УДК 517.948

К. Ш. Махкамов, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ТОЧНОМ ПОРЯДКЕ СЛОЖНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ II РОДА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

An exact complexity exponent is found for an approximate solution of a certain class of operator equations in a Hilbert space. A method for information setup and the algorithm realizing an optimal order are given. As a consequence, we find an exact complexity exponent for an approximate solution of Fredholm integral equations of second kind with kernels and free terms having square integrable ψ-derivatives.

Знайдено точний степеневий порядок складності наближеного розв'язку певного класу операторних рівнянь у гільбертовому просторі, вказано спосіб задання інформації та алгоритм, що реалізують цей оптимальний порядок. Як наслідок, знайдено точний степеневий порядок складності наближеного розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма II роду з ядрами та вільними членами, що мають ψ-похідні.

1. Пусть X — гильбертово пространство, а $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ — ортонормированный базис в X.

В дальнейшем соотношение $a_m << b_m$ будет означать, что, начиная с некоторого m_0, $a_m << cb_m$, $m \geq m_0$, где постоянная c не зависит от m. Кроме того, $a_m \asymp b_m$ означает, что одновременно выполняются соотношения $a_m << << b_m$, $b_m << a_m$.

Рассмотрим последовательность чисел $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ таких, что $1 \leq \beta_1 \leq \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n \leq \dots$, причем

$$\beta_n \asymp n^{\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

Положим

$$X^{\beta} = \left\{ \varphi\colon \varphi \in X,\ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 (e_i, \varphi)^2 < \infty \right\},$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в X. При этом норма в X определяется соотношением

$$\|\varphi\|_{X^{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 (e_i, \varphi)^2 \right)^{1/2},$$

и при любом $n = 1, 2, 3, \dots$ для ортопроектора

$$P_n\varphi = \sum_{i=1}^{n} e_k (e_k, \varphi),$$

действующего из X в n-мерное подпространство $F_n = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, справедлива оценка

$$\|\varphi - P_n\varphi\|_X = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} e_i(\varphi, e_i) \right\|_X = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} (\varphi, e_i)^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \beta_{n+1}^{-1} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i^2 (\varphi, e_i)^2 \right)^{1/2} \leq \beta_{n+1} \|\varphi\|_{X^{\beta}}. \tag{2}$$

Для $\varphi \in X^{\beta}$ положим

$$D\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (e_i, \varphi) e_i.$$

Обозначим через Φ^{β} класс операторных уравнений вида

$$z = Hz + f, \tag{3}$$

где

$$f \in X_1^{\beta} = \{ f\colon f \in X^{\beta}, \|f\|_{X^{\beta}} \le 1 \},$$

$$H \in \mathcal{H}^{\beta} = \Big\{ H;\ H\colon X \to X^{\beta}, \|H\|_{X \to X^{\beta}} \le \mu_0,$$

$$\|(I-H)^{-1}\|_{X \to X} \le \mu_1, \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} (e_i, D(DH)^* e_j)^2 \le \mu_2 \Big\}.$$

Заметим, что для любого оператора $H \in \mathcal{H}^{\beta}$ справедливо представление

$$H\varphi = \sum_{i,j=1}^{\infty} e_i (e_i, He_j)(e_j, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \sum_{j=1}^{\infty} (e_i, He_j)(e_j, \varphi),$$

$$(DH)\varphi = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} (e_j, \varphi) e_i, \quad a_{ij} = \beta_i (e_i, He_j).$$

Сопряженный оператор $(DH)^*$ имеет вид

$$(DH)^* \varphi = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ji} (e_j, \varphi) e_i, \quad a_{ji} = \beta_j (e_j, He_i).$$

Легко видеть, что

$$(e_j, \varphi) = \beta_j^{-1} (e_j, D\varphi), \tag{4}$$

$$(e_j, He_i) = (\beta_i \beta_j)^{-1} (e_i, D(DH)^* e_j). \tag{5}$$

Следуя Дж. Траубу и Х. Вожьняковскому [1, с. 100], рассмотрим задачу об оптимизации алгоритмов приближенного решения уравнений (3) по сложности.

