b_k, a_k], \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Учитывая эту оценку для y, из (15) находим

$$\frac{1}{1-\lambda} \le \int_{b_k}^{a_k} (\omega - \tau)^{1-\lambda} |p(\tau)|\, d\tau \le \int_{b_k}^{\omega} (\omega - \tau)^{1-\lambda} |p(\tau)|\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Однако при всех $k \in \{1, 2, \ldots\}$ это неравенство соблюдаться не может, поскольку интеграл, стоящий справа, ввиду условий (13) и $\lim\limits_{k \to +\infty} b_k = \omega$ стремится к нулю при $k \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает, что каждое правильное решение уравнения (1) является неколеблющимся.

Теорема 6. *Пусть* $\omega < +\infty$ *и* $p(t) \ge 0$ *при* $t \in [a_0, \omega[$, *где* $t_0 \in [a, \omega[$. *Пусть, кроме того, для некоторой локально абсолютно непрерывной и неубывающей функции* $\varphi\colon [t_0, \omega[\to]0, +\infty[$ *выполняются условия*

$$\int_{t_0}^{\omega} \frac{(\omega - t)^{1-\lambda} p(t)}{\varphi(t)}\, dt = +\infty, \tag{16}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{(\omega - \tau)\rho(\tau)} = o\left(\int_{t_0}^{t} \frac{(\omega - \tau)^{1-\lambda} p(\tau)}{\varphi(\tau)}\, d\tau \right) \quad \text{при } t \to \omega. \tag{17}$$

Тогда каждое правильное решение уравнения (1) *является колеблющимся.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. уравнение (1) имеет правильное неколеблющееся решение y. Поскольку $\omega < +\infty$ и $p(t) \ge 0$ при $t \in [a_0, \omega[$, то, не ограничивая общности, можно считать, что для некоторого $t_1 \in [t_0, \omega[$ либо

$$y(t) > 0, \; y'(t) > 0, \; y''(t) \le 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[, \tag{18_1}$$

либо

$$y(t) > 0, \; y'(t) < 0, \; y''(t) \le 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[. \tag{18_2}$$

Каждый из этих двух случаев рассмотрим отдельно.

Допустим сначала, что соблюдаются условия (18_1). Тогда согласно (1) получаем

$$\frac{[(\omega - t) y'(t)]^{1-\lambda}}{(1-\lambda) y^{1-\lambda}(t) \varphi(t)} + \int_{t_1}^{t} \frac{[y'(\tau)]^{1-\lambda} (\omega - \tau)^{-\lambda}}{y^{1-\lambda}(\tau) \varphi(\tau)}\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{1-\lambda} \int_{t_1}^{t} [(\omega - t) y'(\tau)]^{1-\lambda}\, d\left(\varphi(\tau) y^{1-\lambda}(\tau)\right)^{-1} =$$

$$= C_0 - \int_{t_1}^{t} \frac{(\omega - \tau)^{1-\lambda} p(\tau)}{\varphi(\tau)}\, d\tau \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[,$$

где C_0 — положительная постоянная. Отсюда, учитывая, что функции y и φ положительны и не убывают на $[t_1, \omega[$, находим

$$0 \le C_0 - \int_{t_1}^{t} \frac{(\omega - \tau)^{1-\lambda} p(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau \text{ при } t \in [t_1, \omega[.$$

Но при всех $t \in [t_1, \omega[$ это неравенство не выполняется, поскольку его правая часть в силу условия (16) стремится к $-\infty$ при $t \to \omega$. Тем самым получено противоречие.

Пусть теперь y удовлетворяет условиям (18_2). Тогда согласно (1) имеем

$$\frac{|(\omega - t) y'(t)|^{1-\lambda}}{(1-\lambda)\varphi(t) y^{1-\lambda}(t)} + \frac{1}{1-\lambda} \int_{t_1}^{t} \frac{|(\omega - \tau) y'(\tau)|^{1-\lambda}}{y^{1-\lambda}(\tau)} \frac{d\varphi(\tau)}{\varphi^2(\tau)} =$$

$$= C_0 + \int_{t_1}^{t} \frac{(\omega - \tau)^{1-\lambda} p(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau - \int_{t_1}^{t} \frac{|y'(\tau)|^{1-\lambda} (\omega - \tau)^{-\lambda}}{\varphi(\tau) y^{1-\lambda}(\tau)} d\tau -$$

$$- \int_{t_1}^{t} \frac{|y'(\tau)|^{2-\lambda} (\omega - \tau)^{1-\lambda}}{\varphi(\tau) y^{2-\lambda}(\tau)} d\tau \text{ при } t \in [t_1, \omega[, \tag{19}$$

где C_0 — положительная постоянная.

