УДК 517.54

Д. Д. Илмурадов, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

A categorical analog of V. V. Stepanov theorem and new criteria for asymptotic differentiability of real functions are considered.

Розглядається категорний аналог теореми В. В. Степанова і нові критерії асимптотичної диференційовності дійсних функцій.

О дифференциальных свойствах действительных функций. Известная теорема В. В. Степанова [1] содержит необходимое и достаточное условия дифференцируемости почти всюду на некотором множестве $E \subset D$, $D \subset \mathbb{R}^m$, функции $f\colon D \to \mathbb{R}$. Таким условием является соотношение

$$\varlimsup_{\substack{x' \to x \\ x \in D}} \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} < \infty.$$

Категорный аналог этой теоремы доказан в работе [2] для функции двух переменных. При этом требовалось существование производных по фиксированным направлениям, т. е. частных производных. Это приводится в виде следующей теоремы.

Теорема*. *Для того чтобы непрерывная функция $f(x, y)$, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^2$, имела полный дифференциал на множестве E не первой категории в D, необходимо и достаточно, чтобы в точках множества не первой категории существовали одноточечные пределы частных производных множеств.*

В настоящей работе доказывается категорный аналог этой теоремы для функции m переменных и предполагается произвольность направлений, по которым существуют производные. Введем сначала следующее понятие.

Определение 1. *Некоторое свойство P имеет место почти всюду на множестве $E \subset D \, (\subset \mathbb{R}^m)$ в категорном смысле, если оно выполняется для всех точек $x \in E$, за исключением, возможно, его подмножества первой категории (относительно $D \subset \mathbb{R}^m$).*

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывная функция f была дифференцируема почти всюду на $E \subset D \subset \mathbb{R}^m$ в категорном смысле, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на E (в категорном смысле) существовали производные функции f вдоль m линейно независимых направлений.*

Доказательство. Необходимость очевидна, так как если функция f дифференцируема, то она имеет производные по всем направлениям.

Достаточное условие, очевидно, следует доказывать для случая, когда E не первой категории, что мы и предположим.

Известно, что если в этом случае E является борелевским множеством (B-множеством), то D содержит открытое плотное множество $O'\colon O' \subset D$, в каждой компоненте которого множество E либо первой, либо всюду (в этой же компоненте) второй категории.

Приведем аналог этого утверждения для произвольного множества $E \subset D$ не первой категории. Прежде всего, очевидно, что $O' = \operatorname{Int} \overline{E} \neq \emptyset$. Рассмотрим все точки $x \in O'$, для каждой из которых существует окрестность $U(x) \subset \subset O'$ такая, что порция $E \cap U(x)$ первой категории. Обозначим объединение всех таких окрестностей через U: $U = \bigcup_x U(x)$. Известно, что в этом случае найдется (так как пространство $\mathbb{R}^m$ со счетной базой) не более чем счетная совокупность $\{U(x_k)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, для которой

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U(x_k) = \bigcup_k U_k$$

Тогда множество

$$E \cap U = \bigcup_k (E \cap U_k)$$

является множеством первой категории. Так как U — открытое множество, то его граница $\partial U = \overline{U} \setminus U$ нигде не плотна в D, следовательно, и $E \cap \overline{U} = (E \cap U) \cup (E \cap (\overline{U} \setminus U))$. Отсюда следует, что $O_1 = O' \setminus \overline{U}$ является непустым открытым множеством. Из нашего построения вытекает, что в каждой окрестности любой точки $x \in O_1$ множество E не первой категории.