Под способом задания информации об уравнениях класса Φ^{β} будем понимать произвольный набор $T = \{\delta_i\}_{i=1}^{m}$ линейных непрерывных функционалов δ_i, из которых $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ определены на множестве $\mathcal{H}^{\beta}$, а $\delta_{k+1}, \ldots, \delta_m$ — на множестве X^{β}..

При фиксированном наборе T каждому уравнению (3) ставится в соответствие числовой вектор

$$T(H, f) = (\delta_1(H), \ldots, \delta_k(H), \delta_{k+1}(f), \ldots, \delta_m(f)), \tag{6}$$

называемый информацией об уравнении (3). Через $\mathcal{T}_M$ обозначим множество способов задания информации, определяемых наборами не более чем из M функционалов.

Под алгоритмом A приближенного решения уравнений из Φ^{β} будем понимать оператор, сопоставляющий информации (6) в качестве приближенного решения уравнения (3) элемент $A(T, H, f) \in X$. При этом для определения $A(T,$

$H, f)$ разрешается выполнить лишь некоторое число элементарных операций над компонентами вектора (6). К элементарным операциям мы относим простейшие арифметические и логические операции.

Через $\mathcal{A}_N(T)$ обозначим множество алгоритмов A, которые используют информацию $T(H, f)$ и требуют для построения $A(T, H, f)$ выполнения не более чем N элементарных операций над компонентами $T(H, f)$. Рассматривая алгоритмы из $\mathcal{A}_N(T)$, естественно положить, что $T \in \mathcal{T}_M$ при $M \le N$.

В противном случае любой алгоритм из $\mathcal{A}_N(T)$ не использует всю информацию, представленную компонентами вектора $T(H, f)$. Как обычно, погрешностью алгоритма A на классе Φ^β будем называть величину

$$e(\Phi^\beta, A, X) = \sup_{\substack{z = Hz + f, \\ H \in \mathcal{H}^\beta,\ f \in X^\beta}} \| z - A(T, H, f) \|_X .$$

Положим

$$E_N(\Phi^\beta, X) = \inf_{T \le \mathcal{T}_M,\ M \le N} \ \inf_{A \in \mathcal{A}_N(T)} e(\Phi^\beta, A, X).$$

В последнее время (см. [1, 2] и библиографию к ним) возрос интерес к оценкам сложности приближенного решения различных задач.

Под сложностью в данном случае понимается минимальное число элементарных операций, требуемых для нахождения решения с заданной точностью. Величина E_N показывает, какую минимальную погрешность можно получить на классе, выполнив N элементарных операций.

Таким образом, величина $E_N(\Phi^\beta, X)$ характеризует сложность приближенного решения уравнений из Φ^β. Кроме того, оптимизацию алгоритмов в смысле величины E_N иногда называют оптимизацией по числу операций.

В настоящей статье найден точный степенной порядок величины $E_N(\Phi^\beta, X)$ и указаны способ задания информации и алгоритм, реализующие оптимальный порядок. Полученные результаты применены для оценки сложности одного класса интегральных уравнений Фредгольма II рода.

2. Пусть

$$Q_M = \{ (k_1, k_2):\ k_1^\alpha k_2^{2\alpha} \le M,\ k_1^\alpha \le M,\ k_2^\alpha \le \sqrt{M} \}.$$

Рассмотрим способ задания информации $T_M(H, f)$ об уравнениях (3) из класса Φ^β, определяемый набором функционалов

$$T_M(H, f) = \Big(\big(e_{k_1}, He_{k_1}\big), \big(e_{k_1}, f\big),$$
$$k_1, k_2 = 1, 2, 3, \dots,\ k_1^\alpha k_2^{2\alpha} \le M \Big). \tag{7}$$

Предложение 1. *Пусть $N = \operatorname{card}(Q_M)$ — число точек (k_1, k_2) из множества Q_M с целочисленными координатами. Тогда справедливо соотношение*

$$T_M \in \mathcal{T}_M, \quad N \asymp M^{1/\alpha}. \tag{8}$$

Доказательство.

