УДК 517.911

В. И. Ткаченко

Функция Грина и условия существования инвариантных множеств импульсных систем

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений, подверженную импульсному воздействию

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)x + f(\varphi, x), \ \varphi \in \mathscr{T}_m \setminus \Gamma, \tag{1}$$
$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi, x),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathscr{T}_m$, $\mathscr{T}_m$ — m-мерный тор, Γ — гладкое подмногообразие коразмерности 1 тора $\mathscr{T}_m$, 2π-периодические вектор $a(\varphi)$ и матрицы $A(\varphi)$,

$B(\varphi)$ принадлежат пространству $C^l(\mathcal{T}_m)$ l раз непрерывно дифференцируемых функций или матриц на $\mathcal{T}_m$. 2π-периодические по φ векторы $f(\varphi, x)$ и $g(\varphi, x)$ определены и непрерывны при $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$. Для $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ обозначим норму $\| f(\varphi) \|_0 = \sup\limits_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| f(\varphi) \|$. Здесь $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$ или пространстве матриц.

В данной работе исследуется задача существования кусочно-гладких инвариантных тороидальных множеств системы (1). Для этого определяется функция Грина линеаризованного в окрестности тора уравнения и исследуются ее аналитические свойства. Частично результаты анонсированы в [1]. Инвариантные множества частных случаев системы (1) рассмотрены в работах [2, 3] (см. также [4, с. 250]). В них гладкость инвариантных множеств не исследуется.

Линеаризованное в окрестности тора уравнение (1) имеет вид

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)x, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m \setminus \Gamma, \qquad (2)$$
$$\Delta x|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x.$$

Первое уравнение (1) имеет решение $\varphi = \varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Предполагаем, что оно однозначное и гладкое по φ. Обозначим через $t_i(\varphi)$, $i \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел) последовательность точек, при которых $\varphi_t(\varphi)$ пересекает многообразие Γ. Считаем, что эти пересечения трансверсальные, их бесконечное число и выполняются условия

$$t_i(\varphi) - t_{i-1}(\varphi) \geqslant \theta,$$
$$\| \partial^s t_i(\varphi)/\partial\varphi^s \| \leqslant M, \quad 1 \leqslant s \leqslant l, \qquad (3)$$

с независящими от i положительными постоянными θ, M. Здесь $\partial\varphi^s = \partial\varphi_1^{i_1} \ldots \partial\varphi_m^{i_m}$, $i_1 + \ldots + i_m = s$. Тогда при фиксированном φ система (2) принимает вид

$$dx/dt = A(\varphi_t(\varphi))x, \quad t \neq t_i(\varphi),$$
$$\Delta x|_{t=t_i(\varphi)} = B(\varphi_i)x, \qquad (4)$$

где $\varphi_i \equiv \varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)$. Через $x_t(\varphi, x_0)$ обозначим решение системы (4) с начальным условием $x_0(\varphi, x_0) = x_0$, а через $X(t, \tau, \varphi)$ — фундаментальную матрицу решений системы (4), $X(t, t, \varphi) = E$, E — единичная матрица. Считаем $x_t(\varphi, x_0)$ непрерывным слева по t.

Определение 1. *Система уравнений (2) называется экспоненциально дихотомичной, если для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$ пространство $\mathbb{R}^n$ представимо в виде прямой суммы подпространств $E^+(\varphi)$ и $E^-(\varphi)$ размерностей r и $(n - r)$ так, что любое решение системы (4) с $x_0 \in E^+(\varphi)$ удовлетворяет неравенству*

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| \leqslant K e^{-\gamma(t-\tau)} \| x_\tau(\varphi, x_0) \|, \quad t \geqslant \tau, \qquad (5)$$

а любое решение с $x_0 \in E^-(\varphi)$ — неравенству

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| \leqslant K e^{\gamma(t-\tau)} \| x_\tau(\varphi, x_0) \|, \quad t \leqslant \tau. \qquad (6)$$

Обозначим через $P(\varphi)$ и $E - P(\varphi)$ проекторы на подпространства $E^+(\varphi)$ и $E^-(\varphi)$. Исследуем аналитические свойства проектора $P(\varphi)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система уравнений (2) экспоненциально дихотомична и при $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $t \in \mathbb{R}$ выполняются оценки*

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial\varphi^j} A(\varphi_t(\varphi)) \right\|_0 \leqslant K_1, \quad \left\| \frac{\partial^j}{\partial\varphi^j} B(\varphi_i) \right\|_0 \leqslant K_2, \qquad (7)$$

$j = \overline{1, l}$, положительные постоянные K_1, K_2 не зависят от t, i.

