УДК 517.43

В. Ф. Коваленко, Ю. А. Семенов

К L^1-теории параболических полугрупп

1°. Докажем ограниченную голоморфность полугруппы e^{-tH}, действующей в $L^1(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 3$, где H — эллиптический оператор вида

$$H(a, b, V) = \sum_{j,k=1}^{d} D_{x_j}(a_{jk}(x) D_{x_k}) + V(x),$$

$$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad D_{x_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j(x), \quad i \equiv \sqrt{-1},$$

при следующих предположениях на $a(x) \equiv (a_{jk}(x))$, $b(x) \equiv (b_j(x))$ и $V(x)$: все функции вещественны и измеримы, $|b| \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $0 \leqslant V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, матрица $a(x)$ симметрична ($a_{kj} = a_{jk}$) и равномерно эллиптична (существуют числа ν и μ, $0 < \nu \leqslant \mu < \infty$, такие, что для всех $x, \xi \in \mathbb{R}^d$

$$\nu\xi\cdot\xi \leqslant \xi\cdot a(x)\cdot\xi \equiv \sum_{k,j=1}^{d} a_{kj}(x)\,\xi_k\xi_j \leqslant \mu\xi\cdot\xi). \tag{1}$$

Точное определение $e^{-tH}: L^1 \to L^1$ дано ниже формулой (7).)

В случае гладких и ограниченных a, b и V ограниченная голоморфность e^{-tH} в $L^p(\mathbb{R}^d)$ хорошо известна [1, 2]. Для $a = 1$, $b = 0$ и $0 \leqslant V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ в [3] показано, что e^{-tH} — сжимающая голоморфная полугруппа в $L^p(\mathbb{R}^d)$ в секторе $\Gamma_p = \left\{t \,\middle|\, |\arg t| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \left|1 - \frac{2}{p}\right|\right)\right\}$, а в [4] — что e^{-tH} — ограниченная голоморфная полугруппа в $L^1(\mathbb{R}^d)$ в секторе $\{t \mid |\arg t| < \varepsilon\}$ для некоторого близкого к нулю ε.

Предлагаемое здесь доказательство основано на одном варианте метода Мозера, приводящего к установлению верхней оценки Нэша—Аронсона на фундаментальное решение уравнения $\partial u/\partial t + Hu = 0$, а также на теории секториальных форм в комплексном гильбертовом пространстве.

Пусть коэффициенты a, b, V — гладкие, ограниченные функции. Тогда покажем, что ($\|\cdot\|_{p,q}$ — операторная норма из L^p в L^q)

$$\| He^{-tH} \|_{1,1} \leqslant c/t, \tag{2}$$

где постоянная c зависит только от d и ν, μ из (1).

В силу известных аппроксимационных теорем данная оценка сохранится и в общем случае, что и приводит к желаемому результату [5]. Идея доказательства (2) сводится к следующему. Вместо H рассмотрим $H^\psi = e^{-\psi}He^{\psi}$, где $\psi(x) = \alpha\cdot x$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — постоянный вектор. Покажем, что H^ψ обладает необходимыми свойствами:

$$\| e^{-tH^\psi} \|_{p,q} \leqslant \frac{c_{p,q}}{t^{d/4}} \exp\{\hat{c}_{p,q}\alpha^2 t\}, \tag{3.a}$$

$$t > 0,\ (p, q) = (1, 2) \text{ или } (2, \infty),$$

$$\| H^\psi e^{-tH^\psi} \|_{2,2} \leqslant \frac{c_2}{t} \exp\{\hat{c}_2\alpha^2 t\}. \tag{3.б}$$

Поэтому

$$\| H^\psi e^{-tH^\psi} \|_{1,\infty} \leqslant \| H^\psi e^{-\frac{t}{3}H^\psi} \|_{2,2} \| e^{-\frac{t}{3}H^\psi} \|_{1,2} \| e^{-\frac{t}{3}H^\psi} \|_{2,\infty} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{1,\infty}}{t^{d/2+t}} \exp\{\hat{c}_{1,\infty}\alpha^2 t\}.$$

