УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Ин-т геотехн. механики НАН Украины, Днепропетровск),
М. Ш. Шабозов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КВАЗИПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

In the Hilbert space $L_2(\Delta^2)$, $\Delta = [0, 2\pi]$, we find exact estimates for Kolmogorov's widths of some classes of periodic functions of two variables in the case where the modulus of smoothness of the mixed derivatives of these functions are majorized by given functions.

У гільбертовому просторі $L_2(\Delta^2)$, $\Delta = [0, 2\pi]$, знайдено точні оцінки колмогоровських квазіпоперечників деяких класів періодичних функцій двох змінних, у яких усереднені модулі гладкості змішаних похідних мажоруються заданими функціями.

1. При приближении функций многих переменных одной из важных является задача о приближении заданной функции функциями меньшего числа переменных, т. е. требуется построить такой полином, в котором коэффициенты определяются по заданной функции n переменных каким-либо процессом приближения и являются функциями не более k $(0 \le k \le n-1)$ переменных. При этом указанный полином должен иметь лучшие аппроксимативные свойства по сравнению с любой другой линейной формой полиномов, содержащих функции не более k переменных. Такой постановке задачи приближения функций отвечают обобщённые полиномы (см., например, [1–9] и имеющуюся там библиографию).

Определение понятий различных квазипоперечников компактов [4, 5, 10] дало возможность перейти к изучению тех экстремальных задач теории приближений, круг которых для обычных n-поперечников очертил А. Н. Колмогоров. Настоящая статья продолжает указанную тематику и посвящена вычислению точных значений квазипоперечников некоторых функциональных классов. Все рассуждения проведены для двумерного случая, поскольку на случай $n > 2$ переменных они распространяются аналогичным образом.

2. Всюду в дальнейшем, как обычно, $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел. Пусть $\Delta^2 \overset{\mathrm{df}}{=} [0, 2\pi]^2$; $C(\Delta^2)$ — множество всех непрерывных на Δ^2 функций $f(x, y)$ 2π-периодических по каждой переменной; $L_2(\Delta^2)$ — множество 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x, y)$, для которых

$$\|f\|_2 = \left(\iint_{\Delta^2} |f(x,y)|^2 dx\, dy\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{r,s}(\Delta^2)$ $(r, s \in \mathbb{N})$ обозначим множество функций $f \in C(\Delta^2)$, у которых частные производные $f^{(\nu,\mu)} \in C(\Delta^2)$, а $f^{(r,\mu)}(x, y)$ $(\mu = \overline{0, s-1})$ и $f^{(\nu,s)}(x, y)$ $(\nu = \overline{0, r-1})$ всюду на Δ^2 существуют, существенно ограничены и кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x, y) \in L_2(\Delta^2)$.

Пусть $V_m = \{v_\mu(x)\}_{\mu=0}^m$ и $U_n = \{u_\nu(y)\}_{\nu=0}^n$ — две системы линейно независимых 2π-периодических функций, принадлежащих пространству $L_2(\Delta)$, а $\{\varphi_\nu(x)\}_{\nu=0}^n$ и $\{\psi_\mu(y)\}_{\mu=0}^m$ — наборы произвольных 2π-периодических функций из $L_2(\Delta)$.

Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{\mu=0}^{m} v_\mu(x)\psi_\mu(y) + \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x)u_\nu(y)$$

назовем обобщенным полиномом, порожденным подпространствами V_m и U_n. Известно [11], что обобщенные полиномы указанного вида образуют подпространство $G(V_m, U_n) \stackrel{\mathrm{df}}{=} V_m \otimes L_2(\Delta) + L_2(\Delta) \otimes U_n$, где операции „$\otimes$" и „$+$" обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\varepsilon(f, g_{m,n})_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \|f g_{m,n}(f)\|_2,$$

$$\varepsilon(f, G(V_m, U_n))_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf\{\varepsilon(f\_g_{m,n})_2 : g_{m,n} \in G(V_m, U_n)\}.$$

Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\Delta^2)$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}, L_2(\Delta^2)) =$$

$$= \inf\{\sup\{\varepsilon(f, G(V_m, U_n))_2 : f \in \mathfrak{M}\} : V_m, U_n \subset L_2(\Delta)\}$$

называют квазипоперечником $\mathfrak{M}$ по Колмогорову [4, 5].

