УДК 512.544

М. Ф. Кузенний (Ін-т педагогіки АПН України, Київ)

НЕПЕРІОДИЧНІ ЛОКАЛЬНО РОЗВ'ЯЗНІ $T(\overline{A})$-ГРУПИ

Nonperiodic locally soluble $T(\overline{A})$-groups are constructively described (with separating 3 types of these groups).

Конструктивно описані локально розв'язні $T(\overline{A})$-групи (з виділенням 3 типів груп такого роду).

В роботі [1] введено і досліджено класи скінченних груп з умовою транзитивності нормальності для всіх підгруп або класи T-, t-груп. Група G називається $T(t)$-групою, якщо для будь-яких 3 підгруп $A \lhd B \lhd C$ $(A \lhd B \lhd G)$ справедливо $A \lhd C$ $(A \lhd G)$. Дослідженням t-груп та їх узагальненням $t(\tau)$ присвячені роботи [2–8]. Найбільш грунтовно результати про t-групи викладено в [8]. Група G називається $T(\tau)$- $(t(\tau))$-групою, якщо для довільних 3 τ-підгруп із G $A \lhd B \lhd C$ $(A \lhd B \lhd G)$ справедливо $A \lhd C$ $(A \lhd G)$. В [7] вивчені нескінченні розв'язні $t(\tau)$-групи, де τ — це властивість нескінченності (I). В [6] розглядаються групи, що мають локальну систему t-підгруп. В [9–13] введені $T(\overline{A})$-групи. В $T(I\overline{A})$-групі G транзитивність нормальності властива для будь-яких неабелевих підгруп $A \lhd B \lhd C$. У даній роботі наведено конструктивний опис всіх неперіодичних локально розв'язних $T(\overline{A})$-груп. Цей опис подається в теоремі 1, яка виділяє 3 типи груп такого роду. В [11] встановлено, що неперіодична локально розв'язна $T(\dot{I}\overline{A})$-група G має періодичний абелевий комутант. В $T(\dot{I}\overline{A})$-групі G всі підгрупи $A \lhd B \lhd C$ є нескінченними неабелевими підгрупами G. Дана робота є продовженням досліджень [11].

1. Допоміжні результати.

Означення **1** [14]. *Нормальна підгрупа A групи G, що є перетином всіх нормальних в G підгруп X_α, $\alpha \in A$, для яких G/X_α і G/A — локально нільпотентні групи, називається локально нільпотентним корадикалом групи G. Підгрупа C, породжена всіма нормальними нільпотентними підгрупами з G, називається локально нільпотентним радикалом групи G.*

Означення **2.** *Довільна $T(\overline{A})$-група G з періодичним абелевим локально нільпотентним корадикалом A називається $*$-групою.*

Означення **3** [15]. *Група G з нормальними неабелевими підгрупами називається метагамільтоновою групою.*

Означення **4** [16]. *Підгрупа Z групи G, всі підгрупи якої нормальні в G, називається квазіцентральною підгрупою групи G.*

В роботах [9–11] встановлено такий результат.

Твердження 1. *Довільна $T(\overline{A})$-група G має локально нільпотентний радикал C та локально нільпотентний корадикал A, для якого $C \lhd G$, $A \lhd G$ і C та G/A — нільпотентні метагамільтонові групи обмеженого класу нільпотентності зі скінченним примарним абелевим комутантом, неабелеві підгрупи яких нормальні відповідно в G та в G/A; при цьому.*

1) *клас $T(\overline{A})$-груп замкнений за підгрупами та фактор-групами; кожна локально розв'язна група G цього класу розв'язна, має періодичний комутант G', нільпотентний другий комутант і абелевий третій комутант G''' порядку 1 або p, p — просте число; в неперіодичній групі цього класу $G'' = 1$;*

2) *будь-яка неабелева субнормальна підгрупа N довільної $T(\overline{A})$-групи G нормальна в G і або G/N — дедекіндова група, що має одиничний локально нільпотентний корадикал, або G/N — періодична недедекіндова група з неодиничним абелевим холлівським квазіцентральним в G/N локально нільпотентним корадикалом A/N без інволюцій, що має одиничний перетин з $Z(G/N)$, а $G/N/A/N$ — дедекіндова група.*

Означення 5 [17, 18]. *Скінченна неабелева група G з абелевими власними підгрупами називається групою Міллера – Морено.*

Означення 6 [19]. *Група G, що має скінченні класи спряжених елементів, називається FC-групою.*

Лема 1. *Нехай G — довільна група, що має нільпотентну неабелеву підгрупу H з періодичним комутантом. Тоді*

$$H \supset X = \langle c\rangle\langle g_1\rangle\langle g_2\rangle, \quad X' = \langle c\rangle \subset Z(X), \quad |c| = p, \quad |g_1| \in \{p^{\alpha_1}, \infty\},$$

$$|g_2| \in \{p^{\alpha_2}, \infty\}, \quad \langle c\rangle\langle g_1\rangle \cap \langle c\rangle\langle g_2\rangle = \langle c\rangle$$

і при періодичності H X — p-група Міллера – Морено, а при неперіодичності H $X = (\langle c\rangle\langle g_1\rangle) \leftthreetimes \langle g_2\rangle$, $|g_2| = \infty$.

Доведення. Нехай G і H задовольняють умову леми. Якщо H — періодична група, то вона містить неабелеву нільпотентну, а тому локально скінченну p-підгрупу, що містить скінченну підгрупу Міллера – Морено X, яка за результатами [17, 18] задовольняє твердження леми. Нехай далі H — неперіодична група. Тоді вона містить неабелеву нескінченну 2-породжену підгрупу $Y = \langle a, b\rangle$, що має скінченну періодичну частину. Звідси $|Y'| < \infty$, підгрупа Y має скінченні класи спряжених елементів, а тому за означенням 6 Y — FC-група. За відомими результатами (див., наприклад, [20]) підгрупа Y містить центральну підгрупу Z без скруту, для якої Y/Z — скінченна нільпотентна група з комутантом $(Y' \times Z)/Z$. Як і раніше, фактор-група Y/Z містить p-підгрупу Міллера – Морено M/Z з комутантом порядку p. Звідси $M' \cap Z = 1$, $M' = \langle c\rangle \subset Z(M)$, $|c| = p$. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що

$$M/\langle c\rangle \supset X/\langle c\rangle = \langle\langle c\rangle g_1\rangle \times \langle\langle c\rangle g_2\rangle, \quad |\langle c\rangle g_1| \in \{p^{\alpha}, \infty\}, \quad |\langle c\rangle g_2| \in \{p^{\beta}, \infty\}$$

і $X' = M'$. Очевидно,

$$X = \langle c\rangle\langle g_1\rangle\langle g_2\rangle, \quad X' = \langle c\rangle \subset Z(X), \quad \langle\langle c\rangle g_1\rangle \cap \langle\langle c\rangle g_2\rangle = \langle c\rangle,$$

$$|g_1| \in \{p^{\alpha_1}, \infty\}, \; |g_2| \in \{p^{\alpha_2}, \infty\}.$$

Якщо $|g_i| = \infty$, $i = 1, 2$, то вважаємо, що $|g_2| = \infty$, $X = (\langle c\rangle\langle g_1\rangle) \leftthreetimes \langle g_2\rangle$ і твердження леми справедливе. Нехай $|g_i| < \infty$. Тоді $Z \ni z$, $|z| = \infty$, $X \cap \langle z\rangle = 1$. Замінимо g_2 на $g_2 z$. Тоді $|g_2| = \infty$, $\langle c\rangle\langle g_1\rangle \cap \langle g_2\rangle = 1$. Покладемо $X = (\langle c\rangle\langle g_1\rangle) \leftthreetimes \langle g_2\rangle$. Тоді $X' = \langle c\rangle$ і твердження леми справедливе. Лема доведена.