Отсюда по теореме Данфорда — Петтиса

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} e^{-tH^\psi}(x, y) \right| \leqslant \frac{c_{1,\infty}}{t^{d/2+1}} \exp\{\hat{c}_{1,\infty}\alpha^2 t\}$$

или

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} e^{-tH}(x, y) \right| \leqslant \frac{c_{1,\infty}}{t^{d/2+1}} \exp\{\hat{c}_{1,\infty}\alpha^2 t + \psi(x) - \psi(y)\}.$$

Поскольку $\psi(x) - \psi(y) = \alpha\cdot(x - y)$, то, выбирая α надлежащим образом ($\alpha = (y - x)/\varkappa t$, $\varkappa$ — подходящая константа, зависящая от $\hat{c}_{1,\infty}$), окончательно получаем

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\sigma e^{-tH}(x, y) \right| \leqslant \frac{c_{1,\sigma}}{t^{\frac{d}{2}+\sigma}} \exp\left\{-\frac{|x - y|^2}{c_3 t}\right\},\quad \sigma = 0, 1.$$

Наконец,

$$\| He^{-tH} \|_{1,1} \leqslant \sup_x \int \left| \frac{\partial}{\partial t} e^{-tH}(x, y) \right| dy \leqslant \frac{c}{t}.$$

Отметим, что оценки (3.а) по существу хорошо известны. Действительно, согласно формуле Фейнмана — Каца — Ито,

$$| e^{-tH}(x, y) | \leqslant e^{-tA}(x, y),\quad A \equiv H(a, 0, 0)$$

и

$$\| e^{-tA^\psi} \|_{p,q} \leqslant \frac{c_{p,q}}{t^\rho} \exp\{\hat{c}_{p,q}\alpha^2 t\},\quad \rho = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),\quad 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$$

(см. [6]). Кроме того, оценка (3.б) при $b \equiv 0$ доказана в [7].

Замечания. 1. Голоморфность $e^{-tH}: L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$ является важным свойством прежде всего при возмущении H «младшими» членами $c\cdot\nabla, -W, W \geqslant 0$. Действительно, рассмотрим, например, оператор $\Lambda = A + c\cdot\nabla$. Предположим, что $\inf_{\lambda>0} \| c\cdot\nabla(\lambda + A)^{-1} \|_{1,1} < 1/2$. Тогда согласно классической теореме Филлипса о возмущении голоморфных полугрупп Λ с $\mathcal{D}(\Lambda) = \mathcal{D}(A)$ порождает ограниченную C_0-полугруппу и, если еще

$\inf\limits_{\lambda>0} \| c^2 (\lambda + A)^{-1} \|_{1,1} < 1$, то нетрудно доказать двухсторонние оценки Нэша — Аронсона на фундаментальное решение уравнения $\partial u/\partial t + \Lambda u = 0$.

2. Остается открытым вопрос о фактической области голоморфности e^{-tH}. Естественной является гипотеза о голоморфности e^{-tH} в секторе $\operatorname{Re} t > 0$. В этой связи см. [4].

3. В случае локально или глобально неограниченных a_{kj} (удовлетворяющих всем указанным выше условиям, однако, с $\mu = \infty$) вопрос о голоморфности $e^{-tA} : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$ открыт.

4. Идея введения вспомогательного оператора H^ψ при изучении близких вопросов восходит к работе [8] и применялась Саймоном, Кемплом и Войгтом, Дэвисом и др.