$$\operatorname{card}(Q_M) \le \sum_{1 \le k_2 \le M^{1/2\alpha}} \frac{M^{1/\alpha}}{k_2^2} = M^{1/\alpha} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^2} \ll M^{1/\alpha}.$$

Поставим в соответствие каждому оператору $H \in \mathcal{H}^\beta$ конечномерный оператор

$$H_M\varphi = \sum_{(i,j) \in Q_M} e_i(e_i, He_j)(e_j, \varphi) = e_1(e_1, He_1)(e_1, \varphi) +$$

$$+ \sum_{k_1=2}^{[M^{1/\alpha}]} e_{k_1}\left(e_{k_1}, He_{k_1}\right)(e_1, \varphi) + \sum_{k_2=2}^{[M^{1/2\alpha}]} e_1\left(e_{k_1}, He_{k_2}\right)\left(e_{k_2}, \varphi\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k_1, k_2 \in Q_M, \\ k_1, k_2 \ne 1}} e_{k_1}\left(e_{k_1}, He_{k_2}\right)\left(e_{k_2}, \varphi\right). \tag{9}$$

Лемма 1. *Для любого оператора $H \in \mathcal{H}^\beta$ справедлива оценка*

$$\|H - H_M\|_{X^\beta \to X} \ll M^{-1}.$$

Доказательство.

$$H\varphi - H_M\varphi = \sum_{(i,j) \notin Q_M} e_i(e_i, He_j)(e_j, \varphi). \tag{10}$$

Подставляя (4), (5) в (10), имеем

$$H\varphi - H_M\varphi = \sum_{(i,j) \notin Q_M} (\beta_i\beta_j)^{-1}\beta_j(e_j, D(DH)^* e_i)(e_j, D\varphi)\, e_i =$$

$$= \sum_{(i,j) \notin Q_M} (\beta_i\beta_j^2)^{-1}(e_j, D(DH)^* e_i)(e_j, D\varphi)\, e_i.$$

Теперь, учитывая (1), находим

$$\|H\varphi - H_M\varphi\|_X^2 = \left\| \sum_{(i,j) \notin Q_M} (\beta_i\beta_j^2)^{-1}(e_j, D(DH)^* e_i)(e_j, D\varphi)\, e_i \right\|_X^2 =$$

$$= \left\| \sum_{i:\,(i,j) \notin Q_M} e_i \sum_{j:\,(i,j) \notin Q_M} (\beta_i\beta_j^2)^{-1}(e_j, D(DH)^* e_i)(e_j, D\varphi) \right\|_X^2 =$$

$$= \sum_i \left(\sum_j (\beta_i\beta_j^2)^{-1}(e_j, D(DH)^* e_i)(e_j, D\varphi) \right)^2.$$

В силу неравенства Коши – Буняковского получаем

$$\|H\varphi - H_M\varphi\|_X^2 \le$$

$$\le \sum_i \left(\sum_j (\beta_i\beta_j^2)^{-1}(e_j, D(DH)^* e_i) \right)^2 \sum_j (e_j, D\varphi)^2 \le$$

$$\le \sum_{(i,j) \notin Q_M} (\beta_i\beta_j^2)^{-2}(e_j, D(DH)^* e_i)^2 \|\varphi\|_{X^\beta}^2.$$

Положим

$$\beta_{i_0}\beta_{j_0} = \min_{(i,j)\notin Q_M} \beta_i \beta_j^2 .$$

Тогда последнее неравенство принимает вид

$$\| H\varphi - H_M\varphi \|_X^2 \le (\beta_{i_0}\beta_{j_0}^2)^{-2} \sum_{(i,j)\notin Q_M} (e_j, D(DH)^* e_i)^2 \|\varphi\|_{X^\beta}^2 \le$$

$$\le (\beta_{i_0}\beta_{j_0}^2)^{-2} \mu_2 \|\varphi\|_{X^\beta}^2 .$$

Так как $(i_0, j_0) \notin Q_M$, $\beta_{i_0}\beta_{j_0}^2 \asymp i_0^\alpha\, j_0^{2\alpha} \ge M$ или $(\beta_{i_0}\beta_{j_0})^{-1} \le M^{-1}$,

$$\| H\varphi - H_M\varphi \|_X^2 \le M^{-2} \mu_2 \|\varphi\|_{X^\beta}^2 .$$

Лемма доказана.

Поставим в соответствие каждому уравнению (3) из класса Φ^β уравнение

$$u = H_M u + P_{n_\alpha} f, \tag{11}$$

где

$$P_{n_\alpha} f = \sum_{k=1}^{n_\alpha} (f, e_k)\, e_k, \quad n_\alpha = [M^{1/\alpha}],$$

а оператор H_M определен соотношением (9). В силу теоремы о разрешимости приближенного уравнения [3, с. 517; 4] находим

$$\| (I - H_M)^{-1} \|_{X\to X} \le \frac{\|(I-H)^{-1}\|_{X\to X}}{1 - \| H - H_M \|_{X\to X} \|(I-H)^{-1}\|_{X\to X}} \le$$

$$\le \frac{\mu_1}{1 - \mu_1 \| H - H_M \|_{X\to X}} . \tag{12}$$

Оценим $\| H - H_M \|_{X\to X}$. Для любого $\varphi \in X$

$$H\varphi - H_M\varphi = \sum_{(i,j)\notin Q_M} e_i (\beta_i\beta_j)^{-1} (e_j, D(DH)^* e_i)(e_j, \varphi),$$

$$\| H\varphi - H_M\varphi \|_X^2 =$$

$$= \Big\| \sum_{i:\,(i,j)\notin Q_M} e_i \sum_{j:\,(i,j)\notin Q_M} (\beta_i\beta_j)^{-1} (e_j, D(DH)^* e_i)(e_j, \varphi) \Big\|_X^2 =$$

$$= \sum_i \Big(\sum_j (\beta_i\beta_j)^{-1} (e_j, D(DH)^* e_i)(e_j, \varphi) \Big)^2 .$$

Учитывая неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\| H\varphi - H_M\varphi \|_X^2 \le$$

$$\le \sum_i \Big(\sum_j (\beta_i\beta_j)^{-1} (e_j, D(DH)^* e_i) \Big)^2 \sum_j (e_j, \varphi)^2 \le$$

$$= \|\varphi\|_X^2 \sum_{(i,j)\notin Q_M} (\beta_i\beta_j)^{-2} (e_j, D(DH)^* e_i)^2 \le$$

$$\leq \mu_2 \|\varphi\|_X^2 \max_{(i,j) \notin Q_M} \frac{1}{(\beta_i \beta_j)^2} \leq$$

$$\leq \mu_2 \|\varphi\|_X^2 \max_{(i,j) \in \overline{Q}_M} \frac{1}{(\beta_i \beta_j)^2} = \mu_2 \|\varphi\|_X^2 \max_{(i,j) \in \overline{Q}_M} \left(\frac{\beta_j}{\beta_i \beta_j^2} \right)^2 =$$

$$= \mu_2 \|\varphi\|_X^2 M^{-2} \max_{j:\,(i,j) \in \overline{Q}_M} \beta_j^2,$$

где $\overline{Q}_M$ — граница области Q_M. Отсюда имеем

$$\| H - H_M \|_{X \to X} << M^{-1} \max_{j:\,(i,j) \in \overline{Q}_M} \beta_j .$$

Из определения Q_M следует

$$\max_{j:\,(i,j) \in \overline{Q}_M} \beta_j \leq M^{1/2}.$$

Теперь

$$\| H - H_M \|_{X \to X} << M^{-1} \max_{j:\,(i,j) \in \overline{Q}_M} \beta_j \leq M^{-1} M^{1/2} = M^{-1/2}.$$

Но тогда из (12) и последнего соотношения следует, что при достаточно больших M уравнение (11) однозначно разрешимо и

$$\| (I - H_M)^{-1} \|_{X \to X} \leq c. \tag{13}$$

Для построения уравнения (11) достаточно знать информацию (7) об исходном уравнении (3). Кроме того, располагая информацией (7), решение уравнения (11) можно представить в виде

$$u = \sum_{k=1}^{n_\alpha} c_k e_k = \sum_{k=1}^{n_\alpha} (e_k, f) e_k \subset F_{n_\alpha} \tag{14}$$

как конечное число элементарных операций.

