УДК 512.54

Е. Г. Косман

О нормальном строении силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы

В данной статье, полностью сохраняющей обозначения из [1, 2], будут описаны все элементы получающихся пополнением силовских p-подгрупп P ограниченной линейной группы $\overline{GL}(V)$ над конечным полем характеристики p, нормальные замыкания которых в P являются абелевыми подгруппами.

Определение. *Под нормальным замыканием $N(g) = N(g;\ G)$ элемента g из группы G будем понимать минимальную нормальную подгруппу в G, содержащую g.*

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — упорядоченный базис V, $V_n = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, $V'_n = \langle \rho_1, \ldots, \rho_n\rangle$, $\rho_i x_j = \delta_{ij}$. Унитреугольная группа $UT(V_n)$, связанная с базисом $x_1, \ldots, x_n$, порождается элементарными трансвекциями $\varepsilon_{ij}(\alpha_{ij}) = \tau_{\alpha_{ij}x_i, \rho_j}$, где $\alpha_{ij} \in F$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{2, n}$, $i < j$.

Обозначим $N_{ij} = \langle \varepsilon_{uv}(\alpha) \mid u = \overline{1, i},\ v = \overline{j, n},\ \alpha \in F\rangle$ для всех $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{2, n}$, $i < j$, а при $i < 1$ или $j > n$ полагаем $N_{ij} = \langle e\rangle$. Используя результаты [3, 4], где дано описание максимальных абелевых нормальных подгрупп группы $UT(V_n)$, нетрудно получить описание абелевых нормальных замыканий элементов из $UT(V_n)$.

Теорема 1. *$N(\sigma) = N(\sigma;\ UT(V_n))$ является абелевой нормальной подгруппой тогда и только тогда, когда $N(\sigma) = N(\tau)$, где $\tau \in UT(V_n)$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\tau = \prod\limits_{k=1}^{s} \varepsilon_{i_k j_k}(\alpha_{i_k j_k})$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s < j_1 < \ldots < j_s \leqslant n$; *при этом* $N(\sigma) = \langle\tau\rangle \prod\limits_{k=1}^{s} (N_{i_{k}-1 j_k} N_{i_k j_{k}+1})$;

2) $\tau = \prod\limits_{k=1}^{s} \varepsilon_{i_k j_k}(\alpha_{i_k j_k})$, $1 = i_1 < \ldots < i_s = j_1 < \ldots < j_s = n$; *при этом* $N(\sigma) = \langle\tau\rangle N_{1 j_1+1} N_{i_s-1 n} \prod\limits_{k=2}^{s-1} (N_{i_k-1 j_k} N_{i_k j_k+1})$;

3) *при* $\operatorname{char} F = 2$ $\tau = \varepsilon_{v+1 n}(\alpha_{v+1 n})\, \varepsilon_{vn}(\alpha_{vn})\, \varepsilon_{1v}(\alpha_{1v})\, \varepsilon_{1 v+1}(\alpha_{1 v+1}) \times \prod\limits_{k=1}^{s} \varepsilon_{i_k j_k}(\alpha_{i_k j_k})$, *где* $1 < i_1 < \ldots < i_s < v$, $v + 1 < j_1 < \ldots < j_s < n$, $\alpha_{1v} \neq 0$, $\alpha_{v+1 n} \neq 0$; *при этом* $N(\sigma) = \langle\tau\rangle \langle \varepsilon_{vn}(\alpha\alpha_{v+1n})\, \varepsilon_{1v+1}(\alpha\alpha_{1v}) \mid \alpha \in F\rangle \times N_{1 v+2} N_{v-1 n} \prod\limits_{k=1}^{s} (N_{i_k-1 j_k} N_{i_k j_k+1})$

Пусть $\mathfrak{P}(V)$ и $\mathfrak{S}(V)$ — классы силовских p-подгрупп группы $\overline{GL}(V)$, получающихся пополнением и плотным пополнением соответственно [1] $(\mathfrak{S}(V) \subset \mathfrak{P}(V))$.

Лемма. *Подгруппа H группы $P \in \mathfrak{S}(V)$ $\left(P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n,\ P_n \subset P_{n+1},\ P_n —\right.$ силовская p-подгруппа $\left. GL(V_n)\right)$ является абелевой тогда и только тогда, когда $H \cap P_n = H_n$ есть абелева подгруппа в P_n для всех $n = \overline{1, \infty}$.*

Перейдем к описанию абелевых нормальных замыканий элементов силовской p-подгруппы $P \in \mathfrak{S}(V)$. Пусть $\sigma \in P$. Тогда существует такой номер $n-1$, что $\sigma \in P_i$ для всех $i \geqslant n-1$ и $\sigma \notin P_i$ при $i = \overline{1, n-2}$. По лемме $N(\sigma;\ P)$ абелева подгруппа тогда и только тогда, когда $N(\sigma;\ P_i) = N(\sigma;\ P) \cap$

$\cap P_i$ является абелевой подгруппой в P_i при $i \geqslant n-1$. В $GL(V_{n-1})$ силовская p-подгруппа P_{n-1} сопряжена с $UT(V_{n-1})$, т. е. $\eta P_{n-1}\eta^{-1} = UT(V_{n-1})$ для некоторого $\eta \in GL(V_{n-1})$. Рассмотрим силовскую p-подгруппу $\eta P \eta^{-1} = T \in \mathfrak{S}(V)$. Тогда $\sigma_1 = \eta\sigma\eta^{-1}$ должен удовлетворять условиям теоремы 1. Поскольку $N(\sigma_1; T_n)$ тоже абелева подгруппа, то из элементов σ_1, удовлетворяющих условиям теоремы 1, необходимо отобрать такие, для которых это выполняется.

В [1] изучены все пополнения $UT(V_{n-1})$ до силовских p-подгрупп T_n группы $GL(V_n)$.. Если $UT(V_{n-1}) \subset T_n$, то $UT(V_n) = \varphi_n^{-1}(\alpha_{ii}) T_n \varphi_n(\alpha_{ii})$, где при $i \leqslant n-1$

$$\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii}) x_k = x_k \qquad \text{при } k = \overline{1, i-1},$$

$$\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii}) x_k = x_{k+1} \qquad \text{при } k = \overline{i, n-1}, \tag{1}$$

$\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii}) x_n = x_i - \alpha_{ii} x_{i+1}$ и $\varphi_n(\alpha_{nn}) = 1_{V_n}$. Найдем $\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\varepsilon_{uv}(\alpha)\varphi_n(\alpha_{ii})$ при $i \leqslant n-1$ для всех трансвекций $\varepsilon_{uv}(\alpