УДК 514. 7

Ю. Л. Далецкий, В. А. Кушниревич (Киев. политехн. ин-т)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ В СУПЕРАЛГЕБРЕ ЛИ *

Formal construction of a $(\mathfrak{A}, d)$-system as an apparatus of noncommutative differential geometry is developed. By using a "conditional differential", which is an analog of the Hamiltonian map, we construct a series of brackets that generalize the classical Poisson brackets.

Розвивається формальна конструкція $(\mathfrak{A}, d)$-системи як основа апарата некомутативної диференціальної геометрії. За допомогою „умовного диференціала" (аналога гамільтонова відображення) побудовано серію дужок, що узагальнюють класичні дужки Пуассона.

1. В данной работе развивается формальная конструкция $(\mathfrak{A}, d)$-системы, описанная И. М. Гельфандом и одним из авторов (см. [1, 2], а также [3]), в качестве основания аппарата некоммутативной дифференциальной геометрии. Под этим понимается алгебраическая структура, одним из представлений которой служит аппарат дифференциальной геометрии гладкого многообразия: векторные поля, дифференциальные формы и операции над ними. Наши результаты тесно связаны со статьей А. Кабраса и А. М. Виноградова [4] о скобках Пуассона. Результаты работы [4] естественно описываются и обобщаются в рамках указанной формальной конструкции.

Отметим, что различные аспекты некоммутативной дифференциальной геометрии в широком плане разрабатываются А. Конном, Д. Кастлером и их последователями (см. [5] и имеющуюся в ней библиографию).

Мы, следуя И. М. Гельфанду и И. Я. Дорфман [6–8], исходим из понятия комплекса (Ω, d) над алгеброй Ли $\mathfrak{A}$. Строится „обертывающая" алгебра Ли $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A},\Omega}$, содержащая элементы $\mathfrak{A}, \Omega$ и их тензорные произведения.

Всюду ниже под алгеброй Ли $(\mathfrak{G}, [,], p)$ понимается градуированная (супер-) алгебра Ли со скобками $[\,,]$ и функцией четности p, подчиняющимися соотношению кососимметрии

$$[a, b] + (-1)^{p(a)p(b)}[b, a] = 0$$

и тождеству Якоби

$$(-1)^{p(g_1)p(g_3)}[g_1, [g_2, g_3]] + (-1)^{p(g_2)p(g_1)}[g_2, [g_3, g_1]] + \\ + (-1)^{p(g_3)p(g_2)}[g_3, [g_1, g_2]] = 0.$$

Значения $p(g)$ $(g \in \mathfrak{G})$, вообще говоря, — целочисленные векторы, $p(g)p(g')$ — скалярное произведение, элемент g полагаем четным или нечетным, если таково число $p(g) \cdot p(g)$.

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий, а также Международного научного фонда (грант № U44000).

В п. 2 изложены в удобной для нас форме некоторые из результатов работ [1, 2], а в п. 3 — основная конструкция, связанная с наличием в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ пары: дифференциала d и „условного дифференциала" Θ (являющегося дифференциалом в фактор-алгебре Ли $\mathfrak{G}$ $/\mathrm{Ker}\, d$), присоединенное действие которого — аналог гамильтонова отображения. Эта пара порождает серию скобок, приводящих в конкретной ситуации к классическим скобкам Пуассона, Схоутена – Нийенхейса, Фрелихера – Нийенхейса [4, 9]. В пп. 4, 5 строится алгебра Ли $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}\Omega}$, содержащая „мультивекторные поля" и „дифференциальные формы", и указываются следствия основной конструкции, приводящие к описанию указанных скобок.

Заметим, что в отличие от [4], в нашей концепции естественнее рассматриваются ко-замкнутые, а не ко-точные объекты, хотя нетрудно было бы провести изложение и для последних.

2. Назовем дифференциалом (грассмановым элементом) алгебры Ли $(\mathfrak{G}, [\ ,\ ], p)$ нечетный элемент $\gamma \in \mathfrak{G}$, имеющий свойство $[\gamma, \gamma] = 0$.

