УДК 517.5

А. С. Романюк, канд. физ.-мат. маук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_q*

We study Kolmogorov diameters of Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables with low smoothness in a space L_q, $1 < q < \infty$. The behavior of diameters of indicated classes with critical indices of smoothness is considered.

Вивчаються колмогоровські поперечники класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості в просторі L_q, $1 < q < \infty$. Досліджується також поведінка поперечників цих класів з критичними показниками гладкості.

Б. С. Кашин [1], изучая колмогоровские поперечники $d_n(W^r_1, L_q)$ классов периодических функций одной переменной W^r_1 при $2 < q < \infty$, $1 - 1/q < r < 1$, установил, что их поведение при $r \leq 1$ (малая гладкость) существенно отличается от случая $r > 1$ (большая гладкость). Е. Д. Куланин [2] обобщил результат Б. С. Кашина на классы W^r_p, а также получил порядковые оценки сверху и снизу на классах W^r_p функций многих переменных [3] в предположении, что $r \in R^m$, $r = (r_1, \dots, r_1)$, $r_1 > 0$. Позже Э. М. Галеев [4] исследовал колмогоровские поперечники классов W^r_p функций многих переменных малой гладкости в случае $r = (r_1, \dots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, m}$. Применяемые им рассуждения позволили уточнить оценки из [3], а также установить порядковые оценки колмогоровских поперечников классов функций многих переменных H^r_p [5].

В настоящей работе изучается поведение поперечников $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ при $1 < p \leq 2 < q < \infty$ и $2 \leq p < q < \infty$. Отметим, что порядки величин $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ тех же значений параметров p, q и θ для классов $B^r_{p,\theta}$ большой гладкости установлены в [6]. Там же приведена соответствующая библиография.

Развивая методы, которые применялись в перечисленных выше работах, в настоящей статье получены порядковые оценки поперечников классов, которые могут быть как более узкими, чем W^r_p, так и занимать промежуточное положение между W^r_p и H^r_p (при $\theta = \infty$ $H^r_p = B^r_{p,\infty}$).

Кроме того, в процессе получения оценок сверху удалось уточнить известные оценки сверху на классах H^r_p [5]. Устанавливаются также двусторонние оценки поперечников $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ для случаев „критических показателей" гладкости. При изложении результатов будем пользоваться обозначениями и определениями из [6–8], предполагая при этом также выполненным условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx_j = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

Для удобства напомним некоторые обозначения и известные утверждения, которые будут использоваться далее.

Пусть R^m — евклидово пространство с элементами

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m,$$

$L_p(\pi_m)$ — пространство периодических функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$, заданных на

$$\pi_m = \prod_{j=1}^{m} [-\pi; \pi]$$

с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad p \in (1, \infty).$$

Для $s = (s_1, \dots, s_m)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, m}$, положим

$$\rho(s) = \{ k : k = (k_1, \dots, k_m), \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1, m} \},$$

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} f(t) e^{-i(k, t)} dt.$$

Пусть l_p^m обозначает пространство с нормой

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} |x_i|, & p = \infty, \end{cases}$$

и B_p^m — единичный шар в l_p^m. Если P — подмножество целочисленной решетки, то $|P|$ обозначает число элементов P.

Лемма А [9]. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{s \in S} \delta_s(f, x), \quad s \in N^m, \quad 1 < p < \infty.$$

Тогда

$$|S|^{(1/2 - 1/p)_-} \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s(f, x)\|_p^p \right)^{1/p} \ll \|f\|_p \ll$$

$$\ll |S|^{(1/2 - 1/p)_+} \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s(f, x)\|_p^p \right)^{1/p},$$

где $a_- = \min\{a, 0\}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Лемма Б [10, с. 25]. *Пусть заданы* $1 \le p < q < \infty$ *и* $f \in L_q(\pi_m)$. *Тогда*

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_s \left(\|\delta_s(f, x)\|_p 2^{\|s\|_1 (1/p - 1/q)} \right)^q \right)^{1/q},$$

где $\|s\|_1 = s_1 + \dots + s_m$.

Лемма В [11]. *Пусть* $n < m$, $2 \le p < q < \infty$, $\beta = (1/p - 1/q)/(1 - 2/q)$. *Тогда* $d_n(B_p^m, l_q^m) \asymp \min\{1, m^{2\beta/q} n^{-\beta}\}$.

Теорема А [9]. *Между пространством тригонометрических полиномов вида*

$$f(t) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{i(k,t)}$$

и пространством $R^{2^{(s,1)}}$ *устанавливается изоморфизм путем сопоставления функции* $f(t)$ *вектора*

$$\delta_s f^j = \{f_n(\tau_j)\} \in R^{2^{(s,1)}}, \quad f_n(t) = \sum_{\operatorname{sgn} k_l = \operatorname{sgn} n_l} c_k e^{i(k,t)}, \quad l = \overline{1,m},$$

$$n = (\pm 1, \ldots, \pm 1) \in R^m, \;\; \tau_j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \ldots, \pi 2^{2-s_m} j_m),$$

$$j_i = 1, 2, \ldots, 2^{s_i - 1}, \; i = \overline{1,m},$$

и порядковое равенство

$$\delta_s(f, x)_p \asymp \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left| \delta_s f^j \right|^p \right)^{1/p}, \quad p \in (1, \infty).$$

Для сокращения записи формулировок результатов введем следующие обозначения:

$$\omega_1 = \omega_1(r_1, p, q, \theta) = \frac{q}{2}\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q} - \frac{1}{\theta};$$

$$\omega_2 = \omega_2(r_1, p, q, \theta) = r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}; \quad \omega_3 = \max\{\omega_1, \omega_2\};$$

$$\omega_4 = \omega_4(r_1, p, q, \theta) = \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{l}\right)\beta^{-1} + 1\right)\frac{q}{2}\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+,$$

где

$$l = \begin{cases} p, & 1 \le \theta < p, \\ \theta, & p \le \theta < q, \\ q, & \theta \ge q, \end{cases} \quad \beta = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{2}{q}\right)^{-1};$$

$$\omega_5 = \omega_5(r_1, p, q, \theta) = \frac{q}{l_1'}\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+,$$

$$l_1' = l_1/(l_1 - 1), \quad l_1 = \begin{cases} 2, & 1 \le \theta < 2, \\ \theta, & 2 \le \theta < q, \\ q, & \theta \ge q. \end{cases}$$

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *При* $2 \le p < q < \infty$, $1/p - 1/q < r_1 < \beta$, $1 \le \theta \le \infty$ *справедливо соотношение*

$$M^{-q(r_1 - 1/p + 1/q)/2} (\log^{\nu-1} M)^{\omega_3} \ll d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll$$

$$\ll M^{-q(r_1 - 1/p + 1/q)/2} (\log^{\nu-1} M)^{\omega_4}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1/p - 1/q < r_1 < 1/p$. *Тогда при* $1 \le \le \theta \le \infty$

$$M^{-q(r_1 - 1/p + 1/q)/2}(\log^{\nu-1} M)^{\omega_3} << d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) <<$$

$$<< M^{-q(r_1 - 1/p + 1/q)/2}(\log^{\nu-1} M)^{\omega_5}.$$

Прежде чем перейти к доказательству, сделаем некоторые замечания.

1. С помощью несложных преобразований и с учетом условий на параметры r_1, p, q, θ нетрудно убедиться, что:

а) при $1 \le \theta \le 2$ $\omega_3 = \omega_2 = r_1 - 1/p + 1/q$;

б) при $\theta \ge q$ $\omega_3 = \omega_1 = q(r_1 - 1/p + 1/q)/2 + 1/q - 1/\theta$.

2. Из полученных в теоремах 1 и 2 оценок следуют точные порядки поперечников классов $B^r_{p,\theta}$ в одномерном случае, а также в том случае, когда координаты вектора r все разные $(\nu = 1)$. Кроме того, легко видеть, что при $1 \le \le \theta \le 2$ и стремлении параметра q к 2 различие в оценках сверху и снизу в теореме 2 уменьшается и в пределе при $q = 2$ получаем точный порядок поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, L_2)$, совпадающий с установленным ранее в работе [8].

Доказательство *теорем* 1 *и* 2. Сначала получим оценку сверху в теореме 1. При этом будем использовать рассуждения, близкие к тем, которые применялись в работах [4–7]. Напомним, что в их основе лежит сведéние задачи оценки поперечника функционального класса к оценке поперечника соответствующего конечномерного множества. С этой целью для натуральных чисел n, k положим $S_{n,k} = \{s: s \in N^m, (s, 1) = k, (n-1) \le (s, \gamma) < n\}$ и

$$M_{n,k} = \begin{cases} |S_{n,k}|^{(1/2 - 1/l)\beta^{-1} + 1} 2^{2(\mu - \mu\alpha + k\alpha)/q}, & k \le n, \ n \le \mu, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{1}$$

где μ находится из условия $\mu^{(\nu-1)((1/2 - 1/l)\beta^{-1} + 1)} 2^{2\mu/q} \asymp M$, $\alpha > 0$ — число, которое выбирается соответствующим образом.

Согласно (1) будем иметь

$$\sum_{n,k} M_{n,k} = \sum_{n<\mu} \sum_{k \le n} |S_{n,k}|^{(1/2 - 1/l)\beta^{-1} + 1} 2^{2(\mu - \mu\alpha + k\alpha)/q} \le$$

$$\le \sum_{n<\mu} n^{(\nu-1)((1/2 - 1/l)\beta^{-1} + 1)} 2^{2(\mu - \mu\alpha + n\alpha)/q} \asymp$$

$$\asymp \mu^{(\nu-1)((1/2 - 1/l)\beta^{-1} + 1)} 2^{2\mu/q} \asymp M.$$

Далее, пусть $\mathfrak{T}_{n,k}$ — подпространство полиномов с гармониками из множества

$$Q_{n,k} = \bigcup_{s \in S_{n,k}} \rho(s)$$

и $\|S_{n,k}\|$ — число элементов в $Q_{n,k}$. Заметим, что $\|S_{n,k}\| = 2^k |S_{n,k}|$. Тогда для $f \in B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_{n,k}$ при $1 \le \theta \le p$ в силу неравенства Йенсена при $a_k \ge 0$

$$\left(\sum_k a_k^{c_2}\right)^{1/c_2} \le \left(\sum_k a_k^{c_1}\right)^{1/c_1}, \quad c_2 \ge c_1 > 0,$$

а также теоремы А будем иметь

$$1 \geq \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in S_{n,k}} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{r_1 n} \left(\sum_{s \in S_{n,k}} \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \geq 2^{r_1 n} \left(\sum_{s \in S_{n,k}} \|\delta_s(f,x)\|_p^p \right)^{1/p} \asymp$$

$$\asymp 2^{r_1 n - k/p} \left(\sum_{s \in S_{n,k}} \sum_{j=1}^{2^k} \left|\delta_s f^j\right|^p \right)^{1/p}.$$

Отсюда заключаем, что если $f \in B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_{n,k}$, то должно выполняться соотношение

$$\left(\sum_{s \in S_{n,k}} \sum_{j=1}^{2^k} \left|\delta_s f^j\right|^p \right)^{1/p} \ll 2^{-r_1 n + k/p}. \tag{2}$$

Аналогично, воспользовавшись неравенством Гельдера, устанавливаем, что если $f \in B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_{n,k}$ и $\theta > p$, то

$$\left(\sum_{s \in S_{n,k}} \sum_{j=1}^{2^k} \left|\delta_s f^j\right|^p \right)^{1/p} \ll 2^{-r_1 n + k/p} |S_{n,k}|^{1/p - 1/\theta}. \tag{3}$$

Таким образом, каждой функции $f \in B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_{n,k}$ на основании соотношений (2) и (3) можно поставить в соответствие шар радиуса $C_1 2^{-r_1 n + k/p}$, $C_1 > 0$, при $1 \leq \theta \leq p$ или $C_2 2^{-r_1 n + k/p} |S_{n,k}|^{1/p - 1/\theta}$, $C_2 > 0$, при $\theta > p$ пространства $l_p^{\|S_{n,k}\|}$. (Здесь и далее C_i, $i = 1, 2, \ldots$, — абсолютные постоянные, зависящие, возможно, только от r_1, p, q, θ.)

С другой стороны, в силу леммы А и теоремы А для $f \in L_q \cap \mathfrak{T}_{n,k}$ будем иметь

$$\|f\|_q = \left\| \sum_{s \in S_{n,k}} \delta_s(f,\cdot) \right\|_q \ll$$

$$\ll |S_{n,k}|^{1/2 - 1/q} \left(\sum_{s \in S_{n,k}} \|\delta_s(f,\cdot)\|_q^q \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp |S_{n,k}|^{1/2 - 1/q} 2^{-k/q} \left(\sum_{s \in S_{n,k}} \sum_{j=1}^{2^k} \left|\delta_s f^j\right|^q \right)^{1/q} =$$

$$= |S_{n,k}|^{1/2 - 1/q} 2^{-k/q} \left\|\delta_s f^j\right\|_{l_q^{\|S_{n,k}\|}}. \tag{4}$$

Проводя дискретизацию в соответствии с соотношениями (2) – (4), получаем

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll \sum_{n,k} d_{M_{n,k}}(B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_{n,k}, L_q \cap \mathfrak{T}_{n,k}) \ll$$

$$\ll \sum_{n<\mu} \sum_{k \leq n} 2^{-r_1 n + k/p - k/q} |S_{n,k}|^{1/2 - 1/q + (1/p - 1/\theta)_+} d_{M_{n,k}}(B_p^{\|S_{n,k}\|}, l_q^{\|S_{n,k}\|}) +$$

$$+ \sum_{n>\mu} \sum_{k \leq n} \left\| \sum_{s \in S_{n,k}} \delta_s(f,\cdot) \right\|_q = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2. \tag{5}$$

Оценим сначала слагаемое $\mathfrak{I}_2$. Пусть $1 \le \theta \le q$. Тогда в силу леммы Б

$$\Big\| \sum_{s \in S_{n,k}} \delta_s(f,x) \Big\|_q \ll \Big(\sum_{s \in S_{n,k}} \| \delta_s(f,x) \|_p^q \, 2^{\|s\|_1 (1/p - 1/q) q} \Big)^{1/q} \le$$

$$\le \Big(\sum_{s \in S_{n,k}} \| \delta_s(f,x) \|_p^\theta \, 2^{(s,r)\theta} \, 2^{-(s, r - 1/p - 1/q)\theta} \Big)^{1/\theta} \le$$

$$\le 2^{-r_1 n} 2^{k(1/p - 1/q)} \| f \|_{B^r_{p,\theta}} \le 2^{-r_1 n} 2^{k(1/p-1/q)},$$