Покажем теперь, что O_1 содержит другое плотное в нем открытое множество O, в котором функция f локально липшицева. В самом деле, пусть $d \subset O_1 (\subset \mathbb{R}^m)$ — произвольный шар; так как $E \cap d$ не первой категории, по лемме 6 [3] найдется другой шар $d' \subset d$, в котором f удовлетворяет условию Липшица. Отсюда и из произвольности выбранного шара $d \subset O_1$ следует сформулированное утверждение. Из построения очевидно, что часть множества E вне O-первой категории. Обозначим через $H \subset O$ множество всюду в O второй категории точек полунепрерывности сверху многозначного отображения $A \to \operatorname{contg}^s_\Gamma$, где $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — график функции f, и $A = A(x, u)$ — его точка. Рассмотрим произвольную точку $x \in O$ и окрестность $V(x)$, в которой f является липшицевой функцией. Тогда $H_1 = H \cap V(x)$ есть множество второй категории в $V(x)$ и $E \setminus (E \cap H_1)$ первой категории. Покажем, что в точках множества $E \cap H_1$ функция f дифференцируема. Пусть $\operatorname{contg}^s_\Gamma A$ есть контингенция графика липшицевой функции f в его точке A и она ограничена кривыми $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$, которые также являются липшицевыми. Пусть, кроме того, $x_0 \in E \cap H_1$ и $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m\}$ — m-репер в точке x_0, вдоль направлений которого f имеет производные. Это означает, что в соответствующих точках φ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ сферы $S^m(A_0) \equiv S^m_0$, где $A_0 = (x_0, u_0)$, функции $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ совпадают: $P(\varphi_k) = Q(\varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть $\sigma \subset S^m_0$ большая $(m-1)$-сфера, проходящая через φ_k; в силу линейной независимости направлений репера $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m\}$ сфера σ определяется однозначно. Покажем, что $\operatorname{contg}^s_\Gamma A_0$ совпадает с σ. В противном случае существовала бы точка контингенции $\operatorname{contg}^s_\Gamma A_0$ вне σ; но тогда по теореме 4 [4] существовала бы последовательность точек дифференцируемости $\{x_k\}$, $x_k \to x_0$, таких, что предел больших сфер с контингенцией в них $\{\sigma(x_k)\}$ являлся бы также сферой σ_0 и содержал бы эту точку. Но σ_0 содержит и все точки φ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, т. е. совпадает с σ, что противоречит предположению.

Значит, $\operatorname{contg}^s_\Gamma A_0$ есть $(m-1)$-мерная сфера, и следовательно, f-дифференцируема всюду на $E \cap H_1$. Теорема доказана.

Обобщение теоремы В. В. Степанова об асимптотической дифференцируемости функций. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, — непрерывная функция; обозначим через Γ график ее в $\mathbb{R}^{m+1}$, и пусть $A \in \Gamma$ — произвольная ее точка.

Легко показать, что $\operatorname{contg}^s_\Gamma A = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{M}_\varepsilon$, где M_ε — проекция на единичную сферу проколотой ε-окрестности точки $A = A(x, u) \in \Gamma$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in D \subset \mathbb{R}^m$.

Введем другой, отличный от классического, вид контингенции для графика Γ:

$$\widehat{\operatorname{contg}}^c_\Gamma A = \bigcup_{\varphi \in S^{m-1}} [\,Q(\varphi), P(\varphi)\,],$$

где $P(\varphi)$, $Q(\varphi)$ — самое верхнее и самое нижнее производные числа. Проекцию $\widehat{\operatorname{contg}}^c_\Gamma A$ на единичную сферу, как и раньше, обозначим через $\widehat{\operatorname{contg}}^s_\Gamma A$. Здесь, вообще говоря, функции $Q(\varphi)$ и $P(\varphi)$ не являются полунепрерывными и $\widehat{\operatorname{contg}}^c_\Gamma A$ может быть несвязна. Из определения $\widehat{\operatorname{contg}}^c_\Gamma A$ следует, что она регулярна, т. е. каждое сечение образующей цилиндра не пусто и есть компакт. Но несчетное объединение компактов не всегда является компактом.

Теорема 2. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^1$, $D \subset \mathbb{R}^2$, — непрерывная функция. Пусть $E \subset D$ — множество всех точек, в которых $\widehat{\operatorname{contg}}^s_\Gamma A$, $A \in \Gamma$, содержит по крайней мере два неполных полумеридиана. Тогда множество E есть множество типа F_σ и почти всюду на E функция f асимптотически дифференцируема. При этом, если $\operatorname{Int} E \neq \varnothing$, т.е. E не первой категории, то на $\operatorname{Int} E$ существует всюду плотное открытое множество O, на котором функция f дифференцируема почти всюду в обычном смысле.*