Лема 2. *Нехай G — $*$-група. Тоді G має періодичний абелевий комутант G', що міститься в локально нільпотентному радикалі C групи G, періодичну частину і $C_G(G') = S \lhd G$, $S < C$. Комутант неперіодичної не локально нільпотентної підгрупи чи фактор-групи $*$-групи G співпадає з її локально нільпотентним корадикалом, який міститься в A чи в образі A, а всі примарні підгрупи з G абелеві.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову леми. Якщо G — нільпотентна група, то $C = G$, $A = 1$, і за твердженням 1 G' — скінченна примарна абелева група, $C_G(G') = S \lhd G$, $S = C$, G має періодичну частину і лема доведена.

Нехай далі G — не локально нільпотентна $*$-група. Тоді за означенням 2 вона має нецентральний абелевий періодичний локально нільпотентний корадикал A, для якого за твердженням 1 G/A — нільпотентна метагамільтонова група. Зрозуміло, що $|A| > 2$. Можливі такі випадки: 1) G — неперіодична група; 2) G — періодична група.

Випадок 1. За твердженням 1 G' — періодична абелева підгрупа з C. Зрозуміло, що $C_G(G') = S \lhd G$, $S < C$, і G має періодичну частину. За означенням 2 G має локально нільпотентний корадикал $A < C$. Оскільки $|A| > 2$, то G — не локально нільпотентна група і $C < G$, $1 < A \le G'$. Нехай $X = C_G(A)$. Значить, $A < Z(X) < X$. За твердженням 1 G/A, а тому й X/A — нільпотентні групи, $X \lhd G$, $X < C < G$. Звідси X/A — власна підгрупа неперіодичної групи G/A. Нехай $N/A \not< X/A$. Тоді $N \not< X$, $N' \ne 1$, N/A — субнормальна підгрупа нільпотентної групи G/A, а тому $N \lhd\lhd G$. За твердженням 1 $N \lhd G$, $G/N \cong$ $\cong G/A/N/A$ — дедекіндова група. Зрозуміло, що G/A — група, що містить таку власну підгрупу X/A, для якої будь-яка підгрупа N/A, яка не належить X/A, нормальна в G/A, і $G/A/N/A$ — дедекіндова група. За результатами [21] неперіодична група G/A абелева. Звідси $G' = A$, $S = X$. Покажемо, що всі примарні підгрупи з G абелеві. Нехай це не так. Тоді періодична частина групи G має локально скінченну неабелеву p-підгрупу, що містить скінченну p-підгрупу Міллера – Морено $X = \langle c\rangle\langle g_1\rangle\langle g_2\rangle$, $X' = \langle c\rangle < Z(X)$, $\langle c\rangle\langle g_1\rangle \cap$ $\cap \langle c\rangle\langle g_2\rangle = \langle c\rangle$, $|c| = p$ — просте число. Можливі випадки: 1.1) X — субнормальна підгрупа з G; 1.2) X — не субнормальна підгрупа з G.

Випадок 1.1. За твердженням 1 $X \lhd G$, G/X — дедекіндова група. Звідси $|G'| < \infty$, G — FC-група. З властивостей FC-груп[20] випливає, що $Z(G) \ni g$, $|g| = \infty$. Покладемо $z = g^{8p}$. Тоді G містить субнормальні неабелеві підгрупи

$$G_0 = X \times \langle z\rangle, \quad G_1 = (\langle c\rangle\langle g_1\rangle) \leftthreetimes \langle g_2 z\rangle, \quad G_2 = (\langle c\rangle\langle g_2\rangle) \leftthreetimes \langle g_1 z\rangle.$$

Зрозуміло, що $G_i' \ne 1$, $i = 0, 1, 2$. За твердженням 1 $G_i \lhd G$, G/G_i містить центральні p-елементи і елементи порядку 8, що належать $G_i\langle g\rangle/G_i$, $i =$ $= 0, 1, 2$. За твердженням 1 G/G_i — абелеві групи. Звідси $G' < G_1 \cap G_2 = \langle c\rangle$, $|G'| = |A| = p$. Із результатів [22] $G = \langle c\rangle \leftthreetimes D$, $D' = 1$, D містить єдину абелеву силовську p-підгрупу D_p, а G — єдину силовську p-підгрупу $\langle c\rangle \leftthreetimes D_p$. Зрозуміло, що $[\langle c\rangle, D_p] = 1$ і силовські p-підгрупи із G абелеві, що суперечить неабелевості p-підгрупи X. Випадок 1.1 не можливий.

Випадок 1.2. У цьому випадку G містить субнормальну неабелеву підгрупу $N_0 = A \cdot X$. Нехай N — перетин всіх нормальних підгруп із G, що містять X. Тоді $N \lhd G$, $N < N_0$, $N = A_1 \cdot X$, де $A_1 = A \cap N = K \times P_1$, P_1 — силовська підгрупа з A_1, а K — її холлівське доповнення в A_1, $P_1 \lhd N$, $K \lhd N$. Покладемо $P = P_1 \cdot X$. Тоді $N = K \leftthreetimes P$. Покладемо $N_1 = K \leftthreetimes X$. Зрозуміло, що P — силовська p-підгрупа з N, і за твердженням 1 $X \lhd P$. Звідси $N_1 \lhd \lhd N \lhd G$. За твердженням 1 $N_1 \lhd G$, а згідно з вибором N $N_1 = N$, $P = X$, X — скінченна силовська p-підгрупа з N. За узагальненою лемою Фраттіні $G = N \cdot D$, де $D = N_G(X)$ і $X \lhd D$, $G = K \cdot D$, $K \cap D = Z \lhd D$. Оскільки K — періодична група, $K \lhd G$, то $G/K \cong D/Z$ — неперіодична група, яка за твердженням 1 є не локально нільпотентною $*$-групою, що містить субнормальну p-підгрупу Міллера – Морено $Z \times X/Z$. Тому D/Z задовольняє умову випадку 1.1, який неможливий, а отже, неможливий випадок 1.2. Отже, у випадку 1 всі примарні підгрупи з G абелеві. Нехай тепер у випадку 1 H — будь-яка не локально нільпотентна підгрупа з G. За твердженням 1 H має локально нільпотентний корадикал A_1. Зрозуміло, що $A_1 < A$. Оскільки $H' < A$, то $H' < A_1$, A_1 і H' — періодичні групи, H/H' — абелева група, тому $A_1 = H'$. Нехай $N \lhd G$. За твердженням 1 G/N — $T(\overline{A})$-група з періодичним абелевим локально нільпотентним корадикалом $A \cdot N/N$. Оскільки $A = G'$, то локально нільпотентний корадикал $G/N = (G/N)'$ і твердження леми у випадку 1 доведено повністю.

Випадок 2. За твердженням 1 G/A — нільпотентна метагамільтонова група зі скінченним примарним абелевим комутантом. Нехай $X = C_G(A)$. Тоді $X \lhd \lhd G$, $X < C < G$. Як і у випадку 1.1, G/A містить власну підгрупу X/A, для якої всяка підгрупа N/A, що не міститься в X/A, нормальна в G/A і $G/A/N/A$ — дедекіндова група. Згідно з [21] G/A — циклічна група, що належить X/A. Звідси $A < G' < X$, $A < Z(X)$ і G'/A — циклічна група, а тому $G'' = 1$, $G' < C$, $S < C$. Лема доведена.

Лема 3. *Будь-яка локально нільпотентна неабелева підгрупа неперіодичної $*$-групи G належить її локально нільпотентному радикалу C і $G' = A$, $C_G(A) = S < C \lhd G$, $S \lhd G$.*

Доведення. Нехай G і C задовольняють умову леми і H — неабелева локально нільпотентна підгрупа з G. Якщо $C = G$, то твердження леми очевидне.

Нехай $C < G$. Тоді G — група, яка за лемою 2 має періодичний абелевий комутант G', що містить локально нільпотентний корадикал A, $|A| > 2$, $G' = A$, $C_G(A) = S < C \lhd G$, $S \lhd G$. Примарні підгрупи з G абелеві, комутант будь-якої підгрупи чи фактор-групи групи G співпадає з її локально нільпотентним корадикалом. Покажемо, що $H < C$. Оскільки H — неабелева локально нільпотентна група, а всі примарні підгрупи з G абелеві, то H не може бути періодичною групою. Звідси H — неперіодична група. Покладемо $N_0 = A \cdot H$, тоді $N_0 \lhd G$. Нехай N — перетин всіх субнормальних підгруп з G, що містять H. Тоді $N \lhd G$, $N < N_0$. Якщо N — локально нільпотентна група, то $N < C$ і лема доведена.