и следовательно,

$$\mathfrak{I}_2 \ll \sum_{n > \mu} \sum_{k \le n} 2^{-r_1 n} 2^{k(1/p-1/q)} \le 2^{-\mu(r_1 - 1/p - 1/q)}. \tag{6}$$

Если же $\theta > q$, то, воспользовавшись для оценки внутренней суммы в $\mathfrak{I}_2$ неравенством Гельдера с показателем θ / q, находим

$$\mathfrak{I}_2 \ll \sum_{n > \mu} \sum_{k \le n} 2^{-r_1 n} 2^{k(1/p - 1/q)} |S_{n,k}|^{1/q - 1/\theta} \le$$

$$\le 2^{-\mu(r_1 - 1/p - 1/q)} \mu^{(\nu - 1)(1/q - 1/\theta)}. \tag{7}$$

Чтобы оценить $\mathfrak{I}_1$, разобьем область определения параметра θ на три части: а) $1 \le \theta < p$; б) $p \le \theta < q$; в) $q \le \theta \le \infty$.

а) $1 \le \theta < p$. Тогда, полагая в определении чисел $M_{n,k}$ $l = p$ и используя лемму В (учитывая при этом, что $\beta = 1/p - 1/q + 2\beta/q$), получаем оценку

$$d_{M_{n,k}}\big(B_p^{\|S_{n,k}\|}, l_q^{\|S_{n,k}\|}\big) \ll \| S_{n,k} \|^{2\beta/q} M_{n,k}^{-\beta} =$$

$$= (|S_{n,k}| 2^k)^{2\beta/q} |S_{n,k}|^{-1/2 + 1/p - \beta} 2^{-2\beta(\mu - \mu\alpha + k\alpha)/q} =$$

$$= |S_{n,k}|^{1/q - 1/2} 2^{2\beta k/q} 2^{-2\beta(\mu - \mu\alpha + k\alpha)/q}. \tag{8}$$

Далее, выбирая α в пределах $0 < \alpha < q(1 - r_1/\beta)/2$ и подставляя (8) в $\mathfrak{I}_1$, имеем

$$\mathfrak{I}_1 \ll \sum_{n < \mu} \sum_{k \le n} 2^{-r_1 n + k/p - k/q} |S_{n,k}|^{1/2 - 1/q} |S_{n,k}|^{1/q - 1/2} 2^{2\beta k/q} 2^{-2\beta(\mu - \mu\alpha + k\alpha)/q} =$$

$$= \sum_{n < \mu} \sum_{k \le n} 2^{-r_1 n + k\beta - 2\beta(\mu - \mu\alpha + k\alpha)/q} \ll 2^{-\mu(r_1 - \beta + 2\beta/q)} = 2^{-\mu(r_1 - 1/p + 1/q)}.$$

Сопоставляя полученную оценку с оценкой (6) и принимая во внимание, что $M \asymp \mu^{(\nu-1)((1/2 - 1/p)\beta^{-1} + 1)} 2^{2\mu/q}$ из (5), находим

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll \big(M^{-1} (\log^{\nu - 1} M)^{((1/2 - 1/p)\beta^{-1} + 1)}\big)^{q(r_1 - 1/p + 1/q)/2}. \tag{9}$$

Оценки в случаях б) и в) устанавливаются аналогично, если положить в определении чисел $M_{n,k}$ соответственно $l = \theta$ и $i = q$. Переходя к оценке сверху в теореме 2, замечаем, что при $1 < p \le 2$ $B^r_{p,\theta} \subset C_3 B_{2,\theta}^{r - 1/p + 1/2}$, $C_3 > 0$, а также, что при $p = 2$ $\beta = 1/2$. (Здесь $r - 1/p + 1/2$ обозначает вектор с координатами

$r_j - 1/p + 1/2$, $j = \overline{1,m}$.) Следовательно, проводя соответствующие преобразования, находим

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) << d_M(B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta}, L_q) << (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{q(r_1-1/p+1/q)/2}$$

при $1 \le \theta < 2$ и

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) << M^{q(r_1-1/p+1/q)/2} (\log^{\nu-1} M)^{q(r_1-1/p+1/q)/l' + (1/q-1/\theta)_+}$$

при $\theta \ge 2$.

Таким образом, оценки сверху в теоремах 1 и 2 установлены.

Оценки снизу установим сначала в теореме 2. При этом достаточно рассмотреть случай $\nu = m$.