Присоединенное действие $L^{\gamma}\colon g \mapsto [g, \gamma]$ (отображение Ли) имеет свойство

$$(L^{\gamma})^2 g = [[g, \gamma], \gamma] = 0.$$

Элемент $L^{\gamma} g \in \mathfrak{G}$ называется дифференцированием Ли вдоль $g \in \mathfrak{G}$.

Дифференциал γ порождает в $\mathfrak{G}$ билинейную операцию

$$[g_1, g_2]_{\gamma} = [L^{\gamma} g_1, g_2] = [[g_1, \gamma], g_2].$$

Величину $\tilde{p}(g) = p(g) + \pi$, где $\pi = p(\gamma)$, назовем инверсной четностью элемента g.

Предложение 1. *Для любых элементов $g_j \in \mathfrak{G}$ четности $p_j = p(g_j)$ выполняются соотношения* $(\tilde{p}_j = p_j + \pi)$

$$1)\ L^{\gamma}[g_1, g_2]_{\gamma} = [L^{\gamma} g_1, L^{\gamma} g_2]; \tag{1}$$

$$2)\ [g_1, g_2]_{\gamma} + (-1)^{\tilde{p}_1 \tilde{p}_2}[g_2, g_1]_{\gamma} = L^{\gamma}((-1)^{\pi p_2}[g_1, g_2]);$$

$$3)\ (-1)^{\tilde{p}_1 \tilde{p}_3}[[g_1, g_2]_{\gamma}, g_3]_{\gamma} + \curvearrowright =$$
$$= \frac{1}{3}(-1)^{p_1 \tilde{p}_3} L^{\gamma}\{([g_1, [g_2, g_3]]_{\gamma} - 2[[g_1, g_2]_{\gamma}, g_3])\} + \curvearrowright.$$

Эти соотношения следуют из тождества Якоби после некоторых преобразований (знак $\curvearrowright$ обозначает сумму членов, получающихся путем циклической перестановки индексов).

Формулы предложения 1 приводят к двум вариантам алгебры Ли со скобкой $[\ ,\ ]_{\gamma}$.

Назовем γ-пространством коммутативную подалгебру Ли $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{G}$, инвариантную относительно операции $[\ ,\ ]_{\gamma}$:

$$[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] = 0,\ [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]_{\gamma} \subset \mathfrak{L}.$$

Непосредственным следствием является такое утверждение.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{L}$ — γ-пространство, то $\mathfrak{L}_{\gamma} = (\mathfrak{L}, [\ ,\ ]_{\gamma}, \tilde{p})$ — алгебра Ли и*

$$L^{\gamma}\colon (\mathfrak{L}_{\gamma}, [\ ,\ ]_{\gamma}, \tilde{p}) \to (\mathfrak{L}, [\ ,\ ], p)$$

— гомоморфизм алгебр Ли.

С другой стороны, рассмотрим ядро $Z_{\gamma} = \{z \in \mathfrak{G}, [z, \gamma] = 0\}$ и образ $\mathcal{T}_{\gamma} = \{h = [g, \gamma], g \in \mathfrak{G}\}$ отображения Ли L^{γ}. Очевидно, $\mathcal{T}_{\gamma} \subset Z_{\gamma}$.

Теорема 2. *Линейное пространство* $\mathcal{Z}_\gamma \subset \mathfrak{G}$ *является идеалом относительно операции* $[\ ,\ ]_\gamma$. *Фактор-пространство* $\mathcal{K}_\gamma = \mathfrak{G}\ /\mathcal{Z}_\gamma$ *имеет структуру алгебры Ли* $(\mathcal{K}_\gamma, [\ ,\ ]_\gamma, \tilde{p})$ *и*

$$L^\gamma\colon (\mathcal{K}_\gamma, [\ ,\ ]_\gamma, \tilde{p}) \to (\mathcal{T}_\gamma, [\ ,\ ], p)$$

— изоморфизм алгебр Ли.

Доказательство. Очевидно, что $g \in \mathcal{Z}_\gamma \Rightarrow [g, h]_\gamma = 0$ при любом $h \in \mathfrak{G}$. С другой стороны, для таких g и h

$$[h, g]_\gamma = [[h, \gamma], g] = (-1)^{\pi p(g)}[[h, g], \gamma] \in \mathcal{T}_\gamma \subset \mathcal{Z}_\gamma.$$

Поэтому операция $[\ ,\ ]_\gamma$ переносится в фактор-пространство $\mathfrak{G}\ /\mathcal{Z}_\gamma$. Изоморфизм линейных пространств следует из общих свойств линейных операторов, а алгебраический — из (1).