Доказательство. По условию теоремы $\widehat{\operatorname{contg}}^s_\Gamma A$, $A \in E$, по направлениям $t_i(A)$, $i = 1, 2$, содержит два неполных полумеридиана. Тогда по направлениям, по которым полумеридианы не полны, верхний или нижний пределы разностного отношения ограничены, т. е. либо

$$\overline{\lim}\ \frac{f(z') - f(z)}{|z' - z|} < +\infty, \tag{1}$$

либо

$$\underline{\lim}\ \frac{f(z') - f(z)}{|z' - z|} > -\infty, \tag{2}$$

где $z' \in t_i(z)$, $i = 1, 2$.

Разобьем множество E на три подмножества: E^{+-}, E^{++}, E^{--}:

1) $z \in E^{--}$, если в обоих направлениях $t_1(z)$, $t_2(z)$ выполняется соотношение (1);

2) $z \in E^{++}$, если в обоих направлениях выполняется (2);

3) $z \in E^{+-}$, если вдоль одного из $t_1(z)$, $t_2(z)$ выполняется (1), а для другого — (2).

Очевидно, $E = E^{+-} \cup E^{++} \cup E^{--}$. Покажем, что каждое из слагаемых здесь является объединением замкнутых множеств. Зафиксируем определенный луч

t в плоскости z и введем множества $E^{+-}(p, q, n_1, n_2) = E'$, а именно: $z \in E'$ если:

1) $|[t_i(z), t] - n_i/100p| \le 1/100p$, $i = 1, 2$;

2) $1/100p \le [t_1(z), t_2(z)] \le \pi - 1/100p$;

3) $(f(z') - f(z))/|z' - z| \ge -q$ для всех $z' \in t_1(z)$ таких, что $0 < |z' - z| \le \le 1/q$ и $(f(z') - f(z))/|z' - z| \le q$ для всех $z' \in t_2(z)$ таких, что $0 < |z' - z| \le \le 1/q$.

Аналогично вводим множества $E^{++}(p, q, n_1, n_2)$, $E^{--}(p, q, n_1, n_2)$. Легко видеть, что каждое из этих множеств замкнуто; это следует из непрерывности f. Далее, очевидно, $E^{++} = \bigcup_{pqn_i} E^{++}(p, q, n_1, n_2)$ и т. д., и $E = E^{++} \cup E^{+-} \cup \cup E^{--}$; тем самым все множества E^{++}, E^{+-}, E^{--}, E типа F_σ.

Выберем систему координат, для которой ось Ox является биссектрисой угла $t_1(z_0)$, $t_2(z_0)$; из условий $[\widehat{t_1(z_0), t_2(z_0)}] \le 2/p$ и $|\widehat{t_i(z_0), t_i(z')}| < 1/100p$ стороны углов $t_1(z')$, $t_2(z')$ располагаются одинаково: нижняя сторона в соответствующей нижней полуплоскости, верхняя — в верхней. Можем считать в качестве нижних сторон $t_1(z')$.

Рассмотрим пару вертикальных углов $V(z_0) = V_1 \cup V_2$ раствора меньше $1/10p$ с общей биссектрисой, совпадающей с осью ординат; по построению, лучи $t_i(z_0)$ лежат вне $V(z_0)$.

Рассмотрим такие случаи.

1. В одном из углов V_1 или V_2 нет точек множества $E^{++}(p, q, n_i)$. При этом, очевидно, в пространстве $\mathbb{R}^3$ двугранный угол над соответствующим V_i не содержит графика функции $f|_{E'}$; следовательно, контингенция графика $f|_E$ не содержит точек этого двугранного угла.

2. Пусть теперь $z' \in E' \cap V_1$. Тогда луч $t_2(z')$ пересекает $t_1(z_0)$ в некоторой точке $\tilde{z}$;

$$\frac{f(z') - f(z)}{|z' - z|} = \frac{f(z') - f(\tilde{z}) + f(\tilde{z}) - f(z)}{|z' - z|} \le \frac{f(z') - f(\tilde{z})}{|z' - \tilde{z}|} \frac{|z' - \tilde{z}|}{|z' - z|} +$$

$$+ \frac{|f(z) - f(\tilde{z})|}{|\tilde{z} - z|} \frac{|z - \tilde{z}|}{|z' - z|} \le q\left(\frac{\sin a}{\sin \tilde{a}} + \frac{\sin a'}{\sin a}\right) \le q \frac{2m}{\sin 100\sigma},$$

где $m = \max(\max \sin \alpha, \max \sin \alpha')$,

$$\alpha' = [\widehat{|z' - \tilde{z}|, |z' - z|}], \quad \alpha = [\widehat{|\tilde{z} - z|, |z' - z|}], \quad \tilde{\alpha} = [\widehat{|z - \tilde{z}|, |z' - \tilde{z}|}].$$

Другими словами, над V_1 найдется конус (в данном случае), не содержащий точек графика $f|_{E'}$; тогда по известной теореме [5] функция f асимптотически дифференцируема на каждом $E^{+-}(p, q, n_i)$.

Случай $E^{++}(p, q, n_i)$, $E^{--}(p, q, n_i)$ сводится к рассмотренному следующим приемом: в каждой их точке один из лучей $t'_i(z)$ заменяем на луч противоположного направления, и для новой системы лучей $t'_1(z)$, $t'_2(z)$ рассуждения аналогичны.

Докажем теперь, что если $\operatorname{Int} E \ne \varnothing$, то найдется открытое всюду на $\operatorname{Int} E$ плотное множество, на котором функция f почти всюду дифференцируема в обычном смысле. Так как множество E типа F_σ, в любой окрестности точки из $\operatorname{Int} E$ найдется круг, совпадающий с одним из $E^{+-}(p, q, n_i)$. Можно предположить, что диаметр этого круга меньше чем $1/q$. Все предыдущие оценки приводят к тому, что для каждой точки z из этого круга найдется угол, над которым существует конус, не содержащий точек графика функции над всей окрестностью. Это же означает, что график функции f над всей этой окрестностью есть объединение не более чем счетного множества графиков липшицевых функций. Отсюда легко следует дифференцируемость почти всюду в этой окрестности функции f в обычном смысле [5].

Рассмотрим теперь некоторый многомерный аналог этой теоремы. Обозначим через $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+1}$ график однозначной непрерывной функции $f: D \to \mathbb{R}^1$, $D \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема 3. *Пусть $E \subset D$ — множество всех точек, в которых $\widehat{\operatorname{contg}}{}^s_\Gamma A$, $A \in \Gamma$, содержит неполные полумеридианы вдоль m линейно независимых направлений. Тогда множество E есть множество типа F_σ; при этом, если $\operatorname{Int} E \neq \varnothing$ (другими словами, $E \subset D$ не первой категории), то на $\operatorname{Int} E$ существует всюду плотное открытое множество O, на котором функция f дифференцируема почти всюду.*

Доказательство. Для каждого натурального p построим конечное замкнутое покрытие $H_p = \{H_p^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \ldots, j_p$, единичной сферы S^{m-1}: $\sum x_k^2 = 1$ такое, что две произвольные точки из $H_p^{(j)}$ видны из ее центра под углом меньше $1/1800p$. Будем говорить, что луч τ принадлежит множеству $H_p^{(j)}: \tau \in H_p^{(j)}$, если параллельный ему радиус сферы S^{m-1} пересекает $H_p^{(j)}$. Обозначим через

$$E(n_1, n_2, \ldots, n_m, k_1, k_2, \ldots, k_{m_1}, k_1', k_2', \ldots, k_{m_2}' p, q) =$$
$$= E(n_\mu, k_\mu, k_\mu', p, q),\ n_k \leq j_p,\ k = 1, \ldots, m,$$

множество точек $x \in E$, удовлетворяющих условиям:

А) $t_k(x) \in H_p^{(n_k)}$;

Б) $\Delta(x) > 900\sigma m^{m+1}$, где Δ — объем единичного параллелепипеда на $t(x)$;

В) $(B = B' \cup B'')$: для целых неотрицательных m_1, m_2 таких, что $m = m_1 + m_2$,

$B' = B(k_1', k_2', \ldots, k_{m_1}')$:

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \geq -q/2 \tag{3}$$

для всех x' лучей $t_k(x)$, $k = k_1, k_2, \ldots, k_{m_1}$, удовлетворяющих условиям $0 < |x' - x| \leq 1/q$;

$B'' = B(k_1', k_2', \ldots, k_{m_2}')$:

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \leq q/2 \tag{4}$$

для всех $x' \in t_k(x)$, $k = k_1', k_2', \ldots, k_{m_2}'$, $0 < |x' - x| \leq 1/q$, причем как в B', так и в B'' расстояние от x до границы ∂D области D не меньше $2/q: p(x, \partial D) \geq 2/q$.

Легко видеть, что каждое множество $E(n_\mu, k'_\mu, k''_\mu, p, q)$, $m \le j_p$, $k_i \le m$, $m = m_1 + m_2$. Отсюда следует, что E — множество типа F_σ.

Пусть теперь $\operatorname{Int} E \ne \varnothing$; тогда в каждой подобласти $d \subset \operatorname{Int} E$ найдется другая область d', состоящая из точек одного определенного $E(n_\mu, k'_\mu, k''_\mu, p, q)$. Мы можем предположить, что d' есть шар диаметра $\le 1/q$. Предположим сначала, что $m_2 = 0$ и $m_1 = m$, т. е. для всех направлений $t_k(x)$, $k = 1, \dots, m$, имеем неравенство (в одну сторону)

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \ge -q/2$$

при $0 < |x' - x| \le 1/q$, $x' \in t_k(x)$.

В силу леммы 3 [3] существует шаровой конус Q такой, что параллельно перенесенный конус Q в точку (обозначим его через $Q(x)$) имеет следующее свойство: любая точка ξ вблизи вершины конуса $Q(x)$ достижима из любой другой точки $x' \in Q(x) \cap d'$; существует ломаная $\xi^{(0)}\xi^{(1)} \dots \xi^{(s-1)}x$; принадлежащая выпуклой оболочке лучей $t_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\xi^{(0)} = \xi$, $\xi^{(s)} = x$, такая, что каждое из звеньев $\xi^{(l)}\xi^{(l+1)}$ есть часть какого-либо луча $t_k(\xi^{(l)})$.

Так как при фиксированной x'

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} = \frac{f(x') - f(\xi)}{|x' - x|} + \frac{f(\xi) - f(x)}{|x' - x|},$$

и из того, что ξ можно выбрать сколь угодно близкой к x, достаточно оценить первое слагаемое. Имеем

$$\frac{f(x') - f(\xi)}{|x' - x|} = \frac{f(x') - f(\xi^{(s-1)})}{|x' - x|} + \frac{f(\xi^{(s-1)}) - f(\xi^{(s-2)})}{|x' - x|} + \dots$$

$$\dots + \frac{f(\xi^{(1)}) - f(\xi)}{|x' - x|} = \frac{f(x') - f(\xi^{(s-1)})}{|x' - \xi^{(s-1)}|} \frac{|x' - \xi^{(s-1)}|}{|x' - x|} + \dots$$

$$\dots + \frac{f(\xi^{(1)}) - f(\xi)}{|\xi^{(1)} - \xi|} \frac{|\xi^{(1)} - \xi|}{|x' - x|} \ge -q/2 \left(\sum_k^{s-1} \left| \xi^{(k+1)} - \xi^{(k)} \right| \right) (|x' - x|)^{-1}$$

По лемме 2 [3] можно считать, что числитель написанной дроби ограничен сверху числом $3\sqrt{m}\,|x' - x| + r$, где $r = |\xi - x|$. Следовательно,

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \ge -q/2\ (3\sqrt{m}\,)$$

для всех точек x' конуса $Q(x)$.

