УДК 517.53

А. П. Голуб (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБОБЩЕННЫЕ МОМЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

In the paper some invariance properties of Pade approximants relates to bilinear transformations of approximated function are generalized by using the method of generalized moment representations.

За допомогою методу узагальнених моментних зображень узагальнені відомі властивості інваріантності апроксимацій Паде при дробово-лінійних перетвореннях наближуваної функції.

Приведем необходимые в дальнейшем определения и обозначения.

***Определение* 1** [1, с. 36]. *Пусть функция $f(z)$ в окрестности точки $z=0$ разлагается в степенной ряд вида*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k. \tag{1}$$

Тогда рациональная функция

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)}, \tag{2}$$

где $P_M(z)$ и $Q_N(z)$ — алгебраические многочлены степеней $\le M$ и $\le N$ соответственно, называется аппроксимантой Паде функции $f(z)$ порядка $[M/N]$, если

$$f(z) - [M/N]_f(z) = O(z^{M+N+1}) \quad \text{при} \quad z \to 0.$$

Аппроксимации Паде как аппарат приближения аналитических функций во многих случаях имеют значительное преимущество над полиномиальными приближениями и нашли широкое применение в задачах вычислительной математики, теории чисел, теоретической физики. Большое количество работ посвящено изучению общих свойств этих аппроксимаций, в частности, свойств инвариантности при различных преобразованиях аппроксимируемых функций. В [1] приводится следующий результат.

Теорема 1 [1, с. 44]. *Пусть для аналитической функции вида* (1) *существует аппроксиманта Паде порядка $[N/N]$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда для всех a, $b, c, d \in \mathbb{R}$ таких, что $c + ds_0 \ne 0$, существует также аппроксиманта Паде функции $\tilde{f}(z) = (a + bf(z))/(c + df(z))$ и при этом, если обозначить $[N/N]_f(z) =: P_N(z)/Q_N(z)$, то $[N/N]_{\tilde{f}(z)} = \tilde{P}_N(z)/\tilde{Q}_N(z)$, где*

$$\tilde{P}_N(z) = aQ_N(z) + bP_N(z), \quad \tilde{Q}_N(z) = cQ_N(z) + dP_N(z).$$

В 1981 г. В. К. Дзядык [2] предложил новый подход к изучению аппроксимаций Паде, основанный на методе обобщенных моментных представлений.

***Определение* 2** [2]. *Обобщенным моментным представлением числовой последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ в банаховом пространстве X называется совокупность равенств*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = 0, \ldots, \infty, \tag{3}$$

где $x_k \in X$, $k = 0, \ldots, \infty$, $y_j \in X^*$, $j = 0, \ldots, \infty$, а через $\langle x, y \rangle$ обозначается значение функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$.

Используя и развивая этот подход, удалось получить целый ряд результатов, касающихся свойств и поведения аппроксимаций Паде и их обобщений для многих специальных функций [3–7]. Оказалось также, что применение обобщенных моментных представлений позволяет получить теоремы, обобщающие теоремы инвариантности для аппроксимаций Паде.

Теорема 2. *Пусть для аналитической функции вида* (1) *существует аппроксиманта Паде порядка* $[N-1/N]$, $N \in \mathbb{N}$,

$$[N-1/N]_f(z) =: P_{N-1}(z)/Q_N(z).$$

Тогда для функции

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) = {} & \{f(z)[z(1+\xi_{11}s_1)-s_0\xi_{11}]+s_0^2\xi_{11}\}\times \\ & \times\{f(z)[z^2(\xi_{01}\xi_{10}s_1-\xi_{00}-\xi_{00}\xi_{11}s_1)+ \\ & + z(-\xi_{10}+\xi_{00}\xi_{11}s_0-\xi_{01}-\xi_{10}\xi_{01}s_0)-\xi_{11}]+ \\ & + [z(1+\xi_{10}s_0+\xi_{11}s_0-\xi_{00}\xi_{11}s_0^2+\xi_{01}s_0+\xi_{10}\xi_{01}s_0^2)+\xi_{11}s_0]\}^{-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

если только $1+\xi_{10}s_0+\xi_{11}s_1 \neq 0$, *также существует аппроксиманта Паде порядка* $[N-1/N]$ *и при этом ее знаменатель* $\tilde{Q}_N(z)$ *может быть представлен следующей формулой:*

