

УДК 517.982.224:517.968.23

И. М. Спитковский

**Факторизация эрмитовых матриц-функций
и классификация сдвигов в пространстве
с индефинитной метрикой**

1. Приведем необходимые сведения из теории пространств с индефинитной метрикой (см., например, [1]). Пусть $K = \mathcal{H}$ — пространство, т. е. гильбертово пространство с зафиксированным оператором симметрии $\mathcal{J} (= \mathcal{J}^* =$

Оказывается, существование представления (1) у эрмитовых факторизуемых в L_2 матриц-функций может, в свою очередь, быть использовано при классификации сдвигов, притом с ослаблением требования псевдорегулярности. Этому и посвящена настоящая работа.

2. Через T_G будем обозначать оператор, действующий в пространстве n -мерных вектор-функций (строк) с компонентами из H_2 по правилу $T_G \Phi = P \Phi G$, где P — ортопроектор L_2 на H_2 . Свойства T_G , разумеется, аналогичны свойствам обычного (т. е. действующего в пространстве столбцов) тензицева оператора, чем мы дальше будем пользоваться без особых оговорок.

Теорема 1. Эрмитова матрица-функция G факторизуема в L_2 тогда и только тогда, когда ядро оператора T_G конечномерно, а образ содержит все ортогональные к ядру рациональные вектор-функции из H_2 .

Эта теорема является модификацией для самосопряженного случая теоремы 3.1 из [7] и доказывается по той же схеме.

Введем теперь $L_2(G)$ как гильбертово пространство заданных на T n -мерных строк со скалярным произведением $(f, g) = \int_T |f(t) G(t) g(t)^*| dt$.

Полагая

$$[f, g] = \int_T |f(t) G(t) g(t)^*| dt, \quad (4)$$

получаем \mathcal{J} -пространство. При этом роль \mathcal{J} играет умножение на $\text{sign } G$ в $L_2(G)$ определен оператор W умножения на t , который, очевидно, изометричен и фундаментально разложим.

Если $G^{\pm 1} \in L_\infty$, то $L_2(G)$ совпадает как множество с обычным пространством вектор-функций L_2 , причем скалярные произведения в них топологически эквивалентны. Подпространство $H_2(G)$, т. е. векторное пространство Харди H_2 , снабженное формой (4), инвариантно относительно W , причем $W|_{H_2}$ — сдвиг кратности n .

Теорема 2. Пусть U — фундаментально разложимая изометрия в \mathcal{J} -пространстве K , M — инвариантное подпространство U с конечномерной изотропной частью M_0 , для которого $U|M$ — сдвиг конечной кратности. Пусть еще каждый ортогональный к M_0 элемент линейной оболочки корневых векторов $(U|M)^*$ входит в M^\perp .

Тогда $U|M$ квазиунитарно эквивалентно оператору W умножения на t в пространстве $H_2(\Lambda_0)$ при некотором Λ_0 вида (2).

Доказательство. Запишем блочные представления операторов U, \mathcal{J} , отвечающие разложению $K = M \oplus M^\perp$:

$$U = \begin{bmatrix} U_{00} & U_{01} \\ 0 & U_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{00} & \mathcal{J}_{01} \\ \mathcal{J}_{01}^* & \mathcal{J}_{11} \end{bmatrix}.$$

Здесь учтено, что $U_{10} = 0$ в силу инвариантности M относительно U и $\mathcal{J}_{01} = \mathcal{J}_{10}^*$ в силу эрмитовости \mathcal{J} . Изометричность в сочетании с фундаментальной разложимостью U означает, что $\mathcal{J}U^*\mathcal{J}U = U^*U = I$. Отсюда, в частности, следует

$$U_{00}^*U_{00} = I, \quad U_{00}^*U_{01} = 0, \quad (5)$$

$$U_{00}\mathcal{J}_{00} + U_{01}\mathcal{J}_{01}^* = \mathcal{J}_{00}U_{00}. \quad (6)$$

Умножая (6) на U_{00}^* слева, с учетом (5) находим

$$U_{00}^*\mathcal{J}_{00}U_{00} = \mathcal{J}_{00}. \quad (7)$$

Итак, в гильбертовом пространстве M имеется оператор сдвига U_{00} конечной кратности и эрмитов оператор \mathcal{J}_{00} , обладающий свойством (7). Но тогда M изометрически изоморфно пространству вектор-строк H_2 , U_{00} реализуется как оператор W в нем, а \mathcal{J}_{00} в силу (7) имеет вид T_G . Ограниченность \mathcal{J}_{00} означает, что $G \in L_\infty$, а эрмитовость \mathcal{J}_{00} — эрмитовость G [8, с. 139]. Без ограничения общности можно поэтому отождествить M с H_2 , U_{00} с

W и \mathcal{J}_{00} — с T_G . Линейная оболочка корневых векторов U_{00} совпадает тогда с линейалом рациональных вектор-функций из H_2 [9, с. 52].

Непосредственно проверяется, что $M_0 = \text{Ker } T_G$, $M^\wedge = \text{Im } T_G$. Поэтому наложенные на M_0 , M^\wedge условия означают, что применима теорема 1. Согласно этой теореме G факторизуема. Как отмечалось в п. 1, отсюда следует существование представления (1).

Введем теперь оператор Ω умножения (справа) на матрицу-функцию A_0 . Будем его рассматривать как оператор из линейала H_2 , снабженного формой (4), в пространство $H_2(\Lambda_0)$. На основании (1) непосредственно проверяется изометричность Ω . Плотность его образа следует из соотношения $A_0 \in H_2$, инъективность — из невырожденности A_0 п. в. Поскольку Ω коммутирует с умножением на t , этот оператор и осуществляет искомую квазиунитарную эквивалентность.

Последнее требование теоремы 2 заведомо выполнено, если M^\wedge замкнуто, т. е. M псевдорегулярно. В такой форме, как отмечалось, теорема 2 доказана в [2]. Заметим еще, что положительные частные индексы G имеют смысл максимально возможных длин цепочек вида $\{e, U_{00}e, \dots, U_{00}^k e\} \subset M_0$, и потому матрица Λ_0 определяется в теореме 2 по U однозначно [2].

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.— М.: Наука, 1986.— 352 с.
2. Ball J., Helton J. Factorization results related to shifts in an indefinite metric // Integr. Equat. and Oper. Theory.— 1982.— 5, N 5.— P. 632—658.
3. Николайчук А. М., Спитковский И. М. О краевой задаче Римана с эрмитовой матрицей // Докл. АН СССР.— 1975.— 221, № 6.— С. 1280—1283.
4. Николайчук А. М., Спитковский И. М. Факторизация эрмитовых матриц-функций и ее приложения к граничным задачам // Укр. мат. журн.— 1975.— 27, № 6.— С. 767—779.
5. Спитковский И. М. Факторизация измеримых матриц-функций и ее приложения к краевым задачам для аналитических функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Одесса, 1978.— 159 с.
6. Литвинчук Г. С., Спитковский И. М. Факторизация матриц-функций.— Одесса, 1983.— 460 с.— Деп. в ВИНТИ 17.04.84, № 2410-84.
7. Спитковский И. М. Факторизация измеримых матриц-функций. Связанные с ней вопросы теории систем сингулярных интегральных уравнений и векторной краевой задачи Римана. I // Дифференц. уравнения.— 1981.— 17, № 4.— С. 697—709.
8. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах.— М.: Мир, 1970.— 352 с.
9. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига.— М.: Наука, 1980.— 383 с.

Отделение гидроакустики Ин-та гидромеханики
АН УССР, Киев

Получено 15.12.86