УДС 517.9

В. В. Липчан (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНОГО МНОГООБРАЗИЯ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

For systems of differential matrix nonlinear equations with a small parameter, we obtain conditions for existence of an invariant manifold in terms of Green's function.

Для систем диференціальних матричних нелінійних рівнянь з малим параметром наведені умови існування інваріантного многовиду в термінах функції Гріна.

Пусть задана система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dX}{dt} + XB(\varphi) = A(\varphi)X + \mu Q(\varphi, X), \tag{1}$$

в которой A — n-мерная, B — p-мерная квадратные, X и Q — $(n \times p)$-мерные прямоугольные матрицы, $a, A, B \in C(T_m)$, Q — непрерывная и периодическая по $\varphi \in T_m$ и непрерывная по X из области $\|X\| \le d$, $d = \text{const} > 0$, μ — малый положительный параметр. Требуется найти принадлежащие $C'(T_m, a)$ решения системы (1), где $C'(T_m, a)$ — пространство, введенное в [1]. В [2] данная задача исследовалась для линейной по X системе. Используем предложенный в [2] метод для решения поставленной выше задачи.

Запишем однородную систему уравнений, соответствующую системе (1):

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dX}{dt} + XB(\varphi) = A(\varphi)X. \tag{2}$$

Следуя [2], запишем матрицу

$$G_0^{\theta j}(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(A)C^{\theta j}(\varphi_\tau)\Omega_0^\tau(B) & \text{при } \tau \le 0, \\ -\Omega_\tau^0(A)C_1^{\theta j}(\varphi_\tau)\Omega_0^\tau(B) & \text{при } \tau > 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $C^{\theta j}(\varphi)$ и $C_1^{\theta j}(\varphi)$ — пара $(n * p)$-мерных матриц из $C(T_m)$, удовлетворяющих условию $C^{\theta j}(\varphi) + C^{\theta j}(\varphi) = H_{\theta j}$, $\theta = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$, где $H_{\theta j} = [0, \ldots, e_\theta, \ldots, 0]$, $\theta = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$, обозначает $(n * p)$-мерную матрицу, j-й столбец которой равен θ-му единичному орту e_θ пространства R^n. Пусть

$$G_0(\tau, \varphi) = \{ G_0^{\theta j}(\tau, \varphi) \}, \quad \theta = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}. \tag{4}$$

Матрицу $G_0(\tau, \varphi)$ называют функцией Грина системы (2), когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| G_0(\tau, \varphi) \| \, d\tau \le K \tag{5}$$

для произвольной $K = \text{const}$.

Представим матрицу $Q(\varphi, X)$ через ее элементы $\{ q_{\theta j}(\varphi, X) \}$, $\theta = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$, в виде

$$Q(\varphi, \tau) = \sum_{\theta, j}^{n, p} q_{\theta j}(\varphi, X) H_{\theta j}, \tag{6}$$

где суммирование ведется по θ от 1 до n и по j от 1 до p. Покажем, что существование функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$. системы (2) при некоторых условиях на правую часть системы (1) достаточно для существования в $C'(T_m, a)$ решения уравнения (1).

Теорема. *Пусть*: 1) *функция* $Q(\varphi, X)$ *в области* $\|X\| \leq d$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\sup_{\varphi \in T_m} \| Q(\varphi, X) \| \leq M,$$

$$\| Q(\varphi, X_1) - Q(\varphi, X_2) \| \leq L \| X_1 - X_2 \|,$$

где X_1, X_2 *— любые матрицы из области,* M *и* L *— произвольные положительные постоянные*; 2) *система* (2) *имеет функцию Грина* (4). *Тогда существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что для любого* $\mu \leq \mu_0$ *система уравнений* (1) *имеет принадлежащее* $C'(T_m, a)$ *инвариантное многообразие* $X = X(\varphi, \mu)$ *такое, что*

$$\lim_{\mu \to 0} X(\varphi, \mu) = 0$$

равномерно по $\varphi \in T_m$.

Для доказательства используем методы, предложенные в [2, 3]. Рассмотрим банахово пространство $C(D)$ матричных функций с нормой

$$\| X(\varphi) \|_D = \sup_{\varphi \in T_m} \| X(\varphi) \| \leq D.$$

Рассмотрим в этом пространстве оператор

$$U(X(\varphi)) = \mu \sum_{\theta, j}^{n, p} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^{\theta j}(\tau, \varphi)\, q_{\theta j}(\varphi_\tau(\varphi), X(\varphi_\tau))\, d\tau, \tag{7}$$

где $\varphi_t = \varphi_t(\varphi)$ — решение первого уравнения на торе T_m системы (1) такого, что $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Имеем

$$\| U(X) \|_D = \mu \left\| \sum_{\theta, j}^{n, p} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^{\theta j}(\tau, \varphi)\, q_{\theta j}(\varphi_\tau(\varphi), X(\varphi_\tau))\, d\tau \right\| \leq \mu K M, \tag{8}$$

