УДК 517.9

М. А. Мамедов (Ин-т прикл. математики Бакин. ун-та, Баку)

ТЕОРЕМЫ О МАГИСТРАЛИ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ

Turnpike theorems are proved for systems defined by differential inclusions with convex graphs.

Доводяться магістральні теореми для систем, що описуються диференціальними включеннями з опуклими графіками.

1. В настоящей статье рассматривается дифференциальное включение

$$x \in a(x), \tag{1}$$

где многозначное отображение $a \cdot R^n \rightrightarrows R^n$ имеет выпуклый компактный график и $0 \in \operatorname{int} a(\tilde{x})$ для некоторой точки $\tilde{x}$. Множество стационарных точек будем обозначать через M: $M = \{x : 0 \in a(x)\}$. Очевидно, M — выпуклое компактное множество. Кроме того, из $0 \in \operatorname{int} a(\tilde{x})$ следует, что $\tilde{x} \in \operatorname{int} M$ и $0 \in \operatorname{int} a(x)$ для всех $x \in \operatorname{int} M$.

Под траекторией понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая включению $\dot{x}(t) \in a(x(t))$ почти всюду на $[0, T)$ или $[0, +\infty)$. Множество траекторий, определенных на $[0, T)$ и $[0, +\infty)$, обозначим соответственно через κ_T и κ.

Пусть задана некоторая точка x^0. Всюду далее будем предполагать, что из этой точки исходит траектория $\tilde{x}(t)$, попадающая за конечное время время в точку $\tilde{x}$, т. е. $\tilde{x}(0) = x^0$, $\tilde{x}(t_1) = \tilde{x}$, $t_1 < +\infty$; функционалы определяются с помощью функции $u(x)$; $u(x)$ строго вогнута в области $G \subset R^n$, где $\operatorname{inf} G \supset \operatorname{dom} a$. Очевидно, в таком случае она будет непрерывной на множестве $\operatorname{dom} a$.

Пусть $u^* = \max\limits_{x \in M} u(x)$. Из приведенных выше условий следует, что этот максимум достигается в некоторой единственной точке $x^* \in M$: $u(x^*) = u^*$.

2. Сначала рассмотрим задачу

$$\int_0^T u(x)\,dt \to \max \tag{2}$$

на множестве κ_T^0. Пусть

$$J^* = \sup_{x(t) \in \kappa_T^0} \int_0^T u(x(t))\,dt.$$

Траектории $x(t)$ назовем оптимальной (ξ-оптимальной) в задаче (1), (2), если

$$\int_0^T u(x(t))\,dt = J^*, \quad \int_0^T u(x(t))\,dt \ge J^* - \xi.$$

Отметим, что задача (1), (2) рассмотрена в [1–3], где доказаны магистральные теоремы при дополнительных предположениях.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Существует такое* $c < +\infty$, *что для всех* $T > 0$ *и траекторий* $x(t) \in \kappa_T^0$ *выполняется неравенство*

$$\int_0^T \left[u(x(t)) - u^* \right] dt \ \le \ c.$$

2. *Для любых* $\varepsilon > 0$, $\xi > 0$ *существует такое* $K_{\varepsilon,\xi} < +\infty$, *что для всех* $T > 0$ *и* ξ*-оптимальных траекторий* $x(t) \in \kappa_T^0$ *задачи* (1), (2) *выполняется соотношение*

$$\operatorname{mes} \left\{ t \in [\,0, T\,]:\ \left\| x(t) - x^* \right\| \ge \varepsilon \right\} \ \le \ K_{\varepsilon,\xi}.$$

3. *Если* $x(t)$ — *оптимальная траектория в задаче* (1), (2) *и* $x(t_1) = x(t_2) = x^*$, *то* $x(t) \equiv x^*$ *при* $t \in [\,t_1, t_2]$.

Для доказательства этой теоремы достаточно проверить условия теоремы 2 из [4]. В рассматриваемом случае достаточно показать, что существуют такие $b < +\infty$ и траектория $x(t) \in \kappa^0$, что

$$\int_0^T \left[u\left(x^0(t)\right) - u^* \right] dt \ > -b \quad \text{для всех} \quad T > 0. \tag{3}$$

По условию из точки x^0 исходит траектория $\tilde{x}(t)$, за конечное время t_1 попадающая в точку $\tilde{x} \in \operatorname{int} M$. Поэтому неравенство (3) будет выполнено, если построим такую траекторию $x(t) \in \kappa$, $x(0) = \tilde{x}$, что для всех $T > 0$

$$\int_0^T \left[u(x(t)) - u^* \right] dt > -b', \quad b' < +\infty. \tag{4}$$

Через L обозначим отрезок, соединяющий точки $\tilde{x}$ и x^*. Пусть $l = \left(x^* - \tilde{x}\right) / \left\| x^* - \tilde{x} \right\|$ — единичный вектор. Построим функцию $k(x) = \max \{ k \colon lk \in a(x) \}$.