***Замечание* 1.** Из доказательства, очевидно, следует, что и $\mathcal{T}_\gamma$ — идеал относительно $[\ ,\ ]_\gamma$. При этом $(\mathfrak{G}\ /\mathcal{T}_\gamma, [\ ,\ ]_\gamma, \tilde{p})$ — также алгебра Ли и $\mathcal{Z}_\gamma / \mathcal{T}_\gamma$ — ее коммутативная подалгебра, являющаяся ядром гомоморфизма

$$L^\gamma\colon (\mathfrak{G}\ /\mathcal{T}_\gamma, [\ ,\ ]_\gamma, \tilde{p}) \to (\mathcal{T}_\gamma, [\ ,\ ], p).$$

3. Рассмотрим алгебру Ли $(\mathfrak{G}, [\ ,\ ], p)$ с дифференциалом d.

Пусть Ω — коммутативная подалгебра Ли, для которой

$$[\Omega; d] \subset \Omega. \tag{2}$$

Тогда Ω — d-пространство и в силу (2) алгебра Ли $\Omega_d = (\Omega, [\ ,\ ]_d, p + \pi)$ коммутативна.

Определение. *Назовем четный элемент* $\Theta \in \mathfrak{G}$ *гамильтоновым (условным дифференциалом относительно* Ω*), если выполнены условия*

1) $\omega_1, \omega_2 \in \Omega \Rightarrow [[\omega_1, \Theta], \omega_2] \in \Omega$;

2) *элемент* $d_\Theta = [\Theta, d]$ *является дифференциалом:*

$$[d_\Theta, d_\Theta] = [[\Theta, d], [\Theta, d]] = [[\Theta, \Theta]_d, d] = 0. \tag{3}$$

Этот дифференциал имеет свойства

$$[d_\Theta, d] = 0,$$

$$[[g, d], d_\Theta] = -[[g, d_\Theta], d] = [[g, \Theta]_d, d].$$

Из теоремы 1 следует такое утверждение.

Теорема 3. *Если коммутативная подалгебра Ли* $\Omega \subset \mathfrak{G}$ *подчиняется* (2) *и* Θ *— гамильтонов элемент, то скобки*

$$[\omega_1, \omega_2]_{d_\Theta} = [[\omega_1, [\Theta, d]], \omega_2]$$

порождают в Ω *структуру алгебры Ли*

$$\Omega_{d_\Theta} = (\Omega, [\ ,\ ]_{d_\Theta}, p + \pi)$$

и L^{d_Θ} *— ее гомоморфизм в* $(\mathfrak{G}, [\ ,\ ], p)$:

$$L^{d_\Theta}([\omega_1, \omega_2]_{d_\Theta}) = [[\omega_1, \omega_2]_{d_\Theta}, d_\Theta] = [[\omega_1, d_\Theta], [\omega_2, d_\Theta]]. \tag{4}$$

Доказательство. Достаточно показать, что Ω — d_Θ-пространство. Этот факт следует из легко проверяемого соотношения

$$[\omega_1, \omega_2]_{d_\Theta} = [[[\omega_1, \Theta], d], \omega_2] - (-1)^{\pi p_1}[[\Theta, [d, \omega_1]], \omega_2] =$$

$$= [[\omega_1, \Theta], [d, \omega_2]] + (-1)^{\pi p_1}[d, [[\omega_1, \Theta], \omega_2]] -$$

$$- (-1)^{\pi p_1}[[[d, \omega_1], \Theta], \omega_2], \tag{5}$$

где $p_1 = p(\omega_1), p_2 = p(\omega_2)$.