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_N(z) = {} & \frac{1}{1+\xi_{10}s_0+\xi_{11}s_1}\left\{Q_N(z)\left[1+(\xi_{10}+\xi_{01})s_0+\xi_{11}s_1+\right.\right. \\ & \left. + \frac{1}{z}\xi_{11}s_0-(\xi_{00}\xi_{11}s_0-\xi_{01}\xi_{10}s_1)s_0\right]+ \\ & + P_{N-1}(z)\left[-(\xi_{10}+\xi_{01})+(\xi_{00}+\xi_{11}s_1)-\right. \\ & \left. -\frac{1}{z}\xi_{11}+(\xi_{01}\xi_{10}s_1-\xi_{00}\xi_{11}s_1-\xi_{00})z\right]-z^N\sum_{j=2}^{N}c_j^{(N)}(\xi_{10}s_j+\xi_{11}s_{j+1})+ \\ & \left. + z^{N+1}\left[(\xi_{00}\xi_{11}s_0-\xi_{01}\xi_{10}s_1-\xi_{01})z-\xi_{11}\right]\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}s_j\right\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $c_j^{(N)}, j=0,\ldots,N,$ — *коэффициенты многочлена*

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}z^{N-j}.$$

Доказательство. Поскольку для $f(z)$ существует аппроксиманта Паде порядка $[N-1/N]$, то отличен от нуля определитель Ганкеля $H_N =: =: \det\|s_{k+j}\|_{k,j=0}^{\infty} \neq 0$. Поэтому согласно [3] для последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ можно построить обобщенное моментное представление вида (3) в некотором гильбертовом пространстве X. Рассмотрим линейное преобразование $A: X \Rightarrow X$ такое, что $Ax_k = x_{k+1}$, $k=0,\ldots,\infty$, и сопряженное ему преобразование $A^*y_j = y_{j+1}$, $j=0,\ldots,\infty$. Тогда (3) можно переписать в виде $s_k = \langle A^k x_0, y_0\rangle$, $k=0,\ldots,\infty$. Введем теперь преобразование $\tilde{A}: X \Rightarrow X$ вида:

$$\tilde{A}x = Ax + x_0\langle x, \xi_{00}y_0+\xi_{01}y_1\rangle + x_1\langle x, \xi_{10}y_0+\xi_{11}y_1\rangle.$$

Обозначим $\tilde{x}_k = \tilde{A}^k x_0, k = 0, \dots, \infty$, $\tilde{y}_j = \tilde{A}^{*j} y_0, j = 0, \dots, \infty$. Будем искать $\tilde{x}_k, k = 0, \dots, \infty$, в виде

$$\tilde{x}_k = \sum_{m=1}^{k} d_{k-m} x_m + e_k x_0, \quad k = 0, \dots, \infty \tag{6}$$

(полагаем $\sum_{m=1}^{k} = 0$, если $k < 1$). Применим к (6) оператор $\tilde{A}$. Получаем

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\,\tilde{x}_k = \sum_{m=1}^{k} d_{k-m} x_{m+1} + e_k x_1 +$$

$$+ x_0\left(\sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\xi_{00} s_m + \xi_{01} s_{m+1}) + e_k(\xi_{00} s_0 + \xi_{01} s_1) \right) +$$

$$+ x_1\left(\sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\xi_{10} s_m + \xi_{11} s_{m+1}) + e_k(\xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1) \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k+1} d_{k+1-m} x_m + e_{k+1} x_0.$$

Отсюда имеем

$$e_{k+1} = \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\xi_{00} s_m + \xi_{01} s_{m+1}) + e_k(\xi_{00} s_0 + \xi_{01} s_1),$$

$$d_k = e_k + \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\xi_{10} s_m + \xi_{11} s_{m+1}) + e_k(\xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1).$$

Рассмотрим производящие функции

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k, \quad D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k.$$

Тогда выполняются равенства

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = e_0 + \sum_{k=0}^{\infty} e_{k+1} z^{k+1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1}\left(\sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\xi_{00} s_m + \xi_{01} s_{m+1}) + e_k(\xi_{00} s_0 + \xi_{01} s_1) \right) =$$

$$= 1 + D(z) \sum_{m=1}^{\infty} (\xi_{00} s_m + \xi_{01} s_{m+1}) z^{m+1} + z(\xi_{00} s_0 + \xi_{01} s_1) E(z),$$

$$D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\xi_{10} s_m + \xi_{11} s_{m+1}) + (\xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1) \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k =$$

$$= (1+\xi_{10}s_0+\xi_{11}s_1)E(z) + D(z)\sum_{m=1}^{\infty}(\xi_{10}s_m+\xi_{11}s_{m+1})z^m.$$