Пусть задано число $M \in N$. Подберем число μ из соотношения $\mu^{m-1} 2^{2\mu/q} \asymp M$ и положим $S = \{ s : (s, 1) = \mu \}$. Множество функций с гармониками из

$$K = \bigcup_{s \in S} \rho(s)$$

обозначим $\mathfrak{T}_\mu$; заметим при этом, что $|K| = \| S \| = |S| 2^\mu \asymp \mu^{m-1} 2^\mu$. Далее (см., например, [8]) достаточно получить оценку снизу величины $d_M(B^r_{p,\theta} \cap \cap \mathfrak{T}_\mu, L_q \cap \mathfrak{T}_\mu)$. Если $f \in \mathfrak{T}_\mu$, то согласно теореме А

$$\| f \|_{B^r_{p,\theta}} \asymp 2^{r_1 \mu} \left(\sum_{s \in S} \| \delta_s(f, x) \|^\theta_p \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{r_1 \mu} \left(\sum_{s \in S} \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left| \delta_s f^j \right|^p \right)^{\theta/p} \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{r_1 \mu - \mu/p} \left(\sum_{s \in S} \left(\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left| \delta_s f^j \right|^p \right)^{\theta/p} \right)^{1/\theta},$$

и следовательно, если $\forall\, s \in S$

$$\left(\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left| \delta_s f^j \right|^p \right)^{1/p} << 2^{-\mu r_1 + \mu/p} \mu^{-(m-1)/\theta},$$

то $f \in C_4 B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_\mu$, $C_4 > 0$.

Отсюда заключаем, что всякому шару $C_4 2^{-\mu r_1 + \mu/p} \mu^{-(m-1)/\theta} B^{2^\mu, |S|}_{p,\infty}$ из пространства $l^{2^\mu, |S|}_{p,\infty}$ радиуса $C_4 2^{-\mu r_1 + \mu/p} \mu^{-(m-1)/\theta}$ (определения $B^{2^\mu, |S|}_{p,\infty}$ и $l^{2^\mu, |S|}_{p,\infty}$ см., например, в [8]) соответствует единичный шар из пространства $B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_\mu$.

Далее, для $f \in L_q \cap \mathfrak{T}_\mu$ при $q \ge 2$ в силу леммы А и теоремы А находим

$$\| f \|_q >> \left(\sum_{s \in S} \| \delta_s(f, x) \|^q_q \right)^{1/q} \asymp \left(\sum_{s \in S} 2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left| \delta_s f^j \right|^q \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp 2^{-\mu/q} \left(\sum_{s \in S} \left\| \delta_s f^j \right\|^q_{l^{2^\mu}_q} \right)^{1/q} = 2^{-\mu/q} \left\| \delta_s f^j \right\|_{l^{2^\mu, |S|}_{q,q}}.$$

Таким образом, согласно установленному изоморфизму между функциональными классами $B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_\mu$ и единичными шарами $B^{2^\mu,|S|}_{p,\infty}$, а также между пространствами $L_q \cap \mathfrak{T}_\mu$ и $l^{2^\mu,|S|}_{q,q}$ будем иметь

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) >> d_M(B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_\mu, L_q \cap \mathfrak{T}_\mu) >>$$

$$>> 2^{-\mu r_1 + \mu/p - \mu q} \mu^{-(m-1)/\theta} d_M(B^{2^\mu,|S|}_{p,\infty}, l^{2^\mu,|S|}_{q,q}). \tag{10}$$

Далее потребуется следующее утверждение.

Лемма Г [5]. *Пусть* $2 \le q < \infty$, $1 \le p < \infty$. *Тогда существует константа* C_q, *зависящая только от* q, *такая, что при* $M \le C_q mk$

$$d_M(B^{m,k}_{p,\infty}, l^{m,k}_{q,q}) >> \min\{k^{1/q+1/2} m^{1/q} M^{-1/2}, k^{1/q}\}. \tag{11}$$

Принимая во внимание, что $M \asymp \mu^{m-1} 2^{2\mu/q}$, из (11) находим

$$d_M(B^{2^\mu,|S|}_{p,\infty}, l^{2^\mu,|S|}_{q,q}) >> \mu^{(m-1)/q},$$

откуда с учетом (10) получаем оценку

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) >> 2^{-\mu(r_1 - 1/p + 1/q)} \mu^{(m-1)/(1/q - 1/\theta)} \asymp$$

$$\asymp M^{-q(r_1 - 1/p + 1/q)/2} (\log^{m-1} M)^{\omega_1}. \tag{12}$$

Покажем теперь, что в случае $1 \le \theta \le 2$ и для некоторых соотношений между r_1, p, q и $2 < \theta < q$ оценка (12) допускает уточнение. По заданному M выберем μ из соотношения $\mu^{m-1} 2^\mu \asymp M^{q/2}$ и определим множество S и подпространство $\mathfrak{T}_\mu$, как и выше.