2°. Докажем неравенство (3.б). В этом и следующем пунктах будем предполагать, что a_{kj}, b_j, V — гладкие ограниченные функции. Пусть $\langle f, g\rangle = \langle f\bar{g}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\bar{g}(x)\,dx)$, $L_k^p \equiv L_k^p(\mathbb{R}^d)$ — пространство Соболева с нормой $\|f\|_{L_k^p} = (\|f\|_p^p + \|\nabla^k f\|_p^p)^{1/p}$, $\|\cdot\|_p$ — норма в $L^p(\mathbb{R}^d)$.

В $L^2(\mathbb{R}^d)$ определим полуторалинейные формы

$$h_0[u, v] =: \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{k,j=1}^{d} a_{kj}(x)\,(D_{x_k} u(x))\,(\overline{D_{x_j} v(x)}) + u(x)\,V(x)\,\bar{v}(x)\Big)\,dx \equiv$$

$$\equiv \langle Du\cdot a\cdot \overline{Dv}\rangle + \langle uV\bar{v}\rangle,$$

$$h_0^\psi[u, v] =: \langle De^\psi u\cdot a\cdot \overline{De^{-\psi} v}\rangle + \langle uV\bar{v}\rangle,$$

$$u, v\in \mathcal{D}(h_0) = \mathcal{D}(h_0^\psi) = C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Пусть еще $h_0[u] \equiv h_0[u, u]$, $w_j \equiv \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{u}}{|u|}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, где по определению $\frac{\bar{u}(x)}{|u(x)|} = 0$, если $u(x) = 0$,

$$df\cdot a\cdot df \equiv \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x)\,(\partial f/\partial x_j)\,(\partial f/\partial x_k),$$

$$df\cdot a\cdot w \equiv \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x)\,(\partial f/\partial x_j)\,w_k(x).$$

Напомним, что $u\in L_1^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow |u| \in L_1^2(\mathbb{R}^d)$ и

$$\frac{\bar{u}}{|u|}\,du = \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{u}}{|u|}\,du\right) + i\,\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{u}}{|u|}\,du\right) \equiv d|u| + iw.$$

Прямыми вычислениями получаем $\forall u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$h_0[u] = \langle d|u|\cdot a\cdot d|u|\rangle + \langle (w + b|u|)\cdot a\cdot (w + b|u|)\rangle + \langle uV\bar{u}\rangle,$$

$$h_0^\psi[u] = \operatorname{Re} h_0^\psi[u] + i\,\operatorname{Im} h_0^\psi[u],$$

$$\operatorname{Re} h_0^\psi[u] = h_0[u] - \langle u\,(d\psi\cdot a\cdot d\psi)\,\bar{u}\rangle,$$

$$\operatorname{Im} h_0^\psi[u] = -2\,\langle |u|\,d\psi\cdot a\cdot (w + b|u|)\rangle.$$

Пусть h и h^ψ — замыкания в $L^2(\mathbb{R}^d)$ h_0 и h_0^ψ соответственно. Ясно, что $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(h^\psi) = L_1^2(\mathbb{R}^d)$ и если $u\in \mathcal{D}(h)$, то $|u|\in \mathcal{D}(h)$ и

$$\operatorname{Re} h^\psi[u] = \langle d|u|\cdot a\cdot d|u|\rangle + \langle uV\bar{u}\rangle + \langle (w + b|u|)\cdot a\cdot (w + b|u|)\rangle -$$

$$- \langle u\,(d\psi\cdot a\cdot d\psi)\,\bar{u}\rangle,$$

$$\operatorname{Im} h^\psi[u] = -2\,\langle |u|\,d\psi\cdot a\cdot (w + b|u|)\rangle.$$

Поэтому с помощью неравенства Коши

$$2|u|\,d\psi\cdot a\cdot(w+b|u|)\leqslant|u|^2\,d\psi\cdot a\cdot d\psi+(w+b|u|)\cdot a\cdot(w+b|u|)$$

находим

$$|\operatorname{Im}h^{\psi}[u]|\leqslant\operatorname{Re}h^{\psi}[u]+2\langle u\,(d\psi\cdot a\cdot d\psi)\,\bar{u}\rangle.$$