Прежде чем приступить к анализу этого соотношения, установим неравенство

$$(\omega - t) y'(t) \ge -y(t) \text{ при } t \in [t_1, \omega[. \tag{20}$$

В силу (18_2) $((\omega - t) y'(t) + y(t))' \le 0$ при $t \in [t_1, \omega[$. Поэтому, если допустить, что для некоторого $t_2 \in [t_1, \omega[$ выполняется неравенство

$$(\omega - t_2) y'(t_2) + y(t_2) < 0,$$

получаем

$$y'(t) \le -\frac{c + y(t)}{\omega - t} < -\frac{c}{\omega - t} \text{ при } t \in [t_2, \omega[,$$

где $c = -(\omega - t_2) y'(t_2) - y(t_2) > 0$. Отсюда, интегрируя от t_2 до t, находим

$$y(t) - y(t_2) < c \ln \frac{\omega - t}{\omega - t_2} \text{ при } t \in [t_2, \omega[,$$

что противоречит первому из условий (18_2). Следовательно, справедливо неравенство (20).

Теперь, учитывая (20), (18_2) и свойства функции φ, из (19) получаем

$$\frac{1}{(1-\lambda)\varphi(t)} \ge C_0 + \int_{t_1}^{t} \frac{(\omega - \tau)^{1-\lambda} p(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau -$$

$$- 2 \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{(\omega - \tau)\varphi(\tau)} d\tau \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[,$$

что противоречит условиям (16) и (17).

Полученные в каждом из двух возможных случаев противоречия доказывают справедливость утверждения теоремы.

Теорема 7. *Если* $\omega = +\infty$ *и для некоторого* $t_0 > |a|$ *выполняется условие*

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{1-\lambda} |p(t)|\, dt < +\infty,$$

то каждое правильное решение уравнения (1) *является неколеблющимся.*

Доказательство. Допустим, что уравнение (1) имеет правильное колеблющееся решение y. В силу леммы 1 y определено на промежутке $[a, \omega[$ и существуют последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ такие, что

$$a < a_k < b_k < b_{k+1}, \quad \lim_{k \to +\infty} a_k = +\infty,$$

$$y(t) > 0, \;\; y'(t) > 0 \;\text{ при }\; t \in]a_k, b_k[\,,$$

$$y(a_k) = y'(b_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Тогда

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{|y'(t)|^{2-\lambda}}{1-\lambda}\, dt = \int_{a_k}^{b_k} p(t) |y(t)|^{2-\lambda} dt, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

и в силу неравенства Гельдера

$$|y(t)| = \int_{a_k}^{t} |y'(\tau)|\, d\tau = \left(\int_{a_k}^{t} |y'(\tau)|^{2-\lambda} d\tau \right)^{1/(2-\lambda)} (t - a_k)^{(1-\lambda)/(2-\lambda)} \le$$

$$\le \left(\int_{a_k}^{b_k} |y'(t)|^{2-\lambda} dt \right)^{1/(2-\lambda)} t^{(1-\lambda)/(2-\lambda)} \;\text{ при }\; t \in [a_k, b_k].$$

Тем самым, как и при доказательстве теоремы 5, приходим к противоречию. Следовательно, наше предположение о существовании у уравнения (1) правильного колеблющегося решения было неверным. Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть* $\omega = +\infty$ *и* $p(t) \ge 0$ *при* $t \ge t_0$, *где* $t_0 \in [a, +\infty[$. *Пусть, кроме того, для некоторой локально абсолютно непрерывной и неубывающей функции* $\varphi\colon [t_0, +\infty[\;\to\;]0, +\infty[$ *выполняются условия*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{t^{1-\lambda} p(t)}{\varphi(t)}\, dt = +\infty, \tag{21}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau \varphi(\tau)} = o\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\tau^{1-\lambda} p(\tau)}{\varphi(\tau)}\, d\tau \right) \;\; \text{при} \;\; t \to +\infty. \tag{22}$$