Получаем систему уравнений относительно $E(z)$ и $D(z)$, из которой

$$D(z) = (1+\xi_{10}s_0+\xi_{11}s_1)\Bigg\{1-\sum_{m=1}^{\infty}(\xi_{10}s_m+\xi_{11}s_{m+1})z^m +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}z^{m+1}[(\xi_{00}s_0+\xi_{01}s_1)(\xi_{10}s_m+\xi_{11}s_{m+1})-$$

$$-(1+\xi_{10}s_0+\xi_{11}s_1)(\xi_{00}s_m+\xi_{01}s_{m+1})]\Bigg\}^{-1},$$

$$E(z) = \left[1-\sum_{m=1}^{\infty}(\xi_{10}s_m+\xi_{11}s_{m+1})z^m\right]\Bigg\{1-\sum_{m=1}^{\infty}(\xi_{10}s_m+\xi_{11}s_{m+1})z^m +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}z^{m+1}[(\xi_{00}s_0+\xi_{01}s_1)(\xi_{10}s_m+\xi_{11}s_{m+1})-$$

$$-(1+\xi_{10}s_0+\xi_{11}s_1)(\xi_{00}s_m+\xi_{01}s_{m+1})]\Bigg\}^{-1}.$$

Обозначим теперь

$$\tilde{s}_k = \langle \tilde{x}_k, y_0\rangle,\ k=0,\dots,\infty, \quad \tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{s}_k z^k.$$

С учетом изложенного выше имеем

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\langle \tilde{x}_k, y_0\rangle z^k = \sum_{k=1}^{\infty}z^k\sum_{m=1}^{k}d_{k-m}s_m + \sum_{k=0}^{\infty}e_k z^k s_0 =$$

$$= f(z)D(z) + s_0(E(z)-D(z)) =$$

$$= \{f(z)[z(1+\xi_{11}s_1)-s_0\xi_{11}] + s_0^2\xi_{11}\}\times$$

$$\times\{f(z)[z^2(\xi_{01}\xi_{10}s_1-\xi_{00}-\xi_{00}\xi_{11}s_1) +$$

$$+ z(-\xi_{10}+\xi_{00}\xi_{11}s_0-\xi_{01}-\xi_{10}\xi_{01}s_0)-\xi_{11}] +$$

$$+ [z(1+\xi_{10}s_0+\xi_{11}s_0-\xi_{00}\xi_{11}s_0^2+\xi_{01}s_0+\xi_{10}\xi_{01}s_0^2)+\xi_{11}s_0]\}^{-1},$$

т. е. мы получили функцию (4). Чтобы построить ее аппроксиманту Паде порядка $[N-1/N]$, нужно согласно [2] сначала биортогонализировать системы $\{\tilde{x}_k\}_{k=0}^{N}$ и $\{\tilde{y}_j\}_{j=0}^{N}$, а именно: построить нетривиальный обобщенный полином $\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N}\tilde{c}_k^{(N)}\tilde{x}_k$, имеющий свойство $\langle \tilde{x}_N, \tilde{y}_j\rangle = 0$, $j=0,\dots,N-1$. Легко видеть, что этот полином в случае, когда $1+\xi_{10}s_0+\xi_{11}s_1 \neq 0$, будет совпадать с точностью до постоянного множителя с нетривиальным обобщенным полиномом $X_N = \sum_{k=0}^{N}c_k^{(N)}x_k$, имеющим свойство $\langle X_N, y_j\rangle = 0$, $j=0,\dots$ $\dots, N-1$.