Тогда проектор $P(\varphi) \in C^l(\mathscr{T}_m \setminus \Gamma)$ и *терпит разрывы* **первого рода** *на множестве* Γ, *причем*

$$P(\varphi+0) = (E + B(\varphi)) P(\varphi - 0)(E + B(\varphi))^{-1}. \tag{8}$$

Расположение отрицательной $(\varphi - 0)$ *и положительной* $(\varphi + 0)$ *сторон точки* φ *определяем в порядке возрастания* t *по траектории* $\varphi_t(\varphi)$ *первого уравнения* (1).

Доказательство теоремы 1 следует из леммы.

Лемма 1. *Пусть* U — *открытое множество в* $\mathbb{R}^k$, $\{t_i(u)\}$ — *последовательность отображений* $U \to \mathbb{R}$, $t_i(u) < t_{i+1}(u)$, $t_i(u) \in C^l(U)$, $i \in \mathbb{Z}$, $A(t, u) \in C^l(U \times \mathbb{R})$, *матрицы* $B_i(u) \in C^l(U)$, *равномерно по* $i \in \mathbb{Z}$ *ограничены. Пусть при* $u_0 \in U$ *уравнение*

$$\begin{gathered} dx/dt = A(t, u)x, \quad t \neq t_i(u), \\ \Delta x|_{t=t_i(u)} = B_i(u)x \end{gathered} \tag{9}$$

экспоненциально дихотомично с проектором P_0. *Тогда существует окрестность* $V(U_0) \subset U$ *такая, что для всех* $u \in V$ *уравнение* (9) *экспоненциально дихотомично с проектором* $P_u \in C^l(U)$, $P_{u_0} = P_0$.

Доказательство. Найдем замену переменных $x = \Phi(t, u)y$ с невырожденной при $t \in \mathbb{R}$, $u \in U$ и гладкой при $t \neq t_i(u)$ матрицей, приводящей систему (9) к системе с гладкой ограниченной матрицей без импульсного воздействия. Для этого зафиксируем значение матрицы $\Phi(t, u)$ и ее производных в какой-нибудь точке, например $\Phi(t_1(u) - 0, u) = E$, $\partial^j \Phi(t_1(u) - 0, u)/\partial t^j = 0$, $j = \overline{1, l+1}$. Значения $\Phi(t_1(u) + 0, u)$ и ее производных в точке $(t_1(u) + 0)$ подбираем так, чтобы переменная y не имела скачка в $t = t_1(u)$ и матрица $A_1(t, u) = \Phi^{-1}(A\Phi - \dot{\Phi})$ имела непрерывные частичные производные по t в точке $t = t_1(u)$, т. е.

$$(E + B(u))\Phi(t_1(u) + 0, u) = \Phi(t_1(u) - 0, u), \quad \frac{\partial^j}{\partial t^j} A_1(t, u)|_{t=t_1(u)-0} =$$
$$= \frac{\partial^j}{\partial t^j} A_1(t, u)|_{t=t_1(u)+0}, \quad j = \overline{0, l}.$$

Продлеваем матрицу $\Phi(t_1(u) - 0, u)$ на $(t_0(u), t_1(u)]$ и $\Phi(t_1(u) + 0, u)$ на $(t_1(u), t_2(u)]$ так, чтобы матрица $\Phi(t, u)$ и ее производные по t, u были ограничены независящей от t, u постоянной. При $t = t_0(u)$, $t = t_2(u)$, ... построение матрицы $\Phi(t, u)$ аналогично. Можно проверить, что $A_1(t, u)$ имеет непрерывные частные производные по u до l-го порядка включительно. Система уравнений $\dot{y} = A_1(t, u)y$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4 работы [5]. Применяя ее, завершаем доказательство леммы.

Определение 2. *Функцией Грина экспоненциально дихотомичной системы* (2) *назовем функцию*

$$G(t, \tau, \varphi) = \begin{cases} X(t, 0, \varphi) P(\varphi) X(0, \tau, \varphi), & t \geqslant \tau \\ -X(t, 0, \varphi)(E - P(\varphi)) X(0, \tau, \varphi), & t < \tau. \end{cases} \tag{10}$$

Функция $G(t, \tau, \varphi)$ удовлетворяет системе (2) при $t \neq \tau$, т. е.