Отсюда учитывая, что $d\psi\cdot a\cdot d\psi=\alpha\cdot a\cdot\alpha\leqslant\mu\alpha^2$, получаем

$$|\operatorname{Im}h^{\psi}[u]|\leqslant\operatorname{Re}h^{\psi}[u]+2\mu\alpha^2\langle u,u\rangle,\quad u\in\mathcal{D}(h^{\psi}).$$

Тем самым доказано [9, с. 389], что h^{ψ} — секториальная форма в $L^2(\mathbb{R}^d)$ с углом $\theta=\pi/4$ и ассоциированный с ней оператор H_2^{ψ} (см. [9, теорема 2.1 на с. 404 и теорема 1.24 на с. 608]) порождает голоморфную полугруппу, причем если $B=H_2^{\psi}+2\mu\alpha^2$, то функция e^{-tB} голоморфна при $|\arg t|<\pi/4$ и ограничена $\|e^{-tB}\|_{2,2}\leqslant 1$. Но тогда согласно критерию голоморфности Иосиды [5] оператор B удовлетворяет условию

$$\|Be^{-tB}\|_{2,2}\leqslant c/t,\quad\forall t>0,\quad c=c(\theta),\quad\theta=\pi/4,$$

из которого и следует (3.б).

3°. Докажем неравенство (3.а). Пусть $f\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ и $f_t^{\psi}=e^{-\psi}e^{-tH_2}e^{\psi}f$, где H_2 — оператор, ассоциированный с формой h. Тогда $f_t^{\psi}=e^{-tH_2^{\psi}}f$ и $\frac{d}{dt}f_t^{\psi}=-H_2^{\psi}f_t^{\psi}$. Умножая это уравнение на $|u|^{2p-2}\bar{u}$, $p\geqslant 1$, $u\equiv f_t^{\psi}$ и интегрируя по $\mathbb{R}^d$, получаем $(H_2^{\psi}\equiv H^{\psi})$

$$-\|u\|_{2p}^{2p-1}\frac{d}{dt}\|u\|_{2p}=\operatorname{Re}\langle H^{\psi}u,|u|^{2p-2}u\rangle.\tag{4}$$

Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\langle H^{\Psi}u,|u|^{2p-2}u\rangle=(2p-1)\langle|u|^{2p-2},d|u|\cdot a\cdot d|u|\rangle+\langle|u|^{2p-2},w\cdot a\cdot w\rangle+\\+\langle|u|^{2p},b\cdot a\cdot b+V-d\psi\cdot a\cdot d\psi\rangle+2(p-1)\langle|u|^{2p-1},\ d\psi\cdot a\cdot d|u|\rangle+\\+2\langle|u|^{2p-1},\ b\cdot a\cdot w\rangle.\end{gathered}$$

Отсюда с помощью неравенства Коши имеем

$$\operatorname{Re}\langle H^{\psi}u,|u|^{2p-2}u\rangle\geqslant p\langle|u|^{2p-2},d|u|\cdot a\cdot d|u|\rangle-p\langle|u|^{2p},d\psi\cdot a\cdot d\psi\rangle.\tag{5}$$

Комбинируя (4) и (5), получаем

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{2p}\leqslant-\frac{\langle d|u|^p\cdot a\cdot d|u|^p\rangle}{p\|u\|_{2p}^{2p-1}}+\alpha^2\mu p\|u\|_{2p}.\tag{6}$$

Повторяя далее известные рассуждения, получаем (3.а) (см., например, [6], § 1).