Для произвольной функции $f(x,y) \subset L_2(\Delta^2)$ определим смешанный модуль гладкости

$$\omega_k(f; \delta_1, \delta_2) = \sup\left\{\left\| \Delta_{t,\tau}^{k,k} f(x,y)\right\|_2 : |t| \le \delta_1,\ |\tau| \le \delta_2\right\},$$

где

$$\Delta_{t,\tau}^{k,p} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{p} (-1)^{\nu+\mu}\binom{k}{\nu}\binom{p}{\mu} f(x+\nu t, y+\mu\tau).$$

3. Пусть $\Phi_j(x)$ $(x>0; j=1,2)$ — положительные неубывающие функции, удовлетворяющие условию

$$\lim_{x\to 0}\Phi_j(x) = \Phi_j(0) = 0.$$

Через $W_{2,k}^{r,s}\left(\Phi_{1,2}\right)$ $(r, s \in \mathbb{N})$ обозначим множество функций $f(x,y) \in L_2^{r,s}(\Delta^2)$, для которых $f^{(r,s)}(x,y)$ при $0 < u, v \le 2\pi$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\pi^2}{4uv}\int_0^u\int_0^v \omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t,\tau)\sin(\pi t/u)\sin(\pi\tau/v)\,dt\,d\tau \le \Phi_1^2(u)\Phi_2^2(v).$$

Пусть $\Psi_j(x)$ $(x>0; j=1,2)$ — произвольные выпуклые возрастающие функции, для которых

$$\lim_{x\to 0}\Psi_j(x) = \Psi_j(0) = 0.$$

Через $W_{2,k}^{r,s}(\Psi_{1,2})$ $(r, s \in \mathbb{N})$ обозначим класс функций $f(x,y) \in L_2^{r,s}(\Delta^2)$, удовлетворяющих при $0 < u, v \le 2\pi$ условиям

$$\int_0^u\int_0^v \omega_k^2(f^{(r,s)}; t,\tau)\,dt\,d\tau \le \Psi_1^2(u)\Psi_2^2(v).$$

Пусть $\Omega_j(x)$ $(x \geq 0; j = 1, 2)$ — произвольные неубывающие функции, для которых $\Omega_j(0) = 0$. Обозначим через $W_{2,k}^{r,s}(\Omega_{1,2})$ класс функций $f(x, y)$ из $L_2^{r,s}(\Delta^2)$, для которых $\omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau) \leq \Omega_1(t)\Omega_2(\tau)$ при $0 < t, \tau \leq 2\pi$.

Следующие далее утверждения можно в определенном смысле рассматривать как своеобразное распространение с помощью [7, 12] ряда результатов [13–15] на случай функций двух переменных. Всюду в дальнейшем

$$(1-\cos nt)_*^m \overset{\text{df}}{=} \{(1-\cos nt)^m, \text{ если } nt \leq \pi; \, 2^m, \text{ если } nt \leq \pi\}.$$

Теорема 1. *Пусть функции* $\Phi_j(x)$ $(j = 1, 2)$ *удовлетворяют условиям*

$$\Phi_j^2(x/\mu) \int_0^{\pi\mu} (1-\cos t)_* \sin(t/\mu)\, dt \leq 2\mu\, \Phi_j^2(x) \tag{1}$$

при любых $x \in (0, 2\pi]$ *и* $\mu > 0$. *Тогда при всех* $m, n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$d_{2m-1,\,2n-1}\big(W_{2,k}^{r,s}(\Phi_{1,2})L_2(\Delta^2)\big) = 2^{-k} m^{-r} n^{-s}\, \Phi_1(\pi/m)\, \Phi_2(\pi/n). \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть для любого заданного* $\mu \in (0, 1]$ *и для всех* $\lambda > 0$, $x \in (0, \pi]$ *функции* $\Psi_j(x)$ $(j = 1, 2)$ *удовлетворяют условиям*

$$\Psi_j(\mu x) \int_0^{\pi\lambda} (1-\cos t)_*^k\, dt \leq \Psi_j(\lambda x) \int_0^{\pi\mu} (1-\cos t)^k\, dt. \tag{3}$$

Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\begin{aligned} &d_{2m-1,\,2n-1}\big(W_{2,k}^{r,s}(\Psi_{1,2})L_2(\Delta^2)\big) = \\ &= 2^{-k} m^{-r} n^{-s}\, \Psi_1(\mu\pi/m)\, \Psi_2(\mu\pi/n) \times \\ &\times \left(\int_0^{\pi\mu/m} (1-\cos mt)^k\, dt\right)^{-1/2} \left(\int_0^{\pi\mu/n} (1-\cos nt)^k\, dt\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 3. *Если функции* $\Omega_j(x)$ $(j = 1, 2)$ *для любого* $p \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют условиям*

$$\inf_{x \in (0,\pi/p]} \frac{\Omega_j(x)}{\sin^k(px/2)} = \lim_{x \to 0} \sup_{x \in (0,\pi/p]} \frac{\Omega_j(x)}{\sin^k(px/2)}, \tag{5}$$

то для любых $m, n \in \mathbb{N}$ *выполняются равенства*

$$\begin{aligned} &d_{2m-1,\,2n-1}\big(W_{2,k}^{r,s}(\Omega_{1,2}),\, L_2(\Delta^2)\big) = \\ &= 4^{-k} m^{-r} n^{-s} \lim_{x \to 0} \sup_{x \in (0,\pi/m]} \frac{\Omega_1(x)}{\sin^k(mx/2)} \lim_{y \to 0} \sup_{y \in (0,\pi/n]} \frac{\Omega_2(y)}{\sin^k(ny/2)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Следствие. *Пусть функции* $\Omega_j(x)$ $(j = 1, 2)$ *удовлетворяют требованиям теоремы 3, имеют непрерывные производные* $\Omega_j^{(k)}(x)$, *для которых* $\Omega_j^{(k)}(0) \neq 0$ *и* $\Omega_j^{(\nu)}(0) = 0$ $(\nu = \overline{0, k-1})$. *Тогда для любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$d_{2m-1,\,2n-1}\big(W_{2,k}^{r,s}(\Omega_{1,2}), L_2(\Delta^2)\big) = \frac{\Omega_1^{(k)}(0)\Omega_2^{(k)}(0)}{m^{r+k}\, n^{s+k}}.$$

4. Доказательство теоремы 1. Сопоставим функции $f(x,y)\in L_2(\Delta^2)$ ее двойной ряд Фурье

$$\sum_{j,l=-\infty}^{\infty} c_{jl}(f)\exp\,[i(mx+ny)],$$

где

$$c_{jl}(f) = 4^{-1}\lambda_{|j|,|l|}\Big\{ a_{j,l}^{0,0}-a_{j,l}^{1,1}-i\big(a_{j,l}^{1,0}+a_{j,l}^{0,1}\big),\ \text{если } j\ge 0,\ l\ge 0;$$

$$a_{j,|l|}^{0,0}+a_{j,|l|}^{1,1}+i\big(a_{j,|l|}^{0,1}-a_{j,|l|}^{1,0}\big),\ \text{если } j\ge 0,\ l<0;$$

$$a_{|j|,l}^{0,0}+a_{|j|,l}^{1,1}+i\big(a_{|j|,l}^{1,0}-a_{|j|,l}^{0,1}\big),\ \text{если } j<0,\ l\ge 0;$$

$$a_{|j|,|l|}^{0,0}-a_{|j|,|l|}^{1,1}+i\big(a_{|j|,|l|}^{1,0}+a_{|j|,|l|}^{0,1}\big)\ \text{ если }\ j<0, l<0\Big\},$$

где для любых $j,l\in\mathbb{Z}_+$ и $\nu,\mu=\overline{0,1}$

$$a_{j,l}^{\mu,\nu} = a_{j,l}^{\mu,\nu}(f) = \pi^{-2}\iint_{\Delta^2} f(x,y)\cos\,(jx-\mu\pi/2)\cos\,(ly-\nu\pi/2)\,dx\,dy; \qquad (7)$$

$$\lambda_{j,l} \overset{\text{df}}{=} \{4^{-1},\ \text{если } j=l=0;$$

$$2^{-1},\ \text{если } j\in\mathbb{N},\ l=0 \text{ или } l\in\mathbb{N},\ j=0;\ 1,\ \text{если } j,l\in\mathbb{N}\}.$$