Аналогично, в случае, когда $m_1 = 0$, можно показать, что для точек конуса $Q(x)$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x') - f(x)}{|x' - x|} \ge -q/2\left(3\sqrt{m}\right).$$

Пусть теперь $m_1 \ne 0$, $m_2 \ne 0$. При этом в каждой точке $x \in d'$ репер $t(x) = \{t_1(x), \dots, t_m(x)\}$ заменим на другой репер $t'(x)$, в котором некоторые t'_k направлены противоположно t_k; именно: если на t_k выполняется неравенство (4), то заменяем на $t'_k = -t_k$, на котором, следовательно, будет выполняться неравенство (3). Но тогда снова применимы предыдущие оценки, показывающие, что в каждой точке $x \in d'$ контингенция графика Γ функции f не содержит некоторого конуса. Отсюда [5, 4] и следует утверждение теоремы.

Теперь докажем теорему из одномерного анализа.

Теорема 4. *Пусть m_ε для некоторого $\varepsilon = \varepsilon_0$ является открытым (непустым) множеством. Тогда все m_ε при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ совпадают между собой: $m_{\varepsilon_0} \equiv m_\varepsilon$, а потому $m_{x_0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{m}_\varepsilon = \overline{m}_{\varepsilon_0}$, и следовательно, функция f недифференцируема в этой точке.*

Доказательство. Определим сначала m_ε, m'_ε:

$$m_\varepsilon = \{(f(x+h) - f(x))/h, \quad 0 < |h| \le \varepsilon\},$$

$$m'_\varepsilon = \{(f(x+h) - f(x))/h, \quad 0 < |h| \le \varepsilon\}.$$

Итак, пусть проекция графика функции f на соответствующую ось $O\xi$ есть интервал (α, β). Рассмотрим произвольное $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $m_{\varepsilon_0} = m_\varepsilon \cup m_{[\varepsilon, \varepsilon_0]}$, где $m_{[\varepsilon, \varepsilon_0]} = \{(f(x_0 + h) - f(x_0))/h, \ \varepsilon \le |h| \le \varepsilon_0\}$, и следовательно, является связным компактом, а потому некоторым отрезком $[\alpha', \beta']$, принадлежащим (α, β). Отсюда следует, что часть интервала (α, β), вне $[\alpha', \beta']$, принадлежит m_ε и они являются непересекающимися интервалами. Учитывая связности m_ε, можно сделать вывод о том, что $[\alpha', \beta']$, т. е. $m_{[\varepsilon, \varepsilon_0]}$, тоже принадлежит m_ε. Тогда $m_\varepsilon = m_\varepsilon \cup m_{[\varepsilon, \varepsilon_0]} = m_{\varepsilon_0}$, т.е. они совпадают. Если все m_ε, $\varepsilon < \varepsilon_0$, совпадают с m_{ε_0}, то

$$m_{x_0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{m}_\varepsilon = \overline{m}_{\varepsilon_0} = [\alpha, \beta],$$

где $\alpha \ne \beta$. Значит, функция f недифференцируема в этой точке.

Легко видеть, с другой стороны, что для дифференцируемой функции множества m_ε и m'_ε могут быть различными не открытыми связными множествами. Во всяком случае, это утверждение показывает, что знание структуры множеств m_ε, т. е., фактически, структуры множеств конечных разностных отношений (что было неизвестно в каком-то смысле) позволяет говорить о дифференцируемости или недифференцируемости функции. Эта теорема переносится и на многомерный случай, в частности, для случая комплексной функции и множеств $M_\varepsilon = \{(f(z+h) - f(z))/h, \ 0 < |H| \le \varepsilon\}$. Все это имеет место, конечно, лишь в случае, когда в определении M_ε значение модуля h может равняться ε. Легко видеть, например, что для аналитических функций $f(z)$ множества M_ε всегда есть замкнутая область с выколотой точкой (для достаточно малых ε).

1. *Stepanoff W.* Sur les conditions de l'existence de la differentielle totale // Мат. сб. – 1925. – **32**. – С. 511–526.
2. *Горленко С. В.* Про деякі диференціальні властивості дійсних функцій // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 2. – С. 146–150.
3. *Трохимчук Ю. Ю.* О производных по направлению функций многих переменных // Там же. – 1965. – **17**, № 6. – С. 67–79.
4. *Илмурадов Д. Д.* Категорная теорема о контингенциях гиперповерхностей евклидового пространства // Там же. – 1993. – **45**, № 3. – С. 378–383.
5. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.

Получено 30.06.93