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} G(t, \tau, \varphi) = A(\varphi_t(\varphi)) G(t, \tau, \varphi), \quad t \neq t_i(\varphi), \\ \Delta G(t, \tau, \varphi)|_{t=t_i(\varphi)} = B(\varphi_i) G(t_i(\varphi), \tau, \varphi). \end{gathered} \tag{11}$$

При $t = \tau$ она терпит разрыв первого рода со скачком $G(\tau + 0, \tau, \varphi) - G(\tau - 0, \tau, \varphi) = E$.

Можно показать, что для экспоненциально дихотомичных систем (2) справедлива оценка

$$\| G(t, \tau, \varphi) \| \leqslant K_3 e^{-\gamma|t-\tau|}, \quad t, \tau \in \mathbb{R}, \quad K_3, \gamma > 0. \tag{12}$$

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *функция Грина* (10) *при* $\varphi \bar{\in} \Gamma$, t, $\tau \neq t_i(\varphi)$ *имеет непрерывные частные производные по* φ *до* l*-го порядка включительно, удовлетворяющие оценке*

$$\left\| \frac{\partial^s}{\partial \varphi^s} G(t, \tau, \varphi) \right\| \leqslant K_4 e^{-\gamma|t-\tau|}, \quad s = \overline{1, l}. \tag{13}$$

Доказательство. Как следует из явного вида фундаментальной матрицы $X(t, \tau, \varphi)$ [4] (§ 6) при $\varphi \bar{\in} \Gamma$, t, $\tau \neq t_i(\varphi)$, $i \in \mathbb{Z}$ она гладкая по φ. Поэтому при выполнении условий теоремы 1 и $\varphi \bar{\in} \Gamma$, t, $\tau \neq t_i(\varphi)$ функция Грина имеет непрерывные частные производные по φ до l порядка включительно, причем существуют правые и левые пределы функций $\partial^s G(t, \tau, \varphi)/\partial \varphi^s$ при $t \to t_i - 0$ или $t \to t_i + 0$, $s = \overline{1, l}$. Т. е. можно считать функцию $\partial^s G(t, \tau, \varphi)/\partial \varphi^s$ непрерывной по t слева с разрывами первого рода в точках $t = t_i$. Аналогично по τ.

Докажем оценку (13). При $\tau \neq t_i(\varphi)$ все элементы, входящие в формулы (11), гладкие по φ. Продифференцируем их:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt} \frac{\partial G(t, \tau, \varphi)}{\partial \varphi} = A(\varphi_t(\varphi)) \frac{\partial G(t, \tau, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial A(\varphi_t(\varphi))}{\partial \varphi} G(t, \tau, \varphi), \\
\Delta \frac{\partial G(t, \tau, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{t = t_i(\varphi)} = B(\varphi_i) \frac{\partial G(t_i(\varphi), \tau, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial B(\varphi_i)}{\partial \varphi} \times \\
\times G(t_i(\varphi), \tau, \varphi) + (B(\varphi_i) A(\varphi_i) - A(\varphi_i) B(\varphi_i)) G(t_i(\varphi), \tau, \varphi) \frac{\partial t_i(\varphi)}{\partial \varphi}.
\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь под $\partial/\partial\varphi$ понимается частная производная по одной из кооординат вектора φ. Система (14) является неоднородной системой, соответствующей однородной системе (4). Ее ограниченное решение запишем так:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(t, \tau, \varphi)}{\partial \varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau, \varphi) \frac{\partial A(\varphi_s(\varphi))}{\partial \varphi} G(s, \tau, \varphi)\, ds + \\
+ \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t, t_i(\varphi), \varphi) \left[\frac{\partial B(\varphi_i)}{\partial \varphi} G(t_i(\varphi), \tau, \varphi) + (B(\varphi_i) A(\varphi_i) - \right. \\
\left. - A(\varphi_i) B(\varphi_i)) G(t_i(\varphi), \tau, \varphi) \frac{\partial t_i(\varphi)}{\partial \varphi} \right].
\end{aligned} \tag{15}$$

Используя оценки (3), (7), (12), легко получить (13) при $s = 1$. Для производных высших порядков функции $G(t, \tau, \varphi)$, дифференцируя (11) нужное число раз и используя функцию Грина, получаем равенства, аналогичные (14), (15). Оценивая их, доказываем справедливость неравенства (13) при $1 < s \leqslant l$. Лемма доказана.

Рассмотрим вопрос существования инвариантных множеств системы (1).