Нехай N — не локально нільпотентна група. За лемою 1

$$H \supset X = (\langle c \rangle \langle y \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle, \quad X' = \langle c \rangle < Z(X),$$

$$|c| = p, \quad |y| \in \{p^{\alpha}, \infty\}, \quad |x| = \infty.$$

За твердженням 1 $X \lhd H$, а тому $\langle c \rangle < Z(H)$. Зрозуміло, що $N = A_0 \cdot H$, де $A_0 = A \cap N$, N — неперіодична $*$-група, у якої за лемою 2 N' співпадає з локально нільпотентним корадикалом N, $N' < A_0$, $N' \cdot H \lhd N$, і за вибором N $N' \cdot H = N$, $A_0 = N'$. Звідси $\langle c \rangle < Z(N) \cap A_0$. Оскільки N — не локально нільпотентна група, то вона містить ненільпотентну скінченно породжену підгрупу $D \supset X$. Нехай $D' = F$. Зрозуміло, що D — неперіодична $*$-група, у якої за лемою 2 F — локально нільпотентний корадикал і $F = D'$, $\langle c \rangle < Z(D) \cap F$. Оскільки D — неперіодична скінченно породжена група, F — періодична група, то D/F — неперіодична абелева група зі скінченною періодичною частиною Q/F і $D/F = Q/F \times V/F$, де V/F — скінченно породжена абелева група без скруту. Звідси $D = Q \cdot V$, $Q \lhd D$, $V \lhd D$, $Q \cap V = F$ і Q — періодична частина в D, $|D:V|<\infty$. Оскільки D — скінченно породжена група, то V — скінченно породжена група з абелевим комутантом. За теоремою Холла [19] $D \supset \supset M$, $M \triangleleft D$, $|D:M|<\infty$, $C \not< M$. Нехай $M' \neq 1$. Тоді D/M містить неодиничний центральний p-елемент $\langle c \cdot M \rangle$, який міститься в локально нільпотентному корадикалі D/M, що суперечить твердженню 1. Звідси $M'=1$. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $M<V$. Нехай $Z_1 = F \cap N$. Тоді $Z_1 \triangleleft V$, $|F:Z_1|<\infty$. Якщо $Z_2 = F \cdot N$, то $Z_1 \triangleleft Z(Z_2)$, $Z_2/Z_1 = F/Z_1 \times N/Z_1$ і $Z_2' < Z_1$. Звідси Z_2 — нільпотентна підгрупа скінченного індексу в D. За твердженням 1 Z_2 — метагамільтонова група зі скінченним примарним абелевим комутантом. Зрозуміло, що Z_2 — FC-група, яка за результатами [20] має центральну підгрупу Z без скруту таку, що Z_2/Z — періодична група. Тоді $Z \cap F = 1$, $[F,Z]=1$.

Звідси випливає, що кожний елемент із F має в D централізатор скінченного індексу. Оскільки D — скінченно породжена група, то F породжується скінченним числом комутаторів із D скінченного порядку, кожний з яких має скінченне число елементів, спряжених в D. Тому за теоремою Діцмана [19] $|F|<\infty$. За результатами [22] $D = F \leftthreetimes U$, $U'=1$, $D'=[F,U]=F$. Отже, $F = = F_1 \times P_1$, де P_1 — силовська p-підгрупа з F, а F_1 — її холлівське доповнення в F, $F_1 \triangleleft D$, $P_1 \triangleleft D$. Нехай $S_1 = C_U(P_1)$. Тоді $S_1 < Z(D)$, $U/S_1 = P_2/S_1 \times \times U_1/S_1$, де P_2/S_1 — силовська p-підгрупа скінченної абелевої групи U/S_1, а U_1/S_1 — її холлівське доповнення в U/S_1. В D існують підгрупи

$$U_0 = P_1 \leftthreetimes U, \quad P = P_1 \leftthreetimes P_2, \quad V_1 = P_1 \leftthreetimes U_1, \quad U = P_2 \cdot U_1,$$

$$P_2 \cap U_1 = S_1, \quad U_1 \triangleleft U_0, \quad S_1 < Z(U_0), \quad U_1/S_1 = \overline{P_1} \leftthreetimes \overline{U_1},$$

де $\overline{P_1} = (P_1 \times S_1)/S_1$ — скінченна p-група, $\overline{U_1} = U_1/S_1$ — скінченна p'-група. Якщо $[\overline{P_1}, \overline{U_1}]=1$, то $[P_1, U_1]=1$. Підгрупа P нільпотентна, нільпотентною буде й U_0, але тоді локально нільпотентний корадикал U — власна підгрупа з P_1, а локально нільпотентний корадикал F групи G, що співпадає з $[F,U]$, не містить P_1, що неможливо.

Отже, $V_1/S_1 = \overline{V_1}$ — неабелева група вигляду $\overline{V_1} = \overline{P_1} \leftthreetimes \overline{U_1}$. Згідно з [23] $\overline{P_1} = \overline{P_2} \times \overline{P_3}$, де $\overline{P_2} = [\overline{P_1}, \overline{U_1}] \neq 1$, а $\overline{P_3} = = C_{\overline{P_1}}(\overline{U_1}) \supset \overline{C} = \langle cS_1 \rangle$. Звідси $P_1 = P_2 \times P_3$, $P_2 = V_1'$, $P_3 = P_1 \cap Z(V_1)$. Оскільки $V_1 \triangleleft U_0$, то $P_2 \triangleleft U_0$, $P_3 \triangleleft U_0$, $P_2 \triangleleft D$, $P_3 \triangleleft D$. Покладемо $F_2 = F \leftthreetimes P_2$, $U_2 = P_3 \leftthreetimes U$. Тоді U_2 — нільпотентна група, локально нільпотентний корадикал якої — власна підгрупа з P_3, $[P_3, U] < P_3$, $D = F_2 \leftthreetimes U_2$, $D' = [F_2, U_2] U_2' < < F$, що неможливо. Ця суперечність і показує, що D не може бути ненільпотентною групою, а тому N — локально нільпотентна група, $H<N<C$, і лема доведена.

***Означення* 7** [8]. *Підгрупа D групи G називається групою степеневих автоморфізмів підгрупи A групи G, якщо для довільного елемена $d \in D$ існує таке ціле число $n(d)$, що для будь-якого елемента $a \in A$ $d^{-1}ad = a^{n(d)}$.*

Лема 4. *Нехай F — скінченна $T(\overline{A})$-група, Q — її неодинична абелева q-підгрупа, що співпадає з локально нільпотентним корадикалом F, q — просте число, F має неабелеві q-підгрупи. Тоді $F = Q \leftthreetimes B = Q_0 \leftthreetimes X$, $Q_0 = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$ — скінченна група Міллера – Морено, що є нормальною силовською q-підгру-*

пою з F, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $q > 2$, $B = \langle b \rangle \times X$, X — *дедекіндова холлівська підгрупа з* F,

$$X = S \cdot \langle a \rangle, \quad S = C_X(Q) \lhd F, \quad S' = 1,$$

$$S \cap \langle a \rangle = \langle a^m \rangle, \quad m > 1, \quad q \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, m),$$

$Q \leftthreetimes X$ — *T-група з локально нільпотентним корадикалом* Q, *для довільного примарного елемента* $g \in X \setminus S$ *маємо* $[Q, \langle g \rangle] = Q$.

Доведення. Нехай F — досліджувана група. За результатами [22] $F = Q \leftthreetimes B$, де B — скінченна нільпотентна група вигляду $B = B_0 \times X$, B_0 — силовська q-підгрупа з B, X — її холлівське доповненняв B. За умовою леми $Q_0 = Q \leftthreetimes B_0$ — неабелева нормальна силовська q-підгрупа з F. За твердженням 1 $F / Q_0 \cong X$ — дедекіндова група. Нехай $S = C_X(Q)$. Тоді $S \lhd G$, $S < X$, $S \cap Q_0 = 1$. При $S' \neq 1$ за твердженням 1 F/S — T-група, Q_0 — її нільпотентна, а тому гамільтонова 2-група, що належить локально нільпотентному корадикалу F/S, а це суперечить твердженню 1. Отже, $S' = 1$. За згаданим твердженням Q_0 — неабелева метагамільтонова група, всі неабелеві підгрупи якої нормальні в F, і згідно з [23] будь-яка неабелева підгрупа M із Q_0 містить Q_0' і $Q \cdot M / M$ належить локально нільпотентному корадикалу, а $B_0 \cdot M / M$ належить центру T-групи F / M. Покажемо, що $B_0' = 1$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $B_0 \lhd F$, $Q_0 = Q \times B_0$, B_0 містить підгрупу Міллера – Морено M, $Q_0 \supset Q_1 = B_1 \times M$, де $|B_1| = q$. За результатами [25] Q_1 містить відмінну від M підгрупу Міллера – Морено M_0. Зрозуміло, що $M_0 \lhd F$, $Q_1' = M' = M_0'$, $Q_0' < M_0$. Тоді $M_0 \cap M = M_1$ — власна, а тому абелева підгрупа з M. Якщо припустити, що $B_1 < M_0$, то $M_0 = B_1 \times M_1$ — абелева група, що неможливо. Отже, F / M_0 — T-група з неодиничними підгрупами $B_1 \cdot M_0 / M_0$ та $M \cdot M_0 / M_0$, що належать локально нільпотентному корадикалу та центру T-групи F / M_0, а це суперечить твердженню 1. Звідси $B_0' = 1$, $[Q, B_0] \neq 1$, а тому Q містить елемент a, B_0 містить елемент b такі, що $\langle a, b \rangle = M$ — група Міллера – Морено, $M' = \langle c \rangle < Q \cap Z(Q_0)$, $|c| = q$, $\langle c \rangle \cdot \langle a \rangle < Q$. Припустимо, що $\langle b \rangle < B_0$ або $\langle c \rangle \cdot \langle a \rangle < Q$. Тоді існують елементи $y \in B_0 \setminus \langle b \rangle$ або $x \in Q \setminus \langle c \rangle \cdot \langle a \rangle$ такі, що $M_1 = \langle ay, b \rangle$, $M_2 = \langle a, bx \rangle$. Тоді $[\langle ay \rangle, \langle b \rangle] = [\langle a \rangle, \langle bx \rangle] = \langle c \rangle$. Звідси $M_i' \neq 1$, $M_i \lhd G$. За твердженням 1 F / M_i — T-група, що має неодиничні q-елементи з локально нільпотентного корадикалу $\langle M_1 a \rangle$ або $\langle M_2 x \rangle$ та з центра $\langle M_1 y \rangle$ або $\langle M_2 b \rangle$ відповідно, $i \in \{1, 2\}$, що суперечить твердженню 1. З цієї суперечності випливає, що $M_1 = M_2 = Q_0$, $\langle c \rangle \cdot \langle a \rangle = Q$, $B_0 = \langle b \rangle$, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$. Нехай g — p-елемент із $X \setminus S$. Оскільки Q — локально нільпотентний корадикал із F, Q_0 — нільпотентна група, то Q — локально нільпотентний корадикал із $G_0 = Q \leftthreetimes X$, $S < X$. Зрозуміло, що $\langle c \rangle \lhd F$, $g^{-1} c g = c^k$. Можливі такі випадки: 1) $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle \neq 1$; 2) $\langle c \rangle \cap \langle a \rangle = 1$.

Випадок 1. Нехай $Q = \langle a \rangle$. Тоді за означенням 6 G_0 індукує на Q групу степеневих автоморфізмів, а тому за результатами [8] G_0 — T-група і $[Q, \langle g \rangle] = Q$, $X = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^m \rangle$, $m > 1$, X / S — циклічна група порядку m, ізоморфна підгрупі з $\mathrm{Aut}\langle a \rangle$, $(q, m) = 1$. Зрозуміло, що $q > 2$, $m \mid q - 1$. У випадку 1 лема доведена.

Випадок 2. Нехай $Q = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$ і, не порушуючи загальності, за теоремою Машке можемо вважати, що $[\langle a \rangle, X] < \langle a \rangle$. Звідси $g^{-1}ag = a^l$. Зрозуміло, що $bg = gb$, а тому $c^{bg} = c^k = c^{gb}$. Тепер $a^{bg} = c^k a^l = c^{gb} = c^l a^l$. За останніми співвідношеннями $k \equiv l \pmod q$, тому $c^g = c^l a^g = a^l$, і за означенням 6 G_0 індукує на Q групу степеневих автоморфізмів. Згідно з [8] G_0 — T-група, $X = S \cdot \langle a \rangle$ і, як і у випадку 1, $[Q, \langle g \rangle] = Q$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^m \rangle$, $m > 1$, $q \equiv 1 \pmod m$ і G — група, яка задовольняє умови леми. Всі випадки розглянуті. Лема доведена.

Лема 5. *Нехай G — $T(\overline{A})$-група з нільпотентним локально нільпотентним корадикалом і F — її скінченна підгрупа, що задовольняє умову леми* 4. *Тоді $G = Q \leftthreetimes B$, $B = \langle b \rangle \times (V \leftthreetimes X)$, $Q_0 = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$ — група Міллера – Морено, що є нормальною силовською q-підгрупою з G, $q > 2$, V — квазіцентральна абелева холлівська підгрупа з G без інволюцій, X — дедекіндова холлівська підгрупа з G, $(Q \times V) \leftthreetimes X$ — T-група з локально нільпотентним корадикалом $Q \times V$, $X = S \cdot \langle a \rangle$, $S \lhd G$, $S' = 1$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^m \rangle$, $m > 1$, $q \equiv 1 \pmod m$, $S = C_X(Q)$, $C_X(V) \supset S$. Для довільного примарного елемента $g \in X \backslash S$ справедливо $[Q, \langle g \rangle] = Q$.*

Доведення. Нехай G і F задовольняють умову леми. Якщо $G = F$, то твердження леми випливає з леми 4. Нехай $F < G$. За лемою 4

$$F = Q \leftthreetimes B_0, \quad B_0 = \langle b \rangle \times X_0, \quad X_0 = S_0 \cdot \langle a_0 \rangle,$$

$$S_0 \cap \langle a_0 \rangle = \langle a_0^{m_0} \rangle, \quad m_0 > 1, \quad S_0 = C_{X_0}(Q), \quad q \equiv 1 \pmod{m_0},$$