***Замечание* 2.** Следует отметить, что операция $\Theta(\omega_1, \omega_2) = [[\omega_1, \Theta], \omega_2]$ симметрична:

$$\Theta(\omega_2, \omega_1) = (-1)^{p_1 p_2}\Theta(\omega_1, \omega_2)$$

и вследствие этого билинейное выражение $\Theta_\pi(\omega_1, \omega_2) = (-1)^{\pi p_1}\Theta(\omega_1, \omega_2)$ инверсно-кососимметрично:

$$\Theta_\pi(\omega_2, \omega_1) = -(-1)^{\tilde p(\omega_2)\tilde p(\omega_1)}\Theta_\pi(\omega_1, \omega_2).$$

Введем в $\mathfrak{G}$ новую операцию

$$[\![g_1, g_2]\!]_\Theta = [[g_1, \Theta]_d, g_2]_d = [[[[g_1, d], \Theta], d], g_2]. \tag{6}$$

Из (6) непосредственно следует такое утверждение.

Предложение 2. *Для любых* $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ *справедливы соотношения*

1) $[\![g_1, g_2]\!]_\Theta = [[g_1, d], g_2]_{d_\Theta}$;

2) $[[\![g_1, g_2]\!]_\Theta, d] = [[g_1, d], [g_2, d]]_{d_\Theta}$;

3) $[[\![g_1, g_2]\!]_\Theta, \Theta]_d = [[[g_1, d], [g_2, d]]_{d_\Theta}, \Theta]$.

Теорема 4. *Гамильтонов элемент* Θ *является дифференциалом алгебры Ли* $\mathfrak{G}/Z_d$, *а пространство* Ω/Z_d — Θ-*пространством. Поэтому вследствие теоремы* 1 $(\Omega/Z_d, [\![\,,]\!]_\Theta, p)$ — *алгебра Ли и отображение Ли* $\mathcal{L}^\Theta: \omega \mapsto$ $\mapsto [\omega, \Theta]_d$ — *гомоморфизм алгебр Ли:*

$$\mathcal{L}^\Theta: (\Omega/Z_d, [\![\,,]\!]_\Theta, p) \to (\mathfrak{G}/Z_d, [\,,]_d, \tilde p),$$

$$[[\![\omega_1, \omega_2]\!]_\Theta, \Theta]_d = [[\omega_1, \Theta]_d, [\omega_2, \Theta]_d]_d \pmod{\operatorname{Ker} d}. \tag{7}$$

(*Мы для краткости обозначили тем же символом* ω *класс* $\{\omega + \operatorname{Ker} d\}$.)

Доказательство. Условие (3) означает, что $[\Theta, \Theta]_d \in Z_d$, т. е. Θ — дифференциал в $\mathfrak{G}/Z_d$. Пространство Ω/Z_d является Θ-пространством в силу предложения 2, поскольку Ω есть — d_Θ-пространство. Остальные утверждения получаются путем переноса на рассматриваемую ситуацию утверждений теоремы 1.

***Замечание* 3.** Объединяя утверждения теорем 3 и 2, получаем гомоморфизм алгебр Ли

$$L^d\mathcal{L}^\Theta: (\Omega/Z_d, [\![\,,]\!]_\Theta, p) \to (\mathcal{T}_d, [\,,], p),$$

$$L^d\mathcal{L}^\Theta: \qquad \omega \qquad \mapsto [[\omega, \Theta]_d, d] = [[\omega, d], d_\Theta],$$

при котором

$$[[[\![\omega_1, \omega_2]\!]_\Theta, \Theta]_d, d] = [[[\omega_1, \Theta]_d, d], [[\omega_2, \Theta]_d, d]].$$

4. Рассмотрим комплекс (Ω, d) линейных пространств над алгеброй Ли $(\mathfrak{A}, [\![\,,]\!], \tilde p)$.

По определению $\mathfrak{A}$ действует в $\Omega = \oplus \Omega_k$ двумя способами: с помощью операторов внутреннего умножения $a \mapsto i_a$ и дифференцирований Ли $a \mapsto L_a$, так что выполняются соотношения

$$d\colon \Omega_k \to \Omega_{k+1}, i_a\colon \Omega_k \to \Omega_{k-1}, i_a\Omega_0 = 0, L_a\colon \Omega_k \to \Omega_k \ (k = 0, 1, \dots),$$

$$d^2 = 0,\ i_{a_1} i_{a_2} + (-1)^{\tilde{p}(a_1)\tilde{p}(a_2)} i_{a_2} i_{a_1} = 0,$$

$$L_a = i_a d + d i_a,\ L_{a_1} i_{a_2} - (-1)^{\tilde{p}(a_1)\tilde{p}(a_2)} i_{a_2} L_{a_1} = i_{[\![a_1, a_2]\!]}.$$