Так как $0 \in \operatorname{int} a(x)$ для любой точки $x \in \operatorname{int} M$, то $k(x) > 0$ при $x \in L$, $x \neq x^*$. Из выпуклости графика отображения a следует, что $k(x)$ — вогнутая функция на L, а значит, непрерывна. Поэтому система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} \ = \ lk(x), \quad x(0) \ = \ \tilde{x} \tag{5}$$

имеет решение $x(t)$, определенное на некотором отрезке $[\,0, \ t']$. Очевидно, что $x(t) \in \kappa_{t'}$, т. е. является траекторией системы (1). Кроме того, $x(t) \in L$, $t \in [\,0, \ t']$.

Возможны такие случаи.

а) Пусть траектория $x(t)$ за конечное время попадает в точку x^*; т. е. $x(t') = x^*$. Тогда для траектории

$$x'(t) \ = \ \begin{cases} x(t), & t \in [\,0, t'\,], \\ x^*, & t \ge t', \end{cases}$$

неравенство (4) будет выполнено для всех $T > 0$.

б) Пусть траектория $x(t)$ определена на $[0, +\infty)$. Тогда, очевидно, $k(x^*) = 0$ и $k(t) \to x^*$ при $t \to \infty$.

Траекторию $x(t)$ представим в виде $x(t) = \tilde{x} + l\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ — монотонно возрастающая скалярная функция и $\alpha(0) = 0$, $\alpha(t) \to \left\| x^* - \tilde{x} \right\|$ при $b \to \infty$. Ясно, что $\dot{\alpha}(t) = k\left(x(t)\right)$ и $\alpha(t) = \| x(t) - \tilde{x} \|$.

Из вогнутости функции $k(x)$ на L и условий $k(\tilde{x})>0$, $k(x^*)=0$ получаем

$$k(x) > k(\tilde{x}) - \frac{k(\tilde{x})}{\|x^*-\tilde{x}\|}\|x-\tilde{x}\|.$$

Значит, при $x=x(t)$ имеем

$$\frac{\alpha(t)}{\|x^*-\tilde{x}\|} - 1 \geq -\frac{\dot{\alpha}(t)}{k(\tilde{x})} \quad \text{для всех} \quad t\in[0,+\infty). \tag{6}$$

Далее, так как $u(\tilde{x})=\tilde{u}<u^*=u(x^*)$ и функция $u(x)$ строго вогнута, аналогичным образом получаем

$$u(x) \geq \tilde{u} + \frac{u^*-\tilde{u}}{\|x^*-\tilde{x}\|}\|x-\tilde{x}\|.$$

Отсюда при $x=x(t)$ имеем

$$u(x(t)) - u^* \geq \left(u^*-\tilde{u}\right)\left(\frac{\alpha(t)}{\|x^*-\tilde{x}\|}-1\right).$$

Из (6) вытекает $u(x(t))-u^*\geq -k\dot{\alpha}(t)$, где $k=\left(u^*-\tilde{u}\right)/\left(\|x^*-\tilde{x}\|k(\tilde{x})\right)$. Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\int_0^T\left[u(x(t))-u^*\right]dt \geq k\dot{\alpha}(T) \geq -k\|x^*-\tilde{x}\| = -\frac{u^*-\tilde{u}}{k(\tilde{x})}.$$

Таким образом, справедливо (4), и тем самым все условия теоремы 2 из [4] выполняются. Отсюда и следуют утверждения теоремы.

3. На множестве κ^0 рассмотрим задачу

$$\int_0^\infty e^{-rt}u(x(t))\,dt \to \max, \tag{7}$$

где $r>0$ — дисконт.