$Q_0 = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$ — скінченна q-група Міллера – Морено, що є силовською q-підгрупою з F. Для довільного елемента $g \in X_0 \backslash S_0$ маємо $[Q, \langle g \rangle] = Q$, X_0 — дедекіндова холлівська підгрупа з F, $Q \leftthreetimes X_0$ — T-група. Нехай Q^* — силовська q-підгрупа з G, що містить Q_0. За твердженням 1 Q^* — нільпотентна метагамільтонова група, комутант якої належить Q_0. Нехай $D = N_G(Q_0)$. Зрозуміло, що $Q^* < D$, $X_0 < D$, $F < D$, $Q_0 \lhd D$. За лемою 2 в неперіодичній групі G всі силовські q-підгрупи абелеві. Звідси G — локально скінченна група. За умовою леми G має нільпотентний локально нільпотентний корадикал $A = V \times Q_1$, де $Q < Q_1 < Q^*$ — силовська q-підгрупа з A, V — її холлівське доповнення, $V \lhd G$, $Q_1 \lhd G$. Якщо припустити, що $[V, \langle b \rangle] \neq 1$, то $V \leftthreetimes \langle b \rangle$ — субнормальна, а тому нормальна підгрупа з $V \leftthreetimes Q_0$, і тоді $[Q, \langle b \rangle] = 1$, що неможливо. Отже, $[V, Q_0] = 1$. Звідси в G існує неабелева локально нільпотентна, а тому нільпотентна субнормальна, а тому нормальна підгрупа $V \times (Q_0 \cdot Q_1) = Q_0 \cdot Q_1 \lhd G$, $Q_0 \lhd G$, $D = G$. За твердженням 1 G / Q_0 — розв'язна T-група з локально нільпотентним корадикалом $V \times (Q_0 \cdot Q_1) / Q_0$, що є квазіцентральною абелевою холлівською підгрупою без інволюцій із G / Q_0. З цього випливають всі властивості V в групі G. Оскільки G / A — нільпотентна група, то вона має нормальну силовську q-підгрупу A^* / A, а тому $A^* = V \leftthreetimes Q^* \lhd G$. Нормальною в G буде й підгрупа $F_1 = (V \leftthreetimes Q_2) \leftthreetimes \langle g \rangle$, де Q_2 — довільна скінченна підгрупа з $Q^* \supset Q$, а g — згаданий раніше елемент із F. Легко бачити, що F_1 / V задовольняє умову леми 4, за якою $Q_0 = Q_2 = Q^*$. Оскільки $|Q_0| < \infty$, то $G = Q_0 \leftthreetimes G_0$, $A \cap G_0 = V$. За твердженням 1 G_0 — розв'язна T-група з локально нільпотентним корадикалом V. Нехай $C = C_{G_0}(Q_0)$. Тоді $C \lhd G_0$, $|G_0 : C| < \infty$. Якщо припустити, що $C' \neq 1$, то за твердженням 1 G/C — розв'язна T-група, а тому Q_0 дедекіндова, що неможливо. Звідси $C' = 1$. Зрозуміло, що $C_{G_0}(V) \supset C$. За відомими результатами $G_0 = V \leftthreetimes X$, X — дедекіндова холлівська підгрупа з G. Розглядаючи G/V, як і в лемі 4, встановимо, що $\langle b \rangle \times X$ — дедекіндова група. З цього випливає, що $C = C_{G_0}(Q)$, $C = X \times S$, де $S = C_X(Q)$, $S \lhd G$, $S' = 1$, $X = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^m \rangle$, $m > 1$, $q \equiv 1 \pmod m$. Для довільного примарного елемента $g \in X \setminus S$ маємо $[Q, \langle g \rangle] = Q$. За попереднім $C_X(V) \supset S$ і лема доведена.

Лема 6. *Нехай G — неперіодична не локально нільпотентна $T(\overline{A})$-група з неабелевим локально нільпотентним радикалом C. Тоді $G = A \leftthreetimes B$, де A — скінченна абелева силовська q-підгрупа з G, q — просте число більше 2,*

$$B = \langle b \rangle \cdot X, \quad B' = 1, \quad \langle b \rangle \cap X = \langle z \rangle < Z(G), \quad z = b^{q^{\beta}}, \quad \beta > 0,$$

$$X = S \cdot \langle a \rangle, \quad C_X(A) = S \lhd G, \quad S \cap \langle a \rangle = \langle a^m \rangle, \quad m > 1, \quad q \equiv 1 \pmod m.$$

Для довільного елемента $g \in X \setminus S$ справедливо $[A, \langle g \rangle] = A$, $A \leftthreetimes \langle b \rangle / \langle z \rangle$ — скінченна q-група Міллера – Морено, що є силовською q-підгрупою з $G / \langle z \rangle$, $A \leftthreetimes X / \langle z \rangle$ — періодична T-група, а $X / \langle z \rangle$ — її абелева холлівська підгрупа.

Доведення. Нехай G і C задовольняють умову леми. За твердженням 1 та лемою 2 $A = G'$, $A' = 1$, і всі примарні підгрупи з G абелеві, C — нільпотентна метагамільтонова група зі скінченним примарним комутантом порядку q^n, $n > 0$. З цього випливає, що C — неперіодична група. За лемою 1 C містить підгрупу $X = (\langle c \rangle \cdot \langle y \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $X' = \langle c \rangle < Z(X)$, $|x| = \infty$, $|y| \in \{q^{\delta}, \infty\}$, $\delta \geq 0$, $[x, y] = c$, $|c| = q$. За твердженням 1 $X \lhd G$, G/X — розв'язна T-група. Зрозуміло, що $A = Q \times V$, Q — силовська q-підгрупа з A, а V — її холлівське доповнення в A. Покладемо $M_0 = V \leftthreetimes X$. Оскільки $V \lhd G$ і $X \lhd G$, $X \cap V = 1$, то $[V, X] = 1$. Покажемо, що $|V| = 1$. Нехай це не так. Тоді $\pi(V) \ni p$, p — просте число, $p \neq q$, а X містить неабелеву підгрупу $X_p = (\langle c \rangle \cdot \langle y \rangle) \leftthreetimes \langle x^p \rangle$. Як і раніше, $X_p \lhd G$, G/X_p — розв'язна T-група, локально нільпотентний корадикал якої містить групу $V \times X_p / X_p$ і центральну підгрупу X/X_p порядку p, а це суперечить твердженню 1. Отже, $\pi(V) = \{\varnothing\}$ і $|V| = 1$. Звідси $|V| = 1$, $Q = A$. Зрозуміло, що X — скінченно породжена нільпотентна група, що має скінченно породжену частину $D < \langle c \rangle \cdot \langle y \rangle$, і D — періодична частина групи $\langle c \rangle \cdot \langle y \rangle$, а тому $|D| = q^{\gamma}$, $\gamma > 0$. Нехай Z — підгрупа, породжена елементами $g^{pq^{\gamma}}$ для всіх $g \in X$. Відомо, що Z — характеристична підгрупа з X без скруту, $Z \lhd G$, $Z \cap G' = 1$, і тому $Z < Z(X)$, X/Z — q-група Міллера – Морено з G/Z. Оскільки $Q \times Z/Z$ — неодиничний абелевий локально нільпотентний корадикал G/Z, то G/Z — розв'язна $T(\overline{A})$-група, що має неабелеві q-підгрупи. За лемою 2 G/Z — періодична група, що задовольняє умову леми 5, за якою G/Z має скінченну нормальну силовську q-підгрупу Q_0/Z, що є скінченною q-групою Міллера – Морено. Звідси $|Q| < \infty$, $Q_0 = Q \cdot X$. Покажемо, що $D = Q$. При $|y| = \infty$ $D = Q = \langle c \rangle$. За результатами [22] Q доповнюється в G, а тому $X = \langle c \rangle \times X_1$, що неможливо. Звідси $|y| = q^{\delta}$, $X = D \leftthreetimes \langle x \rangle$. Згідно з [22] $X =$

$= Q \leftthreetimes X_2$, де X_2 — неперіодична абелева група, $X_2 > Z$, X/Z — група Міллера – Морено. Звідси $X_2 = \langle x \rangle$ і $Q_0 = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$, а $Q = \langle c \rangle \cdot \langle y \rangle$, $Z = \langle z \rangle$, $z = b^{q^\beta}$, $\beta > 0$. Оскільки фактор-група $G/\langle z \rangle$ задовольняє умову леми 5, то $G/\langle z \rangle = Q_0/\langle z \rangle \leftthreetimes$ $\leftthreetimes X/\langle z \rangle$, де $X/\langle z \rangle$ — дедекіндова холлівська підгрупа з $G/\langle z \rangle$. Звідси $\langle b \rangle/\langle z \rangle \times X/\langle z \rangle = B/\langle z \rangle$ — дедекіндова група. Тоді $G = Q \leftthreetimes B$, $B = \langle b \rangle \cdot X$, $\langle b \rangle \cap X = \langle z \rangle$, $Q \leftthreetimes X/\langle z \rangle$ — розв'язна T-група, у якої $X/Z = S/Z \cdot \langle \langle z \rangle \cdot a \rangle$. Звідси випливає, що $S \lhd G$, $S' = 1$, $X = S \cdot \langle a \rangle$, $S \cap \langle a \rangle = \langle a^m \rangle$, $m > 1$, $q \equiv 1$ $(\operatorname{mod} m)$. Для довільного елемента $g \in X \setminus S$ справедливо $[Q, \langle g \rangle] = Q$. Оскільки $Q = A = G'$, то $B' = 1$ і лема доведена.