Паре $(\mathfrak{A}, \Omega)$ сопоставляется алгебра Ли $(\mathfrak{G}_0, [\ ,\ ], p)$, где $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{A} \dotplus L\mathfrak{A} \dotplus \dotplus \{d\} \dotplus \Omega$ с функцией четности p:

$$p(a) = (\tilde{p}(a), -1),\ p(d) = (0, 1) = \pi,$$

$$p(L_a) = (\tilde{p}(a), 0) = p(a) + \pi,\ p(\omega) = (\tilde{p}(\omega), k) \text{ при } \omega \in \Omega_k$$

и скобками

$$[a, a'] = 0,\ [d, d] = 0,\ [L_a, a'] = [\![a, a']\!],\ [L_a, L_{a'}] = L_{[\![a, a']\!]},$$

$$[L_a, \omega] = L_a\omega,\ [\omega, \omega'] = 0,\ [a, d] = L_a,\ [a, \omega] = i_a\omega,$$

$$[L_a, d] = 0,\ [d, \omega] = (\overline{d\omega})$$

($(d\omega)$ — дифференциал ω в отличие от произведения $d\omega$ в обертывающей алгебре).

Наконец, мы рассматриваем универсальную обертывающую алгебру $\mathfrak{G}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}_0$ и отвечающую ей алгебру Ли $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}\,\Omega} = (\mathfrak{G}, [,], p)$, скобки которой однозначно определяются правилом Лейбница

$$[g, g_1 g_2] = [g, g_1] g_2 + (-1)^{p(g)p(g_1)} g_1 [g, g_2].$$

В $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}\,\Omega}$ содержатся две коммутативные подалгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{\Omega}$, пространства которых есть соответственно симметричные тензорные алгебры коммутативных алгебр Ли $(\tilde{\mathfrak{A}}, [\ ,\ ], p)$ и $(\tilde{\Omega}, [\ ,\ ], p)$ $(p|_{\Omega_k} = (\tilde{p}, k))$. Будем называть элементы $\tilde{\Omega}$ дифференциальными формами, элементы $\mathfrak{A}$ — векторными полями, элементы $\mathfrak{A}^k = s(\mathfrak{A} \otimes \dots \otimes \mathfrak{A})$ — k-векторными полями.

При этих условиях $\mathfrak{A}$, $\tilde{\mathfrak{A}}$ и $\tilde{\Omega}$ — d-пространства, причем $\tilde{\Omega}_d$ коммутативно: $[\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}]_d = 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пространство* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *мультивекторных полей имеет структуру алгебры Ли* $(\tilde{\mathfrak{A}}, [\![\ ,\ ]\!] = [\ ,\ ]_d, \tilde{p})$, *сужение которой на подалгебру Ли* $\mathfrak{A}$ *совпадает с* $(\mathfrak{A}, [\![\ ,\ ]\!], \tilde{p})$. *Скобки на* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *определяются по* $[\![\ ,\ ]\!]$ *с помощью правила Лейбница*

$$[A_1 A_2, B]_d = A_1 [\![A_2, B]\!] + (-1)^{\tilde{p}(B)\tilde{p}(A_2)} [\![A_1, B]\!] A_2,$$

где при $A = a_1 a_2 \dots a_n$ *четность* $\tilde{p}(A) = \sum \tilde{p}(a_k)$. *При этом выполняется соотношение*

$$[[\![A, B]\!], d] = [[A, d], [B, d]], \quad A, B \in \tilde{\mathfrak{A}}.$$

Отметим, что симметричная алгебра пространства $(\mathfrak{A}, p = (\tilde{p}, -1))$ — это антисимметричная алгебра для $(\mathfrak{A}, \tilde{p})$.