Таким образом, определен алгоритм A_M, при котором $A_M(T_M, H, f) = u$, где u — решение уравнения (11).

Теорема 1. *Для погрешности алгоритма A_M на классе Φ^β справедливо соотношение* $e(\Phi^\beta, A_M) << M^{-1}$.

Доказательство. Из (3), (11) и (13) находим

$$\| z - u \|_X \leq \| (I - H_M)^{-1} \|_{X \to X} \left[\| (H - H_M) z \|_X + \| f - P_{n_\alpha} f \|_X \right] <<$$

$$<< \| (H - H_M) z \|_X + \| f - P_{n_\alpha} f \|_X .$$

Воспользовавшись неравенством

$$\| z \|_{X^\beta} \leq \| Hz + f \|_{X^\beta} \leq \| H \|_{X \to X^\beta} \| z \|_X + \| f \|_{X^\beta} =$$

$$= \| H \|_{X \to X^\beta} \| (I - H)^{-1} \|_{X \to X} \| f \|_X + 1 = \mu_0 + 1 \leq c,$$

соотношением (2) и леммой 1, получаем

$$\| z - u \|_X << \| H - H_M \|_{X^\beta \to X} \| z \|_{X^\beta} + \| f - P_{n_\alpha} f \|_X <<$$

$$<< \| H - H_M \|_{X^\beta \to X} + \beta_{n_\alpha + 1}^{-1} << M^{-1} + (n_\alpha + 1)^{-\alpha} <<$$

$$<< M^{-1} + (M^{1/\alpha})^{-\alpha} << M^{-1}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценим число элементарных операций, требуемых для построения $A_M(T_M, H, f)$. Прежде всего отметим, что если мы будем определять $A_M(T_M, H, f)$ из уравнения (11) непосредственно в виде (14), то для этого потребуется решить систему n_α линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_k. Решение этой системы стандартным методом потребует выполнения не менее чем $O(n_\alpha^2)$ элементарных операций. С учетом соотношения (8) и теоремы 1 отсюда получаем оценку $E_N(\Phi^\beta, X) << N^{-\alpha/2}$, которая, как мы увидим ниже, является слишком грубой. Далее покажем, что нахождение решения (11) может быть сведено к системе значительно меньшего чем n_α числа линейных алгебраических уравнений. Это позволит найти точный порядок $E_N(\Phi^\beta, X)$.

Поставим в соответствие оператору H конечномерный оператор

$$T_n(H) = HP_n + P_nH - P_nHP_n, \quad n = [M^{1/3\alpha}] + 1.$$

Оператор $T_n(H)$ действует в подпространстве $F_n(H)$, являющемся линейной оболочкой $\{e_i\}_{i=1}^n$ и их образов при действии оператора H, т. е. He_i, $i = \overline{1, n}$, $\dim F_n(H) = 2n$. Отметим, что значение величин $(e_k, T_n(H)e_i)$ с номерами $(k; i)$, лежащими вне „угла"

$$K_n = \{(t; \tau)\colon\ t \ge 1,\ 1 \le \tau \le n\} \cup \{(t; \tau)\colon\ \tau \ge 1,\ 1 \le t \le n\},$$

равны нулю, а для $(k; i)$ из K_n

$$(e_k, T_n(H)e_i) = (e_k, (HP_n + P_nH - P_nHP_n)e_i) =$$

$$= (e_k, He_i + P_nHe_i - P_nHe_i) = (e_k, Hc_i).$$

Предложение 2. *При* $n = [M^{1/3\alpha}] + 1$, $Q_M \subset K_n$.

Доказательство. Пусть $(k, m) \in Q_M$, но $(k, m) \notin K_n$. Тогда $k \ge n$, $m \ge n$ и $k^\alpha \ge n^\alpha$, $m^{2\alpha} \ge n^{2\alpha}$ или $k^\alpha m^{2\alpha} \ge n^{3\alpha}$. Но $n^{3\alpha} > M$. Таким образом, $k^\alpha m^{2\alpha} > M$ и $(k, m) \notin Q_M$. Это противоречие показывает, что $Q_M \subset K_n$.

Из предложения 2 следует, что для любых k, i

$$(e_k, T_n(H_M)e_i) = (e_k, H_M e_i), \quad n = [M^{1/3\alpha}] + 1.$$

Тогда $T_n(H_M) = H_M$. Таким образом, оператор H_M действует не во всем пространстве F_{n_α}, а в подпространстве $F_n(H_M) \subset F_{n_\alpha}$, $\dim F_n(H_M) \le 2n \asymp [M^{1/3\alpha}]$, являющемся линейной оболочкой функции

$$\varphi_i = \begin{cases} e_i, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ H_M e_i, & i = n+1, \ldots, 2n. \end{cases}$$

Отметим, что в силу (9) $H_M e_i$ имеет вид

$$H_M e_i = e_1(e_1, He_i) + \sum_{k_1=2}^{[M^{1/\alpha}/k^2]} e_{k_1}(e_{k_1}, He_i) \tag{15}$$

и коэффициенты (e_{k_1}, He_i) известны, если известна информация $T_M(H, f)$ [4] .

Лемма 2. *Пусть*

$$g = \sum_{i=1}^{n_\alpha} c_i e_i$$

— произвольный элемент из F_{n_α}. При $n = [M^{1/3\alpha}] + 1$ для нахождения коэффициентов x_i в представлении

$$T_n(H_M)e_i = \sum_{i=1}^{2n} x_i \varphi_i \tag{16}$$

требуется выполнить $L \asymp M^{2/3\alpha}$ элементарных операций над коэффициентами c_i и значениями функционалов из T_M.

Доказательство. Пусть

$$g = \sum_{i=1}^{n_\alpha} c_i e_i$$

— произвольный элемент из F_{n_α}. Тогда

$$\sum_{i=n+1}^{2n} x_i \varphi_i = H_M P_n g = H_M \sum_{k=1}^{n} c_k e_k = \sum_{k=1}^{n} c_k H_M e_k = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

Таким образом, $x_i = c_{i-n}$, $i = n+1, \ldots, 2n$. Для нахождения остальных коэффициентов x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i = (P_n H_M - P_n H_M P_n) \sum_{k=1}^{n_\alpha} c_k e_k = P_n H_M \sum_{k=n}^{n_\alpha} c_k e_k. \tag{17}$$

Кроме того, из (9) следует, что при $k > [M^{1/2\alpha}]$ $H_M e_k = 0$. Но тогда, продолжая цепочку равенств (17), находим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i = \sum_{k=n}^{[M^{1/2\alpha}]} c_k H_M e_k. \tag{18}$$

Из (15) вытекает, что для представления $c_k H_M e_k$ в стандартном виде

$$c_k H_M e_k = c_k e_1(e_1, He_k) + \sum_{k_1=2}^{[M^{1/\alpha}/k^2]} c_k e_{k_1}(e_{k_1}, He_k) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{[M^{1/\alpha}/k^2]} d_{\nu k} e_\nu, \quad d_{\nu k} = c_k(e_\nu, He_k), \tag{19}$$