Нам понадобится следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть*

$$V_{2m-1}^* \overset{\text{df}}{=} \big\{\{\cos jx\}_{j=0}^{n-1},\ \{\sin jx\}_{j=1}^{m-1}\big\},$$

$$U_{2n-1}^* \overset{\text{df}}{=} \big\{\{\cos lx\}_{l=0}^{n-1},\ \{\sin jx\}_{l=1}^{n-1}\big\}.$$

Среди всех обобщенных полиномов $g_{2m-1,2n-1}(x,y)\in G\big(V_{2m-1}^*,\ U_{2n-1}^*\big)$ *наилучшее приближение функции* $f(x,y)$ *из* $L_2(\Delta^2)$ *доставляет полином*

$$g_{2m-1,2n-1}^*(f;x,y) =$$

$$= \left(\sum_{|j|\le m-1}\ \sum_{l=-\infty}^{\infty} + \sum_{j=-\infty}^{\infty}\ \sum_{|l|\le n-1} - \sum_{|j|\le m-1}\ \sum_{|l|\le n-1}\right) c_{jl}(f)\exp\,[i(jx+ly)].$$

При этом

$$\varepsilon\big(f, G(V_{2m-1}^*,\ U_{2n-1}^*)\big)_2 = \big\|f-g_{2m-1,2n-1}^*(f)\big\|_2 =$$

$$= 2\pi\left\{\sum_{|j|\ge m}\ \sum_{|l|\ge n}|c_{jl}(f)|^2\right\}^{1/2}. \qquad (8)$$

Доказательство этого утверждения не приводится, поскольку оно основано на стандартных рассуждениях, связанных со спецификой гильбертова пространства (см., например, [2]). Используя определение $\omega_k(f;t,\tau)$, нетрудно показать, что

$$\omega_k^2(f;t,\tau) = 4^{k+1}\pi^2 \sup_{|x|\le t,\,|y|\le\tau}\ \sum_{j,l=-\infty}^{\infty}|c_{jl}(f)|^2(1-\cos jx)^k(1-\cos ly)^k. \qquad (9)$$

Учитывая (8), записываем

$$\varepsilon^2(f, G(V^*_{2m-1},\ U^*_{2n-1}))_2 -$$
$$- 4\pi^2 \sum_{|j|\ge m} \sum_{|l|\ge n} |c_{jl}(f)|^2 (-\cos jx \cos ly + \cos jx + \cos ly) =$$
$$= 4\pi^2 \sum_{|j|\ge m} \sum_{|l|\ge n} |c_{jl}(f)|^{2(1-1/k)} |c_{jl}(f)|^{2/k} (1-\cos jx)(1-\cos ly). \qquad (10)$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая (8) и (9), продолжаем соотношение (10):

$$\le \left\{4\pi^2 \sum_{|j|\ge m} \sum_{|l|\ge n} |c_{jl}(f)|^2\right\}^{1-1/k} \times$$
$$\times \left\{4\pi^2 \sum_{|j|\ge m} \sum_{|l|\ge n} |c_{jl}(f)|^2 (1-\cos jx)^k (1-\cos ly)^2\right\}^{1/k} =$$
$$= 4^{-1} \omega_k^{2/k}(f; x, y) \left\{\varepsilon\left(f, G\left(V^*_{2m-1},\ U^*_{2n-1}\right)\right)_2\right\}^{2(1-1/k)} \qquad (11)$$

Умножая обе части неравенства (10), (11) на $\sin mx \sin ny$ и интегрируя по прямоугольнику $[0, \pi/m] \times [0, \pi/n]$, получаем

$$\frac{4}{mn} \varepsilon^2\left(f, G(V^*_{2m-1},\ U^*_{2n-1})\right)_2 \le$$
$$\le \frac{1}{4} \left\{\varepsilon\left(f, G\left(V^*_{2m-1},\ U^*_{2n-1}\right)\right)_2\right\}^{2(1-1/k)} \times$$
$$\times \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \omega_k^{2/k}(f; x, y) \sin mx \sin ny \, dx dy.$$