Скобки $[\,,]_d$ не подчиняются тождеству Якоби на всем пространстве $\mathfrak{G}$, однако, в силу теоремы 2 эти скобки корректно определены на фактор-пространстве $\mathfrak{G}/\mathrm{Ker}\,d$, где $\mathrm{Ker}\,d = \{g \in \mathfrak{G} : [g, d] = 0\}$, и вносят структуру алгебры Ли $(\mathfrak{G}/\mathrm{Ker}\,d, [\,,]_d, p)$. При этом справедливо соотношение

$$[[g_1, g_2]_d, d] = [[g_1, d], [g_2, d]] \quad (g_1, g_2 \in \mathfrak{G})$$

(Всюду, где рассматривается фактор-пространство, мы обозначаем одним и тем же символом элемент $g \in \mathfrak{G}$ и определенный им класс $\{g + \mathrm{Ker}\,d\} \in \in \mathfrak{G}/\mathrm{Ker}\,d$.)

Рассмотрим, в частности, линейное подмножество $\tilde{\Omega} \otimes \mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, порожденное элементами вида ωa — дифференциальными формами с векторными значениями. Прямыми вычислениями получаем формулу

$$[\omega_1 a_1, \omega_2 a_2]_d = [\omega_1 a_1, \omega_2 a_2]'_d + \\ + (-1)^{p(\omega_2)p'(\omega_1 a_1) + p'(a_1)p'(a_2)}[\omega_2[\omega_1, a_2]a_1, d],$$

где

$$[\omega_1 a_1, \omega_2 a_2]'_d = (-1)^{p'(a_1)p(\omega_2)}\omega_1\omega_2[\![a_1, a_2]\!] + [\omega_1 a_1, \omega_2]_d a_2 - \\ - (-1)^{p'(\omega_1 a_1)p'(\omega_2 a_2)}[\omega_2 a_2, \omega_1]_d a_1, \tag{8}$$

где $p'(\omega a) = p(\omega) + p'(a)$, $p'(a) = (\tilde{p}(a), 0)$.

Эта формула показывает, что $(\tilde{\Omega} \otimes \mathfrak{A}/\mathrm{Ker}\,d, [\,,]_d, p')$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{G}/\mathrm{Ker}\,d$. Оказывается, что справедливо более точное утверждение.

Теорема 6 (см. предложение 1.1 из [1]). *В* $\tilde{\Omega} \otimes \mathfrak{A}$ *структура алгебры Ли* $(\tilde{\Omega} \otimes \mathfrak{A}, [,]'_d, p(\omega) + (\tilde{p}(a), 0))$ *вносится скобками* (8).

Доказательство. Кососимметричность следует непосредственно из формулы (8). Тождество Якоби выводится из этой же формулы с учетом коммутативности $\tilde{\Omega}$, тождества Якоби для $[\![\,,]\!]$ и соотношения

$$[\omega_1 a_1, \omega'_2\omega''_2]_d = [\omega_1 a_1, \omega'_2]_d\omega''_2 + (-1)^{p'(\omega_1 a_1)p(\omega'_2)}\omega'_2[\omega_1 a_1, \omega''_2]_d.$$

5. Рассмотрим бивекторное поле вида

$$\Theta = \sum_k a_k b_k \ (a_k b_k \in \mathfrak{A}), \tag{9}$$

полагая для упрощения $p(a_k) = p(b_k) = (0, 1)$. В этом случае

$$[\omega, \Theta] = \sum_k \{[\omega, a_k]b_k - [\omega, b_k]a_k + [a_k, [b_k, \omega]]\} \quad (\omega \in \tilde{\Omega}) \tag{10}$$

и при $\omega_1, \omega_2 \in \tilde{\Omega}$

$$[[\omega_1, \Theta], \omega_2] = \sum_k \{[\omega_1, a_k][b_k, \omega_2] - [\omega_1, b_k][a_k, \omega_2]\} \in \tilde{\Omega}.$$

Поэтому условие гамильтоновости элемента Θ сводится к соотношению

$$[d_\Theta, d_\Theta] = 0, \tag{11}$$

где

$$d_\Theta = \sum_k \{a_k L_{b_k} - b_k L_{a_k} + [\![a_k, b_k]\!]\}.$$

Предложение 3. *Пусть выполнено условие коммутативности*

$$[\![a_j, a_k]\!] = [\![b_j, b_k]\!] = [\![a_j, b_k]\!] = 0 \quad (\forall j, k).$$