нужно выполнить $[M^{1/\alpha}/k^2]$ операций умножения чисел c_k на значение (e_ν, He_k). Таким образом, общее число L_1 элементарных операций, требуемых для представления $c_k H_M e_k$, $k = n, n+1, \ldots, [M^{1/2\alpha}]$ в виде (19), оценивается сверху величиной

$$L_1 \ll \sum_{k=n}^{[M^{1/2\alpha}]} \frac{M^{1/\alpha}}{k^2} = M^{1/\alpha} \sum_{k=n}^{[M^{1/2\alpha}]} \frac{1}{k^2} \asymp M^{1/\alpha}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt[\alpha]{M}}\right) \asymp$$

$$\asymp \frac{M^{1/\alpha}}{n} \asymp \frac{M^{1/\alpha}}{M^{1/3\alpha}} = M^{2/3\alpha}.$$

Подставляя (19) в (18), имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i = \sum_{k=n}^{[M^{1/2\alpha}]} \sum_{\nu=1}^{[M^{1/\alpha}/k^2]} d_{\nu k} e_\nu = \sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{k:\ M^{1/\alpha}/k^2 \geq i} d_{ik}.$$

Таким образом,

$$x_i = \sum_{k:\ M^{1/\alpha}/k^2 \geq i} d_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Из (20) следует, что для нахождения x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, нужно найти сумму $k \leq \sqrt{M^{1/\alpha}/i}$ слагаемых. Общее число элементарных операций, необходимых для нахождения всех x_i, $i = \overline{1, n}$, оценивается величиной

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{M^{1/\alpha}}{i}} = \sqrt{M^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \asymp M^{1/2\alpha}(\sqrt{n} - 1) \asymp$$

$$\asymp M^{1/2\alpha} M^{1/6\alpha} = M^{2/3\alpha}.$$

Таким образом, общее число элементарных операций, требуемых для определения всех коэффициентов x_i в представлении (16), не превышает величины $L = L_1 + L_2 \asymp M^{2/3\alpha}$. Лемма 2 доказана.

Будем искать решение уравнения (11) в виде

$$u = \sum_{i=1}^{2n} u_i \varphi_i + P_{n_\alpha} f. \tag{21}$$

Подставив его в (11), получим

$$\sum_{i=1}^{2n} u_i \varphi_i + P_{n_\alpha} f = H_M\left[\sum_{j=1}^{2n} u_j \varphi_j + P_{n_\alpha} f\right] + P_{n_\alpha} f$$

или

$$\sum_{i=1}^{2n} u_i \varphi_i = \sum_{j=1}^{2n} u_j H_M \varphi_j + H_M P_{n_\alpha} f. \tag{22}$$

Так как при $n = [M^{1/3\alpha}] + 1$ имеем $T_n(H_M) = H_M$, то

$$\begin{aligned} H_M \varphi_i &= T_n(H_M)\varphi_j = \sum_{i=1}^{2n} b_{ij}\varphi_i, \\ H_M P_{n_\alpha} &= \sum_{i=1}^{2n} f_i \varphi_i. \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя эти выражения в (22) и приравнивая коэффициенты при φ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, 2n$, получаем систему линейных уравнений для определения величин u_i:

$$u_i = \sum_{j=1}^{2n} b_{ij} u_j + f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{24}$$

В силу (13) и однозначной разрешимости уравнения (11) система (24) имеет решение, для нахождения которого достаточно, как известно, $L_3 \asymp (2n)^3 \asymp M^{1/\alpha}$ элементарных операций над b_{ij} и f_i.

По определению φ_i и $P_{n_\alpha} f$ принадлежат F_{n_α}. Тогда из леммы 2 следует, что для определения всех коэффициентов b_{ij} и f_i, $i, j = 1, 2, \ldots, 2n$, в виде (23) достаточно выполнить $L_4 \asymp 2n M^{2/3\alpha} \asymp M^{1/\alpha}$ элементарных операций над компонентами вектора $T_M(H, f)$. Таким образом, для нахождения коэффициента u_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, понадобится $L_3 + L_4 \asymp M^{1/\alpha}$ элементарных операций. Отметим, что для перехода от представления (21) к стандартному представлению (14) нужно выполнить еще $L_5 \asymp M^{1/\alpha}$ элементарных операций. Это означает, что для алгоритма A_M, при котором $A_M(T_M, H, f) = u$, имеет место включение