4°. Пусть $H_2(a,\ b,\ V)$ — оператор, ассоциированный с формой $h\equiv h_0^{\sim}$, a, b, V удовлетворяют общим предположениям п. 1°. Пусть

$$a^n=(a_{kj}^n),\quad a_{kj}^n=\gamma_n*a_{kj},$$
$$b^n=(b_j^n),\quad b_j^n=\gamma_n*(\mathbf{1}_n^b b_j),$$
$$V^n=\gamma_n*V_n,\quad V_n=\mathbf{1}_n^V V,$$

где γ_n — неотрицательная гладкая аппроксимация единицы, $\mathbf{1}_n^b$ — индикатор множества $\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,|b(x)|\leqslant n\}$.

По построению a_{kj}^n, b_j^n, V^n удовлетворяют всем предположениям пп. 2°, 3°, т. е. являются гладкими ограниченными функциями и для a^n имеет место оценка (1) с теми же ν и μ.

Хорошо известно (см., например, [10]), что

$$H_2(a^n, b^n, V^n) \xrightarrow[L^2(\mathbb{R}^d)]{R} H_2(a, b, V), \quad n \to \infty,$$

для некоторой подпоследовательности $\{n\}$, где $\xrightarrow[X]{R}$ — знак сильной резольвентной сходимости в X.

Отсюда и из оценки $\| e^{-tH_1(a^n, b^n, V^n)} \|_{1,1} \leqslant 1, t > 0$, также следует, что (см. [11, лемма на с. 332])

$$T_n(t) \equiv e^{-tH_1(a^n, b^n, V^n)} \xrightarrow[L^1(\mathbb{R}^d)]{s} T(t) \equiv e^{-tH_1(a,b,V)}, \quad \forall t > 0, \tag{7}$$

где $e^{-tH_p} = : [e^{-tH_2} \restriction L^1 \cap L^\infty]^{-}_{L^p \to L^p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad t > 0$.

Далее, согласно (2) и [5] $T_n(z)$ — голоморфное семейство в секторе $\Gamma_\delta = \{z \mid |\arg z| < \delta\}$, где $\delta = \operatorname{arctg}(1/ce)$, c — константа из (2), и

$$\| T_n(z) \|_{1,1} \leqslant c_\varepsilon, \quad z \in \Gamma_{\delta - \varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{8}$$

В силу (7) и (8) согласно теореме Витали о сходимости аналитических функций $T(z)$ — ограниченная голоморфная оператор-функция в том же секторе $\Gamma_{\delta-\varepsilon}$.

1. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ.— 1983.— 21.— С. 130—264.
2. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and its application to partial differential equations.— New York : Springer, 1983.— 279 p.
3. *Semenov Ju. A.* Schrödinger operators with L^p_{loc}-potentials // Communs. Math. Phys.— 1977.— 53.— P. 277—284.
4. *Kato T.* L^p-theory of Schrödinger operators with a singular potential // Aspects of Positivity in Functional Analysis.— North-Holland, 1986.— P. 63—78.
5. *Yosida K.* On the differentiability of semigroups of linear operators // Proc. Jap. Acad.— 1958.— 34.— P. 337—340.
6. *Fabes E. B., Strook D. W.* A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality via the old ideas of Nash // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1986.— **96**, N 4.— P. 327—338.
7. *Семенов Ю. А.* К спектральной теории эллиптических дифференциальных операторов второго порядка // Мат. сб.— 1985.— **128**, № 10.— С. 122—147.
8. *Balslev E., Combes J. M.* Spectral properties of many-body Schrödinger operators // Communs Math. Phys.— 1971.— 22.— P. 280—294.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
10. *Simon B.* Maximal and minimal Schrödinger forms // J. Operator Theory.— 1979.— **1**.— P. 37—47.
11. *Семенов Ю. А.* Гладкость обобщенных решений уравнения $\hat{H}u = f$ и существенная самосопряженность оператора $\hat{H} = -\Sigma \nabla_i a_{ij} \nabla_k + V$ с измеримыми коэффициентами // Мат. сб.— 1985.— **127**, № 7.— С. 311—335.

Киев. политехн. ин-т Получено 30.06.87