Пусть $f \in L_p \cap \mathfrak{T}_\mu$. Тогда в силу теоремы А и неравенства Йенсена при $1 \le \le \theta \le p$ будем иметь

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in S} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|^\theta_p \right)^{1/\theta} \asymp 2^{r_1 \mu} \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s(f,x)\|^\theta_p \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{r_1\mu - \mu/p} \left(\sum_{s \in S} \left(\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^p \right)^{\theta/p} \right)^{1/\theta} \le 2^{r_1\mu - \mu/p} \left(\sum_{s \in S} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^\theta \right)^{1/\theta}.$$

Следовательно, если

$$\left(\sum_{s \in S} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^\theta \right)^{1/\theta} << 2^{-r_1\mu + \mu/p}, \tag{13}$$

то $f \in B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_\mu$.

С другой стороны, если $f \in L_q \cap \mathfrak{T}_\mu$, то согласно теореме А

$$\|f\|_q \asymp 2^{-\mu/q} \left(\sum_{s \in S} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^q \right)^{1/q} \tag{14}$$

и, проводя дискретизацию в соответствии с соотношениями (13), (14), получаем

$$d_M(B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_\mu,\ L_q \cap \mathfrak{T}_\mu) >> d_M(B_\theta^{\|S\|},\ l_q^{\|S\|})\, 2^{-r_1\mu+\mu/p-\mu q}, \tag{15}$$

где $B_\theta^{\|S\|}$ — единичный шар пространства $l_\theta^{\|S\|}$.

Для получения оценки потребуется следующая теорема.

Теорема Б [11]. *Пусть* $n<m$, *тогда при* $1\le p<2\le q<\infty$

$$d_n(B_p^m,\ l_q^m) \asymp \max\left\{m^{1/q-1/p},\ \min\left\{1,\ m^{1/q} n^{-1/2}\sqrt{1-n/m}\right\}\right\}.$$

Согласно этой теореме, с учетом того, что $\mu^{m-1}2^\mu \asymp M^{q/2}$, находим $d_M(B_\theta^{\|S\|},\ l_q^{\|S\|}) >> 1$, и, продолжая (15), получаем

$$d_M(B^r_{p,\theta} \cap \mathfrak{T}_\mu,\ L_q \cap \mathfrak{T}_\mu) >> 2^{-r_1\mu+\mu/p-\mu q} \asymp (M^{-q/2}\log^{m-1} M)^{r_1-1/p+1/q}.$$

Отметим, что поскольку при увеличении индекса θ классы $B^r_{p,\theta}$ расширяются, то полученная оценка справедлива и для $\theta>p$. С другой стороны, как было отмечено выше, при $\theta\ge q$ $\omega_1>\omega_2$, а при $1\le\theta\le 2$ $\omega_2>\omega_1$. Если же $2<\theta<q$, то $\omega_1>\omega_2$ или $\omega_2>\omega_1$. Оценки снизу в теореме 1 следуют из вложения $B_{2,\theta}^{r+1/2-1/p} \subset C_5\, B^r_{p,\theta}$, $C_5>0$, $p\ge 2$, и теоремы 2. Таким образом, теоремы 1 и 2 доказаны.

В связи с полученными результатами отметим следующее.

Известно, что $B^r_{p,\infty}=H^r_p$, и поэтому из теорем 1 и 2, полагая $\theta=\infty$, получаем такие утверждения.

Теорема 1′. *Если* $2\le p<q<\infty$, $1/p-1/q<r_1<\beta$, *то*

$$(M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{q(r_1-1/p+1/q)/2}(\log^{\nu-1}M)^{1/q} << d_M(H^r_p, L_q) <<$$

$$<< (M^{-1}(\log^{\nu-1}M)^{((1/2-1/p)\beta^{-1}+1)})^{q(r_1-1/p+1/q)/2}(\log^{\nu-1}M)^{1/q}.$$

Теорема 2′. *Если* $1<p\le 2<q<\infty$, $1/p-1/q<r_1<1/p$, *то*

$$(M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{q(r_1-1/p+1/q)/2}(\log^{\nu-1}M)^{1/q} << d_M(H^r_p, L_q) <<$$

$$<< (M^{-1}(\log^{\nu-1}M)^{2/q'})^{q(r_1-1/p+1/q)/2}(\log^{\nu-1}M)^{1/q}.$$

Отметим, что оценки сверху в теоремах 1′ и 2′ уточняют установленные ранее Э. М. Галеевым [5]. Кроме того, используя соответствующие вложения классов W^r_p и $B^r_{p,\theta}$ (см., например, [7]), из теорем 1 и 2 можно вывести также известные оценки величин $d_M(W^r_p, L_q)$ [4].