Тогда элемент Θ *вида* (9) *гамильтонов и, более того,*

$$[\Theta, \Theta]_d = [\![\Theta, \Theta]\!] = 0. \tag{12}$$

Каждая из скобок $[\,,]_{d_\Theta}$ и $[\![\,,]\!]_\Theta$ на пространстве $\tilde{\Omega}$ подчиняется правилу Лейбница:

$$[\omega, \omega_1\omega_2]_{d_\Theta} = [\omega, \omega_1]_{d_\Theta}\omega_2 + (-1)^{p(\omega_1)(p(\omega)+\pi)}\omega_1[\omega, \omega_2]_{d_\Theta},$$

$$[\![\omega, \omega_1\omega_2]\!]_\Theta = [\![\omega, \omega_1]\!]_\Theta\omega_2 + (-1)^{p(\omega_1)p(\omega)}\omega_1[\![\omega, \omega_2]\!]_\Theta.$$

В связи с этим будем называть эти скобки скобками Пуассона. В силу предложения 2 они связаны соотношением

$$(\overline{d[\![\omega_1,\omega_2]\!]_\Theta}) = \left[(\overline{d\omega_1}), (\overline{d\omega_2})\right]_{d_\Theta}.$$

Это соотношение показывает, что $d\tilde{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$ — подалгебра Ли в $(\tilde{\Omega}, [\,,]_{d_\Theta}, p+\pi)$.

Из результатов, изложенных в п.3, следует такая теорема.

Теорема 7. *Для гамильтонова элемента* Θ *вида* (9) *пространство* $\tilde{\Omega}$ *и его фактор-пространство* $\tilde{\Omega}/\operatorname{Ker} d$ *имеют структуру алгебры Ли* $(\tilde{\Omega}, [\,,]_{d_\Theta}, p+\pi)$ *и* $(\tilde{\Omega}/\operatorname{Ker} d, [\![\,,]\!]_\Theta, p)$ *соответственно, и справедливы гомоморфизмы* (4) *и* (7).

6. Введем в рассмотрение линейное отображение $\mathcal{H}\colon \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega} \otimes \mathfrak{A}$

$$\mathcal{H}\omega = (-1)^m \sum_k \{[\omega, b_k]a_k - [\omega, a_k]b_k\} \quad (\omega \in \tilde{\Omega}_m). \tag{13}$$

Из (10) следует

$$[\mathcal{H}\omega, \omega_1] = -(-1)^{\pi p(\omega)}[[\omega, \Theta], \omega_1] \quad (\omega, \omega_1 \in \tilde{\Omega})$$

и вследствие формулы (11) выражение для скобки Пуассона (см. [11] для ω_1, $\omega_2 \in \tilde{\Omega}_1$):

$$[\omega_1, \omega_2]_{d_\Theta} = -(\overline{d[\mathcal{H}\omega_1,\omega_2]}) - (-1)^{m_1}[\mathcal{H}\omega_1,(\overline{d\omega_2})] - (-1)^{m_1+m_2}[(\overline{d\omega_1}),\mathcal{H}\omega_2],$$

где $\omega_1 \in \tilde{\Omega}_{m_1}, \omega_2 \in \tilde{\Omega}_{m_2}$. В частности,

$$[d\xi_1, d\xi_2]_{d_\Theta} = -(\overline{d[\mathcal{H}d\xi_1,d\xi_2]}) \quad (\xi_1, \xi_2 \in \tilde{\Omega}).$$

Назовем отображение $\mathcal{H}$ гамильтоновым, если оно осуществляет гомоморфизм

$$\mathcal{H}(\overline{d[\![\omega_1,\omega_2]\!]_\Theta}) = \mathcal{H}[(\overline{d\omega_1}),(\overline{d\omega_2})]_{d_\Theta} = [\mathcal{H}(\overline{d\omega_1}),\mathcal{H}(\overline{d\omega_2})]'_d$$

$$(\tilde{\Omega}/\operatorname{Ker} d, [\![\,,]\!]_\Theta, p) \xrightarrow{\ d\ } (d\tilde{\Omega}, [\,,]_{d_\Theta}, p+\pi) \xrightarrow{\ \mathcal{H}\ } (\tilde{\Omega}\otimes\mathfrak{A}, [\,,]'_d, p').$$

Отметим, что при $\omega \in \tilde{\Omega}_1$

$$\mathcal{H}\omega = [\omega, \Theta] \in \tilde{\Omega}_0 \otimes \mathfrak{A}.$$

При некоторых естественных условиях гамильтоновость Θ и $\mathcal{H}$ связаны между собой.