где

$$\sup_{\varphi \in T_m} \| Q(\varphi, X) \| \leq M \| X \| \leq d.$$

Далее,

$$\| U(X(\varphi)) - U(X_1(\varphi)) \|_D = \mu \left\| \sum_{\theta, j}^{n, p} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^{\theta j}(\tau, \varphi) \times \right.$$

$$\left. \times [\, q_{\theta j}(\varphi_\tau(\varphi), X(\varphi_t) - q_{\theta j}(\varphi_\tau(\varphi), X_1(\varphi_\tau))] \right\|_D \leq \mu K L \| X(\varphi) - X_1(\varphi) \|_D. \tag{9}$$

Выберем параметр μ_0 из условий:

$$\mu K M \leq D, \tag{10}$$

$$\mu K L < 1, \tag{11}$$

т. е. $\mu_0 = \min \{ D / KM, 1 / KL \}$. Из неравенств (8)–(11) следует, что оператор (7)

— оператор сжатия, переводящий банахово пространство $C(D)$ в себя. Поэтому он имеет в $C(D)$ единственную неподвижную точку, а следовательно, уравнение

$$X(\varphi) = \mu \sum_{\theta, j}^{n,p} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^{\theta j}(\tau, \varphi)\, q_{\theta j}(\varphi_\tau(\varphi), X(\varphi_\tau))\, d\tau \tag{12}$$

имеет в $C(D)$ единственное решение. Покажем, что $X = X(\varphi_t(\varphi))$ вместе с φ_t удовлетворяет системе (1). Действительно, непрерывная дифференцируемость (12) вдоль решения φ_t в силу существования функции Грина следует из [1]. Остается показать, что $X(\varphi_t(\varphi))$ вместе с φ_t удовлетворяет системе (1). Имеем

$$\begin{aligned}
X^{\theta j}(\varphi_\tau) &= \mu \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi_t, A) C^{\theta j}(\varphi_t) \Omega_\tau^0(\varphi_t, B)\, q_{\theta j}(\varphi_\tau(\varphi_t), X(\varphi_{t+\tau}(\varphi)))\, d\tau + \\
&+ \mu \int_{0}^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi_t, A) C_1^{\theta j}(\varphi_t) \Omega_\tau^0(\varphi_t, B)\, q_{\theta j}(\varphi_\tau(\varphi_t), X(\varphi_{t+\tau}(\varphi)))\, d\tau = \\
&= \mu \int_{-\infty}^{0} \Omega_{t+\tau}^t(\varphi, A) C^{\theta j}(\varphi_t) \Omega_{t+\tau}^t(\varphi, B)\, q_{\theta j}(\varphi_{t+\tau}(\varphi), X(\varphi_{t+\tau}(\varphi)))\, d\tau + \\
&+ \mu \int_{0}^{+\infty} \Omega_{t+\tau}^t(\varphi, A) C_1^{\theta j}(\varphi_t) \Omega_{t+\tau}^t(\varphi, B)\, q_{\theta j}(\varphi_{t+\tau}(\varphi), X(\varphi_{t+\tau}(\varphi)))\, d\tau = \\
&= \mu \int_{-\infty}^{t} \Omega_{\tau_1}^t(\varphi, A) C^{\theta j}(\varphi_t) \Omega_{\tau_1}^t(\varphi, B)\, q_{\theta j}(\varphi_{\tau_1}(\varphi), X(\varphi_{\tau_1}(\varphi)))\, d\tau_1 + \\
&+ \mu \int_{t}^{+\infty} \Omega_{\tau_1}^t(\varphi, A) C_1^{\theta j}(\varphi_t) \Omega_{\tau_1}^t(\varphi, B)\, q_{\theta j}(\varphi_{\tau_1}(\varphi), X(\varphi_{\tau_1}(\varphi)))\, d\tau_1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Поэтому, дифференцируя (13) по t, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{dX^{\theta j}(\varphi_t)}{dt} &= [C^{\theta j}(\varphi_t) + C_1^{\theta j}(\varphi_t)] q_{\theta j}(\varphi_t) + A(\varphi_t) X^{\theta j}(\varphi_t) - X^{\theta j}(\varphi_t) B(\varphi_t) = \\
&= A(\varphi_t) X^{\theta j}(\varphi_t) - X^{\theta j}(\varphi_t) B(\varphi_t) + \mu H_{\theta j} q_{\theta j}(\varphi_t, X(\varphi_t)),
\end{aligned} \tag{14}$$

означающее, что $X(\varphi_t)$ — решение системы (1). Его непрерывная зависимость от μ следует из оценки (8).

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 301 с.
2. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1655–1664.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.

Получено 02.02.95