Лема 7. *Нехай G — неперіодична не локально нільпотентна T-група з абелевим локально нільпотентним радикалом C. Тоді $G = A \leftthreetimes B$, $|A| > 2$, $G' = A$ — періодична абелева група, B — неперіодична абелева група, для довільного неодиничного елемента $a \in A$ справедливо $C_B(a) = C_B(A) = S = Z(G)$, B/S — періодична локально циклічна група, $\pi(V) \cap \pi(B/S) = \{\varnothing\}$, для довільного примарного чи нескінченного елемента $g \in B \setminus S$ справедливо $[A, \langle g \rangle] =$ $= A$, $C_A(g) = 1$.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. За лемою 2 $G' = A$ — періодична абелева група, всі примарні підгрупи з G абелеві. Оскільки $G' = 1$, $C_G(A) < C$, то $C_G(A) = C$. Нехай a — довільний неодиничний p-елемент із A, g — довільний примарний чи нескінченний елемент із G, P — силовська p-підгрупа з A. Тоді $P \lhd G$. Покажемо, що існує натуральне число $n(a, g)$ таке, що $C_{\langle g \rangle}(a) = g^{n(a,g)}$ і $(n(a, g), p) = 1$. Якщо $g \in C_G(a)$, то $n(a, g) = 1$. Нехай $g \notin C_G(a)$. Тоді за лемою 2 g не може бути p-елементом. Для примарного r-елемента g твердження очевидне.

Нехай $|g| = \infty$, а $D = \langle a \rangle^{\langle g \rangle}$ — нормальне замикання $\langle a \rangle$ відносно $\langle g \rangle$. Тоді $D < P$ і існує підгрупа $N = D \leftthreetimes \langle g \rangle$. Покажемо, що $C_{\langle g \rangle}(D) = \langle g^n \rangle$, де n — натуральне число. Припустимо, що $|D| = \infty$. Отже, $C_{\langle g \rangle}(D) = 1$. За лемою 3 всяка локально нільпотентна підгрупа з G належить C і $C' = 1$, а тому всяка локально нільпотентна підгрупа з N абелева і N — не локально нільпотентна група. За лемою 2 локально нільпотентний корадикал підгрупи N співпадає з N' і належить D. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $a \in$ $\in N'$. Оскільки N — 2-породжена група з абелевим комутантом, то за теоремою Холла $N \supset Z$, $Z \lhd N$, $|M : Z| < \infty$, $A \not\leq Z$. Покладемо $Z_1 = D \cap Z$. Зрозуміло, що $Z_1 \lhd N$, $|D : Z_1| < \infty$ і локально нільпотентний корадикал N/Z_1 містить неодиничний елемент $\langle Z_1 a \rangle$, $|(N/Z_1)'| < \infty$. Звідси $\langle g \rangle \ni z_1$, $|z_1| = \infty$ і $[D, \langle z_1 \rangle] < Z_1$. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $Z = Z_1 \leftthreetimes \langle z_1 \rangle$. Нехай $Z_p = Z_1 \leftthreetimes \langle z_1^p \rangle$. Зрозуміло, $Z_p \lhd Z$. Припустимо, що $Z_p' \neq 1$. Тоді $Z_p \lhd$ $\lhd N$, N/Z_p містить неодиничний p-елемент із локально нільпотентного радикала $\langle Z_p a \rangle$ і з центра $\langle Z_p z_1 \rangle$ групи N/Z_p. За твердженням 1 N/Z_p — розв'язна T-група з холлівським локально нільпотентним корадикалом, що має з центром тривіальний перетин. Ця суперечність показує, що $Z_p' = 1$, $[Z_1,$ $\langle z_1^p \rangle] = 1$, $Z_1 < D < D \leftthreetimes \langle z_1^p \rangle$ — центральний ряд підгрупи $D \leftthreetimes \langle z_1^p \rangle$. Згідно з викладеним вище $[D, \langle z_1^p \rangle] = 1$. Звідси A має в N скінченне число спряжених елементів, $|D| < \infty$ і шукане n існує.

Нехай $n = p^{\delta} \cdot n(a, g)$, де p^{δ} — найбільша степінь p, що ділить n. Покладемо $y = g^{n(a,g)}$. Тоді $y^{p^{\delta}} \in Z(N)$, $D \leftthreetimes \langle y \rangle / \langle y^{p^{\delta}} \rangle$ — скінченна p-група. Звідси $D \leftthreetimes \langle y \rangle$ — нільпотентна, а тому абелева група. За цього випливає, що $C_{\langle g \rangle}(a) = \langle y \rangle = \langle g^{n(a,g)} \rangle$, $(p, n(a, g)) = 1$ і шукане число $n(a, g)$ існує. Зрозуміло, що $A = P \times V$, де V — холлівське доповнення P в A, $V \lhd G$ і G / C — періодична група. Покажемо, що $C_{\langle g \rangle}(a) = C_{\langle g \rangle}(P) = \langle y \rangle$ і $\pi(A) \cap \pi(\langle g \rangle / \langle y \rangle) = \{\varnothing\}$. Покладемо $G_0 = A \cdot \langle g \rangle$. Якщо $g \in C$, то твердження леми очевидні. Нехай $g \notin C$. Покажемо, що $A \cap \langle g \rangle = 1$. Якщо $|g| = \infty$, то це очевидно. Нехай g — r-елемент, R — силовська r-підгрупа з A, $R_0 = R \cdot \langle g \rangle$. Тоді $A = R \times L$, де L — холлівське доповнення R в A, $R \lhd G$, $L \lhd G$, $G_0 = L \leftthreetimes R_0$, $R_0' = 1$. Звідси $N_0 = L \leftthreetimes \langle g \rangle$ — неабелева субнормальна підгрупа з G_0. За твердженням 1 $N_0 \lhd \lhd G$, G / N_0 — неперіодична, а тому абелева розв'язна T-група. Зрозуміло, що $A < N_0 = G_0$, $R < \langle g \rangle$. Очевидно, що G / L — група, що має скінченний абелевий локально нільпотентний корадикал, що співпадає з A / L. За результатами [22] A / L доповнюється в G / L, а тому і в G_0 / L. Отже,

$$G_0 / L = A / L \leftthreetimes B_0 / L, \quad G_0 = A \cdot B_0, \quad A \cap B_0 = L, \quad |B_0 : L| < \infty,$$

$$B_0 = L \leftthreetimes \langle g_0 \rangle, \quad R_0 = R \times \langle g_0 \rangle = \langle g \rangle.$$