Перейдем к изучению поперечников классов $B^r_{p,\theta}$ с „критическими показателями" гладкости. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $r\in R^m$ *и* $r=(r_1,\dots,r_1)$, $r_1>0$, $1\le\theta\le\infty$. *Тогда:*
а) при $2\le p<q<\infty$ *и* $r_1=\beta$

$$M^{-r_1}(\log^{m-1}M)^{r_1+(1/2-1/\theta)_+} << d_M(B^r_{p,\theta},\ L_q) <<$$

$$<< M^{-r_1}(\log^m M)^{r_1+(1/2-1/\theta)_+};$$

б) при $1<p\le 2<q<\infty$ *и* $r_1=1/p$

$$M^{-1/2}(\log^{m-1}M)^{1/2+(1/2-1/\theta)_+} << d_M(B^r_{p,\theta},\ L_q) <<$$

$$\ll M^{-1/2}(\log^m M)^{1/2+(1/2-1/\theta)_+}.$$

Доказательство. Сначала получим оценку сверху для случая а). С этой целью по заданному M подберем число μ из соотношения $\mu^{m-1}2^{2\mu/q} \asymp M$ и введем множество $S_1 = \{s: s=(s_1, \dots, s_m), (s, 1) \le \mu\}$. Далее, каждому вектору $s \in S_1$ поставим в соответствие число $M_s = M(\log^m M)^{-1}$. Нетрудно проверить, что

$$\sum_{s \in S_1} M_s \asymp M.$$

Пусть $f(\cdot)$ — некоторая функция из класса $B^r_{p,\theta}$, L_M — линейное подпространство в L_q, экстремальное для $B^r_{p,\theta}$, и .

$$d(f(\cdot), L_M, L_q) \overset{\text{df}}{=} \inf_{a \in L_M} \|f(\cdot)-a(\cdot)\|_q$$

— расстояние от $f(\cdot)$ до L_M в L_q. Тогда в силу соотношения (см., например, [8, с. 1401])

$$\left\|\sum_s \delta_s(f,\cdot)\right\|_q \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f,\cdot)\|_q^2\right)^{1/2}, \quad q \ge 2,$$

а также теоремы А будем иметь

$$d(f(\cdot), L_M, L_q) \ll \left\{\sum_{(s,1)\le\mu}\left(d\left(\delta_s(f,\cdot), L_M, L_q\right)\right)^2\right\}^{1/2} + \left\|\sum_{(s,1)>\mu}\delta_s(f,\cdot)\right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\le\mu}\left(2^{s(1/p-1/q)} d_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}}\right)\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^2\right)^{1/2} + \left\|\sum_{(s,1)>\mu}\delta_s(f,\cdot)\right\|_q =$$

$$= \left(\sum_{(s,1)\le\mu} 2^{-\|S\|_1(r_1-1/p+1/q)} d_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}}\right) 2^{(s,r)}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\right)^2 +$$

$$+ \left\|\sum_{(s,1)>\mu}\delta_s(f,\cdot)\right\|_q = \mathfrak{I}_3 + \mathfrak{I}_4. \tag{16}$$

Для оценки слагаемого $\mathfrak{I}_3$ воспользуемся леммой В, согласно которой

$$\mathfrak{I}_3 \ll \left\{\sum_{(s,1)\le\mu}\left(2^{-\|s\|_1(r_1-1/p+1/q)}2^{(s,2\beta/q)}M_s^{-\beta}2^{(s,r)}\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{17}$$

Далее, принимая во внимание, что $1/p-1/q-\beta = -2\beta/q$, продолжаем оценку (17):

$$= \left\{\sum_{(s,1)\le\mu} M_s^{-2\beta}2^{2(s,r)}\|\delta_s(f,x)\|_p^2\right\}^{1/2} \ll$$

$$\ll (M^{-1}\log^m M)^\beta\left(\sum_{(s,1)\le\mu}2^{2(s,r)}\|\delta_s(f,x)\|_p^2\right)^{1/2} = (M^{-1}\log^m M)^\beta \textstyle\sum_1. \tag{18}$$

Чтобы установить оценку $\sum_1$, рассмотрим два случая.

Пусть $1 \le \theta \le 2$. Тогда в силу неравенства Йенсена

$$\sum\nolimits_1 \le \left(\sum_{(s,1)\le\mu} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le 1; \tag{19}$$

подставляя (19) в (18), получаем

$$\mathcal{I}_3 << M^{-\beta}(\log^m M)^\beta. \tag{20}$$

Если же $\theta > 2$, то, воспользовавшись неравенством Гельдера с показателем $\theta/2$, будем иметь

$$\sum\nolimits_1 \le \left(\sum_{(s,1)\le\mu} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s,1)\le\mu} 1 \right)^{1/2-1/\theta} <<$$

$$<< \|f\|_{B^r_{p,\theta}} (\log^m M)^{1/2-1/\theta} \le (\log^m M)^{1/2-1/\theta}. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (18), имеем соотношение

$$\mathcal{I}_3 << M^{-\beta}(\log^m M)^{\beta+1/2-1/\theta}. \tag{22}$$

Согласно теореме 2 [8]

$$\mathcal{I}_4 << 2^{-\mu(r_1-1/p+1/q)} \mu^{(m-1)(1/q-1/\theta)_+},$$

что равносильно

$$\mathcal{I}_4 << 2^{-\mu(r_1-1/p+1/q)} = 2^{-2\mu\beta/q} \asymp (M^{-1}\log^{m-1} M)^\beta \tag{23}$$

при $1 \le \theta \le q$

$$\mathcal{I}_4 << 2^{-\mu(r_1-1/p+1/q)} \mu^{(m-1)(1/q-1/\theta)} \asymp M^{-r_1}(\log^{m-1} M)^{r_1+1/q-1/\theta} \tag{24}$$

при $\theta > q$.