Необходимо, считая известными коэффициенты $c_k^{(N)}, k=0, \ldots, N$, определить коэффициенты $\tilde{c}_k^{(N)}, k=0, \ldots, N$. Для этого найдем выражения элементов $x_k, k=0, \ldots, N$, через элементы $\tilde{x}_k, k=0, \ldots, N$. Имеем

$$\tilde{x}_k = \sum_{m=1}^{k} d_{k-m} x_m + e_k x_0.$$

Обозначим

$$\tilde{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{x}_k z^k, \quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k.$$

Тогда получаем

$$\tilde{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=1}^{k} d_{k-m} x_m + \sum_{k=0}^{\infty} z^k e_k x_0 = X(z) D(z) + (E(z) - D(z))\, x_0.$$

Отсюда

$$X(z) = \frac{\tilde{X}(z) + (D(z) - E(z))\, x_0}{D(z)}.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях z, имеем

$$x_k = \frac{1}{1 + \xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1} \left\{ \tilde{x}_k + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{x}_j \times \right.$$

$$\times [-\xi_{10} s_{k-j} - \xi_{11} s_{k-j+1} + (\xi_{00} s_0 + \xi_{01} s_1)(\xi_{10} s_{k-j-1} + \xi_{11} s_{k-j}) -$$

$$\left. - (1 + \xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1)(\xi_{00} s_{k-j-1} + \xi_{01} s_{k-j})] + (\xi_{10} s_k + \xi_{11} s_{k+1}) \tilde{x}_0 \right\}.$$

Таким образом,

$$\tilde{X}_N = X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k = \frac{1}{1 + \xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1} \left\{ \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \tilde{x}_k + \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{x}_j \sum_{k=j}^{N-1} c_{k+1}^{(N)} \times \right.$$

$$\times [-\xi_{10} s_{k-j+1} - \xi_{11} s_{k-j+2} + (\xi_{00} s_0 + \xi_{01} s_1)(\xi_{10} s_{k-j} + \xi_{11} s_{k-j+1}) -$$

$$\left. - (1 + \xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1)(\xi_{00} s_{k-j} + \xi_{01} s_{k-j+1})] + \tilde{x}_0 \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (\xi_{10} s_k + \xi_{11} s_{k+1}) \right\},$$

вследствие чего справедливо равенство

$$\tilde{c}_k^{(N)} = \frac{1}{1 + \xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1} \left\{ \delta_{k,n} c_N^{(N)} + (1 - \delta_{k,N}) \sum_{j=k}^{N-1} c_{j+1}^{(N)} \times \right.$$

$$\times [-\xi_{10} s_{j-k+1} - \xi_{11} s_{j-k+2} + (\xi_{00} s_0 + \xi_{01} s_1)(\xi_{10} s_{j-k} + \xi_{11} s_{j-k+1}) -$$

$$- (1 + \xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1)(\xi_{00} s_{k-j} + \xi_{01} s_{k-j+1})] +$$

$$\left. + \delta_{k,0} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} (\xi_{10} s_j + \xi_{11} s_{j+1}) \right\},$$

где

$$\delta_{k,j} := \begin{cases} 1, & \text{при} \quad k = j, \\ 0, & \text{при} \quad k \neq j. \end{cases}$$

Согласно [2] знаменатель $\tilde{Q}_N(z)$ аппроксиманты Паде функции $\tilde{f}(z)$ порядка $[N-1/N]$ вычисляется по формуле

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} z^{N-k} = \frac{1}{1+\xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1} \left\{ \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k} + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} z^{N-k} \sum_{j=k}^{N-1} c_{j+1}^{(N)} [-\xi_{10} s_{j-k+1} - \xi_{11} s_{j-k+2} +$$

$$+ (\xi_{00} s_0 + \xi_{01} s_1)(\xi_{10} s_{j-k} + \xi_{11} s_{j-k+1}) -$$

$$- (1 + \xi_{10} s_0 + \xi_{11} s_1)(\xi_{00} s_{k-j} + \xi_{01} s_{k-j+1})] +$$

$$\left. + z^N \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (\xi_{10} s_k + \xi_{11} s_{k+1}) \right\},$$

откуда с учетом равенств

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}, \quad Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k} \sum_{j=0}^{k-1} s_j z^j$$

и получаем формулу (5).

Замечания. **1.** Аналогично может быть получена формула для числителя аппроксиманты Паде функции $\tilde{f}(z)$ порядка $[N-1/N]$.

2. При $\xi_{01} = \xi_{10} = \xi_{11} = 0$ из теоремы 2 вытекает результат, эквивалентный утверждению теоремы 1.

1. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 6. – С. 8–12.
3. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 3–15. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
4. *Голуб А. П.* Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций. – Киев, 1981. – С. 15–56. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
5. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.25).
6. *Голуб А. П.* Некоторые свойства биортогональных полиномов и их приложения к аппроксимациям Паде // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 977–984.
7. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления, биортогональные полиномы и аппроксимации Паде // Там же. – № 10. – С. 1328–1335.

Получено 16.05.95