$$A_M \in \mathcal{A}_N(T_M), \; N \asymp M^{1/\alpha}. \tag{25}$$

Лемма 3. $E_N(\Phi^\beta, X) >> N^{-\alpha}$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1 из [4], устанавливается, что

$$E_N(\Phi^\beta, X) \geq c\,\delta_N(X_\gamma^\beta, X), \tag{26}$$

где $\delta_N(X_\gamma^\beta, X)$ — предтабличный поперечник шара X_γ^β радиуса γ в пространстве X. С другой стороны, из соотношения (28) [5, с. 184] и утверждения теоремы 2 [6, с. 240] следует

$$\delta_N(X_\gamma^\beta, X) \geq a_N(X_\gamma^\beta, X) \geq 2\beta_{N+1}^{-1}, \tag{27}$$

где $a_N(X_\gamma^\beta, X)$ – поперечник Александрова. Из (26), (27) и (1) имеем $E_N(\Phi^\beta, X) >> N^{-\alpha}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *На классе* Φ^β *справедливо соотношение* $E_N(\Phi^\beta, X) >> N^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

Доказательство. Утверждение теоремы 2 следует из леммы 3 (оценка снизу). Оценка сверху следует из теоремы 1, формулы (8) и (25). Теорема доказана.

4. Как следствие приведенных выше построений получим точный степенной порядок величины E_N для класса интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \equiv \int_0^{2\pi} H(t, \tau) z(\tau) d\tau + f(t) \tag{28}$$

с 2π-периодическими ядрами и свободными членами, имеющими по каждой переменной суммируемые в квадрате $(\psi, 0)$-производные в смысле А. И. Степанца [7, с. 25], $\psi(u) \asymp u^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

В самом деле, в качестве гильбертова пространства X выберем пространство $L_2(0, 2\pi)$ функций $f(t)$, суммируемых в квадрате на $(0, 2\pi)$ с обычной нормой, а в качестве ортонормированного базиса возьмем тригонометрическую систему

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2k}(t) = \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2k+1}(t) = \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим последовательность чисел $\beta_1 = 1$, $\beta_{2k} = \beta_{2k+1} = 1/\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Отметим, что при таком выборе пространства X, базиса $\{e_k\}$ и последовательности $\{\beta_k\}$ пространство X^β состоит из функций, имеющих суммируемую в квадрате $(\psi, 0)$-производную, а оператор D является оператором $(\psi, 0)$-дифференцирования. Кроме того, класс $\mathcal{H}^\beta$ содержит интегральные операторы, ядра $H(t, \tau)$ которых имеют частные $(\psi, 0)$-производные $D_\tau^\psi D_t^\psi H(t, \tau)$, где D_τ^ψ, D_t^ψ — операторы частного $(\psi, 0)$-дифференцирования по переменным τ и t соответственно. Класс интегральных уравнений (28) с такими операторами и свободными членами $f(t)$, имеющими ограниченные в $L_2(0, 2\pi)$ $(\psi, 0)$-производные, обозначим через Φ^ψ.

Повторяя рассуждения из пп. 2, 3, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Для* $\psi(u) \asymp u^{-\alpha}$, $\alpha > 0$,

$$E_N(\Phi^\psi, L_2) \asymp \psi(N).$$

На классе Φ^ψ *оптимальный порядок величины* E_N *реализует алгоритм* A_N, $M \asymp N^\alpha$, *использующий в качестве информации значение коэффициентов Фурье ядра и свободного члена.*

Теорема 3 обобщает результаты [8] на случай уравнений Фредгольма с $(\psi, 0)$-дифференцируемыми ядрами и свободными членами.

1. *Трауб Дж., Вожьняковски Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
2. *Трауб Дж., Васильковский Г., Вожьняковски Х.* Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 184 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
4. *Переверзев С. В., Махкамов К. Ш.* Галеркинская информация, гиперболический крест и сложность операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 5. – С. 639–648.
5. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
6. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
7. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
8. *Переверзев С. В.* Гиперболический крест и сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн. – 1991. – **32**, № 1. – С. 107–115.

Получено 25.08.93