Таким образом,

$$\varepsilon\left(f, G(V^*_{2m-1},\ U^*_{2n-1})\right)_2 \le$$
$$\le 4^{-k} \left\{mn \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \omega_k^{2/k}(f; x, y) \sin mx \sin ny \, dx dy\right\}^{k/2}. \qquad (12)$$

Используя (7) и интегрируя по частям, для любой $f(x, y) \in L_2^{r,s}(\Delta^2)$ имеем

$$|c_{jl}(f^{(r,s)})|^2 = j^{2r} l^{2s} |c_{jl}(f)|^2. \qquad (13)$$

Тогда с учетом (8) и (13) получаем

$$\varepsilon^2\left(f, G(V^*_{2m-1},\ U^*_{2n-1})\right)_2 \le 4\pi^2 \sum_{|j|\ge m} \sum_{|l|\ge n} (j/m)^{2r} (l/n)^{2s} |c_{jl}(f)|^2 \le$$
$$\le m^{-2r} n^{-2s} \varepsilon^2\left(f^{(r,s)}, G(V^*_{2m-1},\ U^*_{2n-1})\right)_2. \qquad (14)$$

Применяя изложенные выше рассуждения (8)–(12) для $f^{(r,s)}(x, y)$ и используя (14), для любой $f(x, y) \in L_2^{r,s}(\Delta^2)$ получаем

$$\varepsilon\big(f, G(V_{2m-1}^*,\ U_{2n-1}^*)\big)_2 \le$$

$$\le 4^{-k} m^{-r} n^{-s} \left\{ mn \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \omega_k^{2/k}(f; x, y) \sin mx \sin ny\, dx dy \right\}^{k/2}. \tag{15}$$

Теперь с учетом (15) и определения класса $W_{2,k}^{r,s}(\Phi_1)$ имеем

$$d_{2m-1,\,2n-1}\big(W_{2,k}^{r,s}(\Phi_{1,2}), L_2(\Delta^2)\big) \le 2^{-k} m^{-r} n^{-s} \Phi_1(\pi/m)\,\Phi_2(\pi/n). \tag{16}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим пространство $L_2^{\nu}(\Delta)$ $(\nu = \mathbb{N})$, состоящее из функций $f(x)$, имеющих абсолютно непрерывные производные до порядка $\nu - 1$ включительно и $f^{(\nu)}(x) \in L_2(\Delta)$. Нам также понадобятся классы

$$W_{2,k}(\Phi_1) \overset{\text{df}}{=}$$

$$\overset{\text{df}}{=} \left\{ f(x) \in L_2^r(\Delta):\ \frac{\pi}{2x} \int_0^x \omega_k^{2/k}(f^{(r)}; t) \sin(\pi t / x)\, dt \ \le\ \Phi_1^2(x) \quad \forall\, x \in (0, 2\pi) \right\},$$

$$W_{2,k}^{s}(\Phi_2) \overset{\text{df}}{=}$$

$$\overset{\text{df}}{=} \left\{ \varphi(y) \in L_2^s(\Delta):\ \frac{\pi}{2y} \int_0^x \omega_k^{2/k}(\varphi^{(s)}; \tau)\ \sin(\pi t / y)\, d\tau \ \le\ \Phi_2(y) \quad \forall\, y \in (0, 2\pi] \right\},$$

с помощью которых введем следующие классы функций:

$$\widetilde{W_{2,k}^{r,s}(\Psi_{1,2})} \overset{\text{df}}{=} W_{2,k}^{r}(\Phi_1) \otimes W_{2,k}^{r}(\Phi_2) =$$

$$= \big\{ f(x)\varphi(y):\ f \in W_{2,k}^{r}(\Phi_1),\ \varphi \in W_{2,k}^{s}(\Phi_2) \big\}.$$

Применяя результаты [7, 12], записываем

$$d_{2m-1,\,2n-1}\Big(\widetilde{W_{2,k}^{r,s}(\Psi_{1,2})},\ L_2(\Delta^2) \Big) =$$

$$= d_{2m-1}(W_{2,k}^{r}(\Phi_1),\ L_2(\Delta))\, d_{2n-1}(W_{2,k}^{s}(\Phi_2),\ L_2(\Delta)), \tag{17}$$