Предложение 4. *Справедливо соотношение*

$$[\mathcal{H}[(\overline{d\omega_1}),(\overline{d\omega_2})]_{d_\Theta} - [\mathcal{H}(\overline{d\omega_1}),\mathcal{H}(\overline{d\omega_2})]'_d,(\overline{d\omega_3})] =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^{m_1+m_3}[(\overline{d\omega_1}),[(\overline{d\omega_2}),[(\overline{d\omega_3}),\ [\Theta,\Theta]_d]]], \tag{14}$$

где $\omega_j \in \tilde{\Omega}_{m_j}$ *и* $\Theta = \sum_k a_k b_k$.

Теорема 8. *Отображение* $\mathcal{H}$ *является гамильтоновым при каждом из следующих условий:*

а) *если выполнены условия коммутативности*

$$[\![a_j, a_k]\!] = [\![b_j, b_k]\!] = [\![a_j, b_k]\!] = 0 \quad (\forall j, k);$$

б) *если* $[\Theta,\Theta]_d = 0$ *и для* $\xi \in \tilde{\Omega} \otimes \mathfrak{A}$ *условие* $[\xi,\ d\tilde{\Omega}] = 0$ *влечет* $\xi = 0$;

в) *если* $[\Theta,\Theta]_d = 0$ *и для* $\xi \in \tilde{\Omega} \otimes \mathfrak{A}$ *условие* $[\xi, d] = 0$ *влечет* $\xi = 0$.

Доказательство. Предложение а) проверяется прямым подсчетом, предложение б) следует из (14). Далее, из формул (10) и (12) выводится соотношение

$$z = \mathcal{H}[(\overline{d\omega_1}),(\overline{d\omega_2})]_{d_\Theta} - [\mathcal{H}(\overline{d\omega_1}),\mathcal{H}(\overline{d\omega_2})]'_d = x + y,$$

где $x \in \tilde{\Omega}$, $y \in \operatorname{Ker} d$, откуда $[z, d] = [x, d] \in \tilde{\Omega}$. Для $x \in \tilde{\Omega} \otimes \mathfrak{A}$ это означает $[z, d] = 0$ и вследствие в) $z = 0$.

1. *Гельфанд И. М., Далецкий Ю. Л.* Некоторые формальные дифференциальные структуры, связанные с суперaлгебрами Ли. – М., 1984. – 27 с. – (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша; № 85).
2. *Gelfand I. M., Daletskii Yu. L.* Lie superalgebras and Hamiltonian operators, Rep. Dep. Math. Univ. of Stockholm, 1987. – **20**. – 26 p.
3. *Гельфанд И. М., Далецкий Ю. Л., Цыган Б. Л.* Об одном варианте некоммутативной дифференциальной геометрии // Докл. АН СССР. – 1989. – **308**, № 6. – С. 1293–1299.
4. *Cabras A., Vinogradov A. M.* Extension of the Poisson bracket to differential forms and multivector fields // J. Geometry and Physics. – 1992. – **9**. – P. 75–100.
5. *Connes A.* Géometrié non commutative. – Paris: Inter Editions, 1990. – 240 p.
6. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – **13**, № 4. – С. 13–30.
7. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы // Там же. – 1980. – **14**, № 3. – С. 71–74.
8. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли // Там же. – 1981. – **15**, № 3. – С. 23-40.
9. *Виноградов А. М.* Объединение скобок Схоутена и Нийенхейса, когомологии и супердифференциальные операторы // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 6. – С. 138–140.
10. *Daletskii Yu. L.* Lie Superalgebras in a Hamiltonian operator theory // Nonlinear and Turbulent Processes in Physics: Proc. 2 Int. Workshop (October, 10–25, 1983, Harwood). – New York: Acad. publ., 1984. – P. 1289 –1295.
11. *Далецкий Ю. Л., Цыган Б. Л.* Гамильтоновы операторы и гомологии Хохшильда // Функцион. анализ и его прил. – 1985. – **19**, № 4. – С. 82–83.

Получено 01.11.94