Оскільки $G_0' \neq 1$, то $g_0 \notin R$, але тоді $R < \langle g_0 \rangle$, $|R| = 1$, $\langle g_0 \rangle = \langle g \rangle$. Звідси $r \notin \pi(A)$ і завжди $G_0 = A \leftthreetimes \langle g \rangle$. Покажемо, що $C_{\langle g \rangle}(P) = \langle y \rangle$. Нехай це не так. Тоді в G_0 існує неабелева, а тому і не локально нільпотентна підгрупа $N_1 = P \leftthreetimes \langle g \rangle$. Отже, $N_1' = [P, \langle y \rangle] \neq 1$. Покладемо $U = (N_1' \times V) \leftthreetimes \langle y \rangle$. Тоді $U \lhd\lhd G_0$. Оскільки N_1 — не локально нільпотентна група, то $[N_1', \langle y \rangle] \neq 1$, а тоді й $U' \neq 1$, $U \lhd G$. За твердженням 1 G / U — T-група. Доведемо, що $U \not\ni P$. Для цього покажемо, що $N_1' \cap Z(N_1) = 1$, $a \in Z(N_1)$. Нехай $z \in N_1' \cap Z(N_1)$. Тоді Z породжується скінченним числом комутаторів $[x_i, y^j]$, $x_i \in P$, $i \in I$, $j \in J$, $|J| < \infty$. Для кожного числа i $|N_i : C_{N_i}(x_i)| = n_i$ і $(n_i, p) = 1$. З цього випливає, що нормальне замикання D всіх x_i в N_1 — скінченна група. Існує підгрупа $N_2 = D \leftthreetimes \langle y \rangle$, $N_2' \ni z$, $|N_2 : C_{N_2}(D)|$ — скінченне число, взаємно просте з p. За відомими результатами (див., наприклад, [3]) $D = D_1 \times D_2$, $D_1 = N_2'$, $D \cap Z(N_2) = D_2 \ni z$. Звідси $z = 1$. Отже, $N_1' < P$, $U \not\ni a$, $U \not\supseteq G'$. Оскільки при $|g| < \infty$ G / U — неперіодична, а тому абелева розв'язна T-група, то вона містить комутант, що не так. З цієї суперечності випливає, що при $|g| < \infty$ $U' = 1$ і $C_G(P) = C_G(A) = \langle y \rangle$. Отже, $|g| = \infty$. Тоді $\langle a \rangle \ni c$, $|c| = p$, $[c, y] = 1$. Покладемо $z = cy$. Тоді $|z| = \infty$, $U_1 = (N_1' \times V) \leftthreetimes \langle z \rangle$ — неабелева група, субнормальна в G_0 і не містить ні a, ні y. Як і для U, $U_1 \lhd G$, G / U_1 — розв'язна T-група, локально нільпотентний корадикал якої містить неодиничний p-елемент $\langle U_1 a \rangle$, а центр — неодиничний p-елемент $\langle U_1 y \rangle$, що суперечить твердженню 1. Ця суперечність показує, що $C_{\langle g \rangle}(P) = C_{\langle g \rangle}(A) = \langle y \rangle$. Оскільки a — довільний елемент із A, g — довільний елемент із G, то для довільного неодиничного елемента $x \in A$ справедливо $C_{\langle g \rangle}(x) = \langle y \rangle$, $y = g^{n(a,g)}$, $\pi(A) \cap \pi(\langle g \rangle / \langle y \rangle) = \varnothing$. Тепер очевидно, що $[A, \langle g \rangle] = A$, $C_A(g) = 1$, $Z(G_0) = \langle y \rangle$,

$G_0 \lhd G$, $\langle y\rangle \lhd G$. За лемою Фраттіні $G/\langle y\rangle = G_0/\langle y\rangle \cdot B/\langle y\rangle$, де $B/\langle y\rangle$ — нормалізатор в $G/\langle y\rangle$ скінченної холлівської підгрупи $\langle g\rangle/\langle y\rangle < G_0/\langle y\rangle \lhd$ $\lhd G/\langle y\rangle$. Звідси $G = G_0 \cdot B$, $G_0 \cap B = \langle g\rangle$, $G = A \leftthreetimes B$, $B' = 1$, $C \cap B = S = Z(G)$. За попереднім B/S — періодична група, $\pi(A) \cap \pi(B/S) = \{\varnothing\}$. Для довільного примарного чи нескінченного елемента $g \in B/S$ справедливо $[A, \langle g\rangle] = A$, $C_A(\langle g\rangle) = 1$. Зрозуміло, що $\overline{G} = G/S = \overline{A} \leftthreetimes \overline{B}$ — локально скінченна група, що має локальну систему скінченних підгруп Фробеніуса $\overline{G}_\alpha = \overline{A}_\alpha \leftthreetimes \overline{B}_\alpha$, де $\overline{A}_\alpha$, $\overline{B}_\alpha$ — образи A та B в $\overline{G}$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $\overline{B}_\alpha$ — абелевий нормальний множник групи Фробеніуса $\overline{G}_\alpha$. За результатами [26] $\overline{B}_\alpha$ — циклічна група, а тому $\overline{B}$ — локально циклічна група. Лема доведена.

2. Будова локально розв'язних неперіодичних $T(\overline{A})$ та $T(I\overline{A})$-груп.

Теорема 1. *Неперіодичні локально розв'язні $T(\overline{A})$-групи мають вигляд $G = A \leftthreetimes B$, де A — періодичний абелевий локально нільпотентний корадикал групи G, B — неперіодична нільпотентна метагамільтонова група, і вичерпуються групами типів*:

1) $|A| = 1$, $G = B$, B' — *скінченна примарна абелева група*;

2) $|A| > 2$, $A = G'$, $B' = 1$, $B = \langle b\rangle \cdot X$, $\langle b\rangle \cap X = \langle z\rangle \subset Z(G)$, $z = b^{q^\beta}$, $\beta > 0$, A — *скінченна силовська q-підгрупа групи G, $A \leftthreetimes \langle b\rangle/\langle z\rangle$ — силовська q-підгрупа з $G/\langle z\rangle$, що є групою Міллера – Морено*, $q > 2$, $X = S \cdot \langle a\rangle$, $C_X(A) = S \lhd$ $\lhd G$, $S \cap \langle a\rangle = \langle a^m\rangle$, $m > 1$, $A \leftthreetimes X/\langle z\rangle$ — *T-група з локально нільпотентним корадикалом $A \times \langle z\rangle/\langle z\rangle$*, $q \equiv 1 \pmod m$, *для довільного нескінченного чи примарного елемента $g \in X \backslash S$ справедливо* $[A, \langle g\rangle] = A$, $C_A(g) = 1$;

3) $|A| > 2$, $A = G'$, $C_B(A) = S = Z(G)$, B/S —*періодична локально циклічна група*, $\pi(A) \cap \pi(B/S) = \{\varnothing\}$, *для довільного примарного чи нескінченного елемента $g \in B \backslash S$ справедливо* $[A, \langle g\rangle] = A$, $C_A(g) = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай G задовольняє умову теореми. Якщо G — локально нільпотентна група, то за твердженням 1 вона — нільпотентна метагамільтонова група зі скінченним примарним абелевим комутантом і має одиничний періодичний локально нільпотентний корадикал A. Покладемо $A =$ $= 1$, $G = B$. Одержимо, що G — група типу 1.

Нехай G — не локально нільпотентна група. Тоді за твердженням 1 G має неодиничний періодичний абелевий локально нільпотентний корадикал $A = G'$, $|A| > 2$, і власний локально нільпотентний радикал C, $C_G(A) < C$. Можливі такі випадки: 1) $C' \neq 1$; 2) $C' = 1$.

Випадок 1. Нехай G задовольняє умову леми 6, за якою $G = A \leftthreetimes B$ і G — група типу 2 теореми. Випадок 1 розглянуто.

Випадок 2. Нехай G задовольняє умову леми 7, за якою $G = A \leftthreetimes B$ і G — група типу 3 теореми. Випадок 2 розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = A \leftthreetimes B$, A — періодична абелева підгрупа з G, що співпадає з локально нільпотентним корадикалом групи G, B — неперіодична нільпотентна група і G — група одного з типів 1–3 теореми. Зрозуміло, що G — неперіодична розв'язна група. Залишилось показати, що G — $T(\overline{A})$-група. Якщо G — група типу 1, то в ній нормальні всі неабелеві підгрупи, а тому вона $T(\overline{A})$-група. Нехай G — група типу 2 або 3 теореми. Тоді $B' = 1$, $G' = A$, $|A| > 2$. Нехай $C = C_B(A)$. Тоді $C = Z(G)$, B/C — періодична група.

Нехай $G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3$ і $G_1' \neq 1$. Покажемо, що $G_1 \triangleleft G_3$. Якщо $G_1 = G_2$ або $G_2 = G_3$, то $G_1 \triangleleft G_3$. Нехай $G_1 < G_2 < G_3$, $A_i = A \cap G_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Тоді $A_1 \leq A_2 \leq A_3$. Оскільки $G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft G_3$, то $A_1 \triangleleft G_2$, $A_2 \triangleleft G_3$. Нехай $A_1 = A_2$. Тоді з умови $G_2 / A_2 = G_2 / A_1 < Z(G_3 / A_1)$ випливає $G_1 / A_1 < Z(G_3 / A_1)$, а отже, $G_1 \triangleleft G_3$. Отже, можемо вважати, що $A_1 < A_2 < A_3$. Можливі такі випадки: 1) G_1 — ненільпотентна група; 2) G_1 — нільпотентна група.