где $d_k(\cdot)$ — обычный k-поперечник по Колмогорову. Учитывая (17), включение $\widetilde{W_{2,k}^{r,s}(\Phi_{1,2})} \subset W_{2,k}^{r,s}(\Phi_{1,2})$, а также (1) и результаты [14], имеем

$$d_{2m-1,\,2n-1}\Big(\widetilde{W_{2,k}^{r,s}(\Phi_{1,2})},\ L_2(\Delta^2) \Big) \ge 2^{-k} m^{-r} n^{-s} \Phi_1(\pi/m)\,\Phi_2(\pi/n). \tag{18}$$

Сопоставляя (16) и (18), получаем равенство (2), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

5. Доказательство теоремы 2. На основании (9) и (13) имеем

$$\int_0^{\pi\mu/m} \int_0^{\pi\mu/n} \omega_k^2(f^{(r,s)}; t, \tau)\, dt\, d\tau \ge$$

$$\ge 4^{k+1} \pi^2 \sum_{|j| \ge m} \sum_{|l| \ge n} j^{2r} l^{2s} |c_{jl}(f)|^2 \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\pi\mu/m} (1 - \cos jt)^k\, dt \right\} \left\{ \int_0^{\pi\mu/n} (1 - \cos l\tau)^k\, d\tau \right\}. \tag{19}$$

Поскольку функция

$$F(t) \overset{\mathrm{df}}{=} t^{2r}\int_0^h (1-\cos ty)^k\,dy \quad (r,k\in\mathbb{N})$$

возрастает при $t>0$ [13], то, используя (8), продолжаем неравенство (19):

$$\geq 4^{k+1}\pi^2 m^{2r}n^{2s}\left\{\int_0^{\pi\mu/m}(1-\cos mt)^k\,dt\right\}\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\pi\mu/n}(1-\cos n\tau)^k\,d\tau\right\}\varepsilon^2\left(f, G\left(V_{2m-1}^*,\ U_{2n-1}^*\right)\right)_2. \tag{20}$$

С учетом (19), (20) получаем оценку сверху

$$d_{2m-1,\,2n-1}\left(W_{2,k}^{r,s}(\Psi_{1,2}),\ L_2(\Delta^2)\right)\leq$$

$$\leq 2^{-k}m^{-r}n^{-s}\Psi_1(\mu\pi/m)\Psi_2(\mu\pi/n)\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\pi\mu/m}(1-\cos mt)^k\,dt\right\}^{-1/2}\left\{\int_0^{\pi\mu/n}(1-\cos nt)^k\,dt\right\}^{-1/2}. \tag{21}$$

Оценки снизу получаем на основе соображений, аналогичных применяемым в п. 4: вводим вспомогательный класс

$$\widetilde{W_{2,k}^{r,s}(\Psi_{1,2})}\subset W_{2,k}^{r,s}(\Psi_{1,2})$$

и используем (3) и результаты [7, 13]. Отсюда и из (21) сразу следует утверждение теоремы 2.

6. Доказательство теоремы 3. Используя (8), (13) и (14), для произвольного $\varepsilon>0$ выбираем номера $M>n$ и $N>n$ такие, что

$$\varepsilon^2\left(f, G\left(V_{2m-1}^*,\ U_{2n-1}^*\right)\right)_2\leq\frac{4\pi^2}{m^{2r}n^{2s}}\sum_{|j|=m}^{M}\sum_{|l|=n}^{N}j^{2r}l^{2s}|c_{jl}(f^{(r,s)})|^2+\varepsilon. \tag{22}$$

Выбирая далее $x_\varepsilon\in(0,\pi/m)$, $y_\varepsilon\in(0,\pi/n)$, продолжаем неравенство (22):

$$\leq\frac{4\pi^2}{m^{2r}n^{2s}}\sum_{|j|=m}^{M}\sum_{|l|=n}^{N}j^{2r}l^{2s}|c_{jl}(f^{(r,s)})|^2\frac{\sin^{2k}(jx_\varepsilon/2)\sin^{2k}(ly_\varepsilon/2)}{\sin^{2k}(mx_\varepsilon/2)\sin^{2k}(ny_\varepsilon/2)}+\varepsilon. \tag{23}$$