Введем в рассмотрение функции

$$V_r(x) = \sup\left\{\int_0^\infty e^{-rt}u(x(t))\,dt:\ x(t)\in\kappa,\ \ x(0)=x\right\},$$
$$W_r(x) = u(x) - rv(x). \tag{8}$$

Очевидно, $v_r(x)$ — ограниченная вогнутая функция по x и ее область определения является выпуклым множеством (общим для всех $r>0$) $\Omega\subset \operatorname{dom} a$. Множество Ω характеризуется тем, что если $x\in\Omega$, то из этой точки исходит траектория $x(t)$, определенная на $[0,+\infty)$. В частности, начальная точка $x^0\in\Omega$. Функция $W_r(x)$ является разницей двух вогнутых функций. Поэтому она может быть не вогнутой. Если она строго вогнута, то существует такая единственная точка $x_r^*\in M$, что $W_r\left(x_r^*\right)=\max_{x\in M}W_r(x)$. Укажем некоторые свойства функций $W_r(x)$, $V_r(x)$.

Лемма 1. *Для всех* $x\in M$ $W_r(x)=u(x)-rV_r(x)\leq 0$.

Доказательство. Выберем любую точку $\bar{x}\in M$ и рассмотрим стационарную траекторию $x(t)\equiv\bar{x}$. Тогда из (8) имеем

$$V_r(\bar{x}) \ \geq \ \int\limits_0^\infty e^{-rt} u(\bar{x})\, dt \ = \ \frac{1}{r} u(\bar{x}).$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *При каждом фиксированном* $r > 0$ *функция* $V_r(x)$ *ограничена на* Ω. *Но при фиксированной* x $|V_r(x)| \to +\infty$ *при* $r \to 0$.

Лемма 3. *Функции* $V_r(x)$, $W_r(x)$ *непрерывны по* (x, r) *в области* $\{(x, r) : x \in \Omega, \ r > 0\}$.

Лемма 4. *Пусть* $x(t)$ — *оптимальная траектория в задаче* (1), (7). *Тогда* $dV_r(x(t))/dt = rV_r(x(t)) - u(x(t))$.

Отметим, что леммы 1, 3 и 4 справедливы и при более слабых предположениях, т. е. когда отсутствуют условия выпуклости графика отображения a и строгой вогнутости функции $u(x)$.

Теперь сформулируем теорему о магистрали для задачи (1), (7).

Теорема 2. *Пусть функция* $W_r(x)$ *строго вогнута по* x *и* $x(t) \in \kappa^0$ — *оптимальная траектория в задаче* (1), (7). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $K_\varepsilon < +\infty$, *что*

$$\operatorname{mes}\left\{ t \in [\,0, \infty\,): \ \left\| x(t) - x_r^* \right\| \geq \varepsilon \right\} \ \leq \ K_\varepsilon.$$

В частности, $x(t) \to x_r^*$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство теоремы следует из теоремы 1 и следующей теоремы [4].

Теорема 3. *Пусть* $x(t) \in \kappa$ — *оптимальная траектория в задаче* (1), (7). *Тогда существует такое* $\xi < +\infty$, *что для любого* $T > 0$ *куски траектории* $x(t)$, $t \in [0, T]$, *являются* ξ*-оптимальными траекториями в задаче* (1) *с критерием*

$$\int\limits_0^T W_r(x)\, dt \to \max.$$

4. Теперь рассмотрим функционал (7) при различных $r > 0$. Предположим, что при каждом $r > 0$ функция $W_r(x)$ строго вогнута и $x_r^* \in M$ — соответствующая оптимальная стационарная точка. Интерес представляет нахождение точек x_r^*, когда r меняется. Не менее интересен вопрос: имеет ли место сходимость $x_r^* \to x^*$ при $r \to 0$? Нам не удалось на него ответить. Но для $r > 0$ установлена следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть при каждом* r *функция* $W_r(x)$ *строго вогнута. Тогда отображение* $r \to x_r^*$ *непрерывно в области* $r > 0$.

Доказательство теоремы следует из леммы 3 и того факта, что точки максимума x_r^* функции $W_r(x)$ на M единственны при каждом фиксированном r.

1. *Rockafellar R. T.* Saddle points of Hamiltonian systems in convex problems of Lagrange // J. Optimization Theory and Appl. – 1973. – **12**. – P. 367–390.
2. *Гусев Д. Е., Якубович В. А.* Теорема о магистрали в задаче непрерывной оптимизации // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. – 1983. – № 1. – С. 21–27.
3. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. – Минск, 1986. – 296 с.
4. *Мамедов М. А.* Магистральные теоремы в непрерывных системах с интегральными функционалами // Докл. Рос. АН. – 1992. – **323**. – № 5.

Получено 08.12.94