Сопоставляя в зависимости от значения θ оценки (20), (22) с (23) и (24) и используя соотношение (16), получаем требуемую оценку сверху при $2 \le p < < q < \infty$. Оценка сверху при $1 < p \le 2 < q < \infty$ следует из вложения $B^r_{p,\theta} \subset \subset B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta} = B^{1/2}_{2,\theta}$ и установленной выше оценки в случае $2 \le p < q < \infty$ при $p = 2$. Оценки снизу в обоих случаях выводятся с помощью тех же рассуждений, что и в случаях $r_1 > 1/p$ при $1 < p \le 2 < q < \infty$ и $r_1 > \beta$ при $2 \le p < < q < \infty$ (см. [7], теоремы 3.2 и 3.3). Теорема доказана.

В заключение приведем два утверждения, которые следуют из теоремы 3 и известных результатов.

Теорема 3′. *Пусть* $r = (r_1, \dots, r_1)$, $r \in R^m$, $r_1 > 0$. *Тогда: а) при* $2 \le p < < q < \infty$ *и* $r_1 = \beta$

$$M^{-r_1}(\log^{m-1} M)^{r_1} << d_M(W^r_p, L_q) << M^{-r_1}(\log^m M)^{r_1+1/2-1/p};$$

б) при $1 < p \le 2 < q < \infty$, $r_1 = 1/p$

$$M^{-1/2}(\log^{m-1} M)^{1/2} << d_M(W^r_p, L_q) << M^{-1/2}(\log^m M)^{1/2}.$$

Оценки снизу в обоих случаях следуют из результатов В. Н. Темлякова [10, с. 69], а сверху — из теоремы 3: в случае $2 \le p < q < \infty$ согласно включению $W^r_p \subset B^r_{p,p}$, а при $1 < p \le 2 < q < \infty$ — соответственно из включения $W^r_p \subset \subset B^r_{p,2}$.

Ометим, что порядковые оценки поперечников классов W_p^r с „критическими показателями" гладкости в одномерном случае были установлены Е. Д. Куланиным [2], а затем уточнены Э. М. Галеевым [12].

Теорема 3″. *Для* $r = (r_1, \dots, r_1)$, $r \in R^m$, $r_1 > 0$, *справедливы соотношения:*

а) при $2 \le p < q < \infty$, $r_1 = \beta$

$$M^{-r_1}(\log^{m-1} M)^{r_1+1/2} \ll d_M(H_p^r, L_q) \ll M^{-r_1}(\log^m M)^{r_1+1/2};$$

б) при $1 < p \le 2 < q < \infty$, $r_1 = 1/p$

$$M^{-1/2}(\log^{m-1} M) \ll d_M(H_p^r, L_q) \ll M^{-1/2}\log^m M.$$

Оценки следуют непосредственно из теоремы 3 при $\theta = \infty$.

Автор благодарен проф. А. И. Степанцу за ценные советы при обсуждении полученных результатов.

1. *Кашин Б. С.* О поперечниках классов Соболева малой гладкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех. – 1981. – **5**. – С. 50–54.
2. *Куланин Е. Д.* Оценки поперечников классов Соболева малой гладкости // Там же. – 1983. – **2**. – С. 24 – 30.
3. *Куланин Е. Д.* О поперечниках функциональных классов малой гладкости // Докл. Болг. АН. – 1985. – **38**, № 12. – С. 1601–1602.
4. *Галеев Э. М.* Оценки поперечников по Колмогорову классов периодических функций многих переменных малой гладкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех. – 1987. – **1**. – С. 26–30.
5. *Галеев Э. М.* Оценки колмогоровских поперечников классов H_p^r периодических функций многих переменных малой гладкости // Теория функций и ее прил. – М.: Моск. ун-т, 1986. – С. 17–24.
6. *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 5. – С. 663–675.
7. *Романюк А. С.* Приближения классов периодических функций многих переменных $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q. – Киев, 1990. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.30).
8. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398–1408.
9. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\tilde{W}_p^\alpha$ и $\tilde{H}_p^\alpha$ в пространстве L_q // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 916–934.
10. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1–112.
11. *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 2. – С. 334–351.
12. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Там же. – 1990. – **54**, № 2. – С. 418–430.

Получено 14.01.93