Теорема 2. *Пусть система* (2) *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и выполняется неравенство*

$$\| f(\varphi, x) - f(\varphi, y) \| + \| g(\varphi, x) - g(\varphi, y) \| \leqslant N \| x - y \| \tag{16}$$

с достаточно малой постоянной N. *Тогда система* (1) *имеет инвариантное множество* $x = u(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $u(\varphi) = u(\varphi + 2\pi)$, *непрерывное при* $\varphi \bar{\in} \Gamma$ *и имеющее разрывы первого рода при* $\varphi \in \Gamma$.

Если функции $f(\varphi, x)$, $g(\varphi, x)$ *имеют непрерывные частные производные по* φ, x *до* l*-го порядка включительно, ограниченные достаточно малой постоянной* N_1, *то функция* $u(\varphi)$ *при* $\varphi \bar{\in} \Gamma$ *также имеет непрерывные частные производные по* φ *до* l*-го порядка.*

Доказательство. Построим последовательность множеств $\{x = u_k(\varphi),\ u_k(\varphi) = u_k(\varphi + 2\pi),\ \varphi \in \mathscr{T}_m\}$, $k = 0, 1, \ldots$, где $u_0(\varphi) \equiv 0$, а $u_k(\varphi)$ является инвариантным множеством системы

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)x + f(\varphi, u_{k-1}(\varphi)), \quad \varphi \overline{\in} \Gamma, \tag{17}$$
$$\Delta x\,|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi, u_{k-1}(\varphi)).$$

Проводя оценки, аналогичные оценкам в [2], показываем, что система (17) при всех k имеет инвариантное множество

$$u_k(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi), \quad u_{k-1}(\varphi_\tau(\varphi)))\,d\tau +$$
$$+ \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(0, t_i(\varphi), \varphi)\, g(\varphi_i, u_{k-1}(\varphi_i)), \tag{18}$$

равномерно ограниченное по k. Кроме того, в силу неравенства (16)

$$\| u_{k+1}(\varphi) - u_k(\varphi) \|_0 \leqslant CN \| u_k(\varphi) - u_{k-1}(\varphi) \|_0, \tag{19}$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от k, N. Неравенство $CN < 1$ гарантирует равномерную сходимость функций $u_k(\varphi)$ к предельной $u(\varphi)$. Нетрудно убедиться, что $u(\varphi)$ задает инвариантное множество системы (1) и $u(\varphi) = u(\varphi + 2\pi)$.

Пусть теперь функции $f(\varphi, x)$, $g(\varphi, x)$ имеют непрерывные частные производные по φ. При $\varphi \overline{\in} \Gamma$, учитывая гладкость функций $t_i(\varphi)$ и кусочную непрерывность $\partial G(t, \tau, \varphi)/\partial\varphi$, для $\partial u_k(\varphi)/\partial\varphi$ получим формулу

$$\frac{\partial u_k(\varphi)}{\partial\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\varphi} [G(0, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi), u_k(\varphi_\tau(\varphi)))]\,d\tau +$$
$$+ \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(0, t_i(\varphi), \varphi) f(\varphi_i, u_{k-1}(\varphi_i)) \frac{\partial t_i(\varphi)}{\partial\varphi} +$$
$$+ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\varphi} [G(0, t_i(\varphi), \varphi)\, g(\varphi_i, u_{k-1}(\varphi_i))].$$

Как и прежде, под $\partial/\partial\varphi$ понимаем производную по одной из координат вектора φ. Используя оценки (3), (7), (12), (13) и ограниченность производных функций f, g достаточно малой постоянной N_1, получаем равномерную по k ограниченность и равномерную сходимость последовательности $\partial u_k(\varphi)/d\varphi$ к предельной функции $\partial u(\varphi)/\partial\varphi$. Используя те же соображения, показываем существование производных $u(\varphi)$ по φ до l-го порядка включительно.

1. *Ткаченко В. И.* О многочастотных колебаниях испульсных систем // Всесоюз. конф. «Нелинейн. колебания мех. систем» : Тез. докл.— Горький, 1987.— Ч. 1.— С. 131—132.
2. *Перестюк Н. А.* Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 1.— С. 63—68.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* О существовании инвариантных тороидальных множеств систем с мгновенным изменением // Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 262—273.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 288 с.
5. *Johnson R. A., Sell G. R.* Smoothness of spectral subbundless and reducibility of quasiperiodic linear differential system // J. Different. Equat.— 1981.— **41**, N 2.— P. 262—288.
6. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев
Получено 24.07.87