Тогда каждое правильное решение уравнения (1) *является колеблющимся.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. уравнение (1) имеет правильное неколеблющееся решение y. Так как $\omega = +\infty$ и $p(t) \ge 0$ при $t \ge t_0$, то, не ограничивая общности, можно считать, что для некоторого $t_1 \ge t_0$

$$y(t) > 0, \;\; y'(t) > 0 \;\text{ и }\; y''(t) \le 0 \;\text{ при }\; t \ge t_1. \tag{23}$$

В силу этих условий функция $z(t) = (t - t_1) y'(t) - y(t)$ имеет свойства $z'(t) \le$ ≤ 0 при $t \ge t_1$ и $z(t_1) = -y(t_1) < 0$. Отсюда следует

$$(t - t_1)\, y'(t) < y(t) \;\text{ при }\; t \ge t_1. \tag{24}$$

Учитывая теперь (23), (24) и свойства функции φ, из (1) получаем

$$0 < \frac{[ty'(t)]^{1-\lambda}}{(1-\lambda)\varphi(t)y^{1-\lambda}(t)} - \frac{1}{1-\lambda}\int_{2t_1}^{t}[\tau y'(\tau)]^{1-\lambda}\, d\left(\varphi(\tau)y^{1-\lambda}(\tau)\right)^{-1} =$$

$$= C_0 - \int_{2t_1}^{t}\frac{\tau^{1-\lambda}p(\tau)}{\varphi(\tau)}\,d\tau + \int_{2t_1}^{t}\frac{\tau^{-\lambda}[y'(\tau)]^{1-\lambda}}{\varphi(\tau)y^{1-\lambda}(\tau)}\,d\tau \le$$

$$\le C_0 - \int_{2t_1}^{t}\frac{\tau^{1-\lambda}p(\tau)}{\varphi(\tau)}\,d\tau + 2^{1-\lambda}\int_{2t_1}^{t}\frac{d\tau}{\tau\varphi(\tau)} \quad \text{при} \quad t \ge 2t_1,$$

где C_0 — положительная постоянная, что противоречит условиям (21) и (22). Полученное противоречие доказывает теорему.

***Замечание* 4.** При $\lambda = 0$ (т. е. в линейном случае) теорема 7 совпадает с известной теоремой Бохера [10], а теорема 8 несколько дополняет результат И. Т. Кигурадзе, установленный в [11].

1. *Elbert A.* A half-linear second order differential equation // Colloc. Math. Soc. J. Bolyai. – 1979. – **30**. – P. 153 – 180.
2. *Elbert A.* The wronskian and the half-linear differential equation // Stud. sci. math. hung. – 1980. – P. 101 – 105.
3. *Hille E.* Non-oscillation theorems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – **64**. – P. 234–252.
4. *Rab M.* Kriterien für die oscillation Lösungen Differentialglechung $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ // Casopis pro pest. mat. – 1959. – **84**. – P. 335 – 370.
5. *Wong J. S. W.* Oscillation and nonoscillation of solutions second order linear differential equations with integrable coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **144**. – P. 197 – 215.
6. *Willett D.* Classification of second order linear differential equations with respect to oscillations // Adv. Math. – 1969. – **3**. – P. 594 – 623.
7. *Мирзов Д. Д.* О колеблемости решений одной системы дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 3. – С. 401 – 404.
8. *Mirzov J. D.* On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems // J. Math. Anal. and Appl. – 1976. – **53**, № 1. – P. 418 – 425.
9. *Kneser A.* Untersuchungen über die reelen Nullstellen der Integral linearer Differentialgleichungen // Math. Ann. – 1893. – **42**. – P. 409 – 435.
10. *Bocher M.* On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analitic // Trans. Amer. Soc. – 1900. – **1**. – P. 40 – 53.
11. *Кигурадзе И. Т.* О колеблемости решений уравнения $u^{(m)} + a(t)\,|u|^n \operatorname{sign} u = 0$ // Мат. сб. – 1966. – **65 (107)**, № 2. – С. 172 – 187.

Получено 20.04.92