На основании (9) и (22), (23) получаем

$$\varepsilon\left(f, G\left(V_{2m-1}^*,\ U_{2n-1}^*\right)\right)_2\leq 4^{-k}m^{-r}n^{-s}\frac{\omega_k(f^{(r,s)};x_\varepsilon,y_\varepsilon)}{\sin^k(mx_\varepsilon/2)\sin^k(ny_\varepsilon/2)}+\varepsilon. \tag{24}$$

Устремляя в (24) ε к нулю, имеем оценку сверху

$$d_{2m-1,\,2n-1}\left(W_{2,k}^{r,s}(\Omega_{1,2}),\ L_2(\Delta^2)\right)\leq 4^{-k}m^{-r}n^{-s}\times$$

$$\times\lim_{x\to0}\sup_{x\in(0,\pi/m)}\frac{\Omega_1(x)}{\sin^k(mx/2)}\lim_{y\to0}\sup_{y\in(0,\pi/n)}\frac{\Omega_2(y)}{\sin^k(ny/2)}. \tag{25}$$

Оценка снизу следует из [7, 15] и изложенных в пп. 4, 5 соображений. Отсюда и из (25) получаем соотношение (6), что и завершает доказательство теоремы 3.

В заключение приведем примеры мажорант, удовлетворяющих условиям (1), (3), (5). Такими функциями являются соответственно (см., например, [13–15]) $\Phi_*(x) = x^{\pi^2/16}$; $\Psi_*(x) = x^{\alpha}$, где

$$a \overset{\mathrm{df}}{=} \mu\pi \sin^{2k}(\mu\pi/2) \left\{ \int_0^{\pi\mu} \sin^{2k}(t/2)\, dt \right\}^{-1}; \quad \Omega_*(x) = x^k.$$

Отметим, что множество мажорантных функций этим вовсе не ограничивается. Используя определение и некоторые свойства правильно меняющихся функций [16], с помощью специальным образом выбранных медленно меняющихся функций $L(x)$, $\tilde{L}(x)$, $L_*(x)$ можно построить широкое множество мажорант вида $\Phi(x) = \Phi_*(x) L(x)$, $\Psi(x) = \Psi_*(x) \tilde{L}(x)$, $\Omega(x) = \Omega_*(x) L_*(x)$, для которых выполняются условия (1), (3), (5) соответственно.

Отметим, что оценки сверху в теоремах 1–3 получены М. Ш. Шабозовым оценки снизу получены соавторами совместно.

1. *Stancu D. D.* On some Taylor expansions for several variables // Rev. Roum. Math. Pures Appl. – 1959. – **4.** – P. 249–265.
2. *Вайндинер А. И.* Об одной новой форме рядов Фурье и выборе наилучших полиномов Фурье // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – **7**, № 1. – С. 177–185.
3. *Потапов М. К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения „углом" // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **117**. – С. 256–291.
4. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Там же. – 1986. – **178**. – С. 3–12.
5. *Бабаев М.-Б. А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Там же. – 1987. – **180**. – С. 30–32.
6. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій. – Харків: Основа, 1992. – 234 с.
7. *Вакарчук С. Б.* О приближении дифференцируемых функций многих переменных // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 3. – С. 37–44.
8. *Шабозов М. Ш.* Оценки приближения дифференцируемых периодических функций двух переменных интерполяционными смешанными сплайнами // Вопр. теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 166–172.
9. *Корнейчук Н. П., Переверзев С. В.* К вопросу о приближении функций двух переменных операторами, построенными на базе одномерных операторов // Теория функций и топология. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 43–49.
10. *Вакарчук С. Б.* Квазипоперечники функциональных классов в некоторых банаховых пространствах аналитических функций многих комплексных переменных // Докл. АН Украины. Сер. А. – 1992. – № 3. – С. 26–31.
11. *Брудный Ю. А.* Приближение функций n переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 3. – С. 564–584.
12. *Вакарчук С. Б.* О квазипоперечниках классов аналитических функций двух комплексных переменных // Совр. вопр. теории приближения и компл. анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 18–24.
13. *Тайков Л. В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 2. – С. 217–223.
14. *Айнуллоев Н.* Значения поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН Тадж. ССР. – 1984. – **27**, № 8. – С. 415–418.
15. *Григорян Ю. И.* Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, № 3. – С. 161–162.
16. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М: Наука, 1985. – 142 с.

Получено 25.04.95