Випадок 1. Нехай в G_1 існує примарний чи нескінченний елемент g, для якого $[A_1, \langle g \rangle] \nless Z(G_1)$. Для груп типу 3 $[A_i, \langle g \rangle] = A_i$, $C_{A_i}(\langle g \rangle) = 1$, $i = 1, 2, 3$. Покладемо $N_1 = A \leftthreetimes \langle g \rangle$. Тоді

$$N_1 \triangleleft G_2, \quad C_{\langle g \rangle}(A_2) = \langle y \rangle, \quad \pi(A_2) \cap \pi(G / \langle y \rangle) = \{\varnothing\}.$$

Зрозуміло, що $\langle y \rangle = Z(N_1)$, $\langle y \rangle \triangleleft G_2$ і за лемою Фраттіні $G_2 / \langle y \rangle = N_1 / \langle y \rangle \cdot D / \langle y \rangle$, де $D / \langle y \rangle = N_{G_2 / \langle y \rangle}(\langle g \rangle / \langle y \rangle)$. Звідси $G_2 = N_1 \cdot D$, $D \supset \langle g \rangle$, $\langle g \rangle \triangleleft D$. Але тоді $G_2 = A_1 \leftthreetimes D$, $A_2 = A_1 \times A_0$, $A_0 = A_2 \cap D < C_{A_2}(g) = 1$, а $A_1 = A_2$, що суперечить припущенню. Отже, при наших припущеннях випадок 1 неможливий, а тому G — $T(\overline{A})$-група.

Випадок 2. Нехай з умови $Z(G) \cap G' = 1$ випливає, що підгрупа $U = G_1 \cdot Z(G)$, а також $U / Z(G)$ в групі G типу 3 теореми нільпотентні неабелеві. Нільпотентні групи з $G / Z(G)$ абелеві, а тому G може бути лише групою типу 2 теореми. В групах згаданого типу A — нормальна силовська q-підгрупа з G, а тому A_1 — скінченна нормальна силовська q-підгрупа з $G_1 = A_1 \leftthreetimes B_1$, B_1 — доповнення A_1 в G_1, $B_1' = 1$. В $G / Z(G)$ існує єдина неабелева нільпотентна підгрупа $U / Z(G)$, що співпадає з силовською q-підгрупою з $G / Z(G)$. Звідси $A < U = A \leftthreetimes V \supset G_1$, де $V = \langle b \rangle \cdot Z(G)$, $[A, V] = \langle c \rangle < Z(U) \cap A$, $|c| = q$, $A = \langle c \rangle \cdot \langle d \rangle$, $Z(U) \cap A = \langle c \rangle \cdot \langle d^q \rangle$. Зрозуміло, що $\langle c \rangle < A_1$. Припустивши, що $A_1 < A$, одержимо, що $A_1 < \langle c \rangle \cdot \langle d^q \rangle < Z(U)$, а тому $G_1 = A_1 \times B_1$ — абелева група, що неможливо. Отже, $G' = A < A_1 < G_1 < G_3$ і G — $T(\overline{A})$-група. Теорема доведена.

Теорема 2. *Для будь-якої неперіодичної локально розв'язної групи G наступні умови еквівалентні*:

1) *всяка нескінченна неабелева підгрупа X із G субнормальна в підгрупі Y із G і нормальна в Y*;

2) *для будь-яких трьох нескінченних неабелевих підгруп A, B, C із G з умови $A \triangleleft B \triangleleft C$ випливає $A \triangleleft C$*;

3) G — *$T(\overline{A})$-група* (*теорема* 1);

4) *всяка неабелева підгрупа X із G субнормальна в Y із G і нормальна в Y.*

Доведення. Нехай G — неперіодична локально розв'язна група. Тоді умова 2 є очевидним наслідком умови 1. В [10] встановлено, що з умови 2 випливає умова 3. Покажемо, що з умови 3 випливає умова 4. Нехай $X \triangleleft\triangleleft Y$, $X' \neq 1$, і в G справедлива умова 3. Покажемо, що $X \triangleleft Y$. Нехай $A = X = X_0 \triangleleft \ldots \triangleleft X_i \triangleleft \ldots \triangleleft X_n = Y = C$. При $n < 2$ $X \triangleleft Y$. Доведемо, що $X \triangleleft Y$ індукцією за n. Нехай $n > 1$. Припустимо, що для всіх субнормальних рядів довжиною $n - 1$ це твердження справедливе. Покладемо $B = X_{n-1}$. Тоді $B = X_{n-1} \triangleleft X_n = C$. За припущенням індукції $A = X_0 \lhd X_{n-1} = B$. Звідси $A \lhd B \lhd C$, $A \lhd C$, $X_0 \lhd X_n$, $X \lhd Y$, тобто з умови 3 випливає умова 4. Умова 1 є очевидним наслідком умови 4. Теорема доведена.

1. *Best E., Taussky O.* A class of groups // Proc. PJA. Sect. A. – 1942. – **47**. – P. 55.
2. *Gaschutz W.* Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist // J. reine und angew Math. – 1957. – **198**, № 1, 2. – S. 87–92.
3. *Huppert B.* Endliche Gruppen. – Berlin ets.: Springer, 1967. – 795 s.
4. *Zacher G.* Caratterizzazione dei *t*-gruppi finite risolubili // Ricerche Mat. – 1952. – **1**. – P. 287–294.
5. *Абрамовский И. Н., Каргаполов М. И.* Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, вып. 381. – С. 242–243.
6. *Абрамовский И. Н.* Локально обобщенные гамильтоновые группы // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 3. – С. 481–485.
7. *Giovanni D., Francosis F.* Groups in which every infinite subnormal subgroups is normal // J. Algebra. – 1985. – **96**, № 2. – P. 566–580.
8. *Robinson D. A.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1964. – **60**. – P. 21–38.
9. *Субботин И. Я., Кузенный Н. Ф.* О группах с условием транзитивности // Исследование групп с ограничением для подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 73–80.
10. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Новые характеризации локально нильпотентных IH-групп // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 3. – С. 322–326.
11. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Локально разрешимые группы с условием транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей // Методы исследования алгебраических и топологических структур. – Киев. пед. ин-т, 1989. – С. 45–52.
12. *Кузенный Н. Ф., Левищенко С. С., Субботин И. Я.* Локально разрешимые $T(\overline{A})$-группы // Междунар. конф. по алгебре: Тез. докл. – Новосибирск: Университетское, 1992. – С. 55.
13. *Кузенный Н. Ф., Левищенко С. С., Субботин И. Я.* Некоторые результаты описания периодических $T(\overline{A})$-групп с абелевым локально нильпотентным корадикалом // III Междунар. конф. по алгебре памяти М. И. Каргаполова: Тез. докл. – Красноярск: Ин-т математики СО АН СССР, 1993. – С. 189–190.
14. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. – М.: Наук, 1966. – 603 с.
15. *Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 6. – С. 228.
16. *Dixon J. D.* The structure of linear groups. – New York: Van Nostrand, 1971. – 183 p.
17. *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. – 1948. – **60**, № 8. – С. 1313–1315.
18. *Redei L.* Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie // J. reine und angew. Mat. – 1950. – **188**. – S. 201–227.
19. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
20. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
21. *Кузенный Н. Ф., Левищенко С. С., Семко Н. Н.* Группы с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Методы исследования алгебраических и топологических структур. – Киев: Киев. пед. ин-т, 1989. – С. 37–45.
22. *Зайцев Д. И.* О дополняемости подгрупп в экстремальных группах // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 72–130.
23. *Taunt D.* On A-groups // Proc. Cambridge Ph. Soc. – 1949. – **45**, № 1. – P. 14–42.
24. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С. 179–188.
25. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1976. – **10**. – С. 60–76.
26. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. – М.: Наука, 1967. – 111 с.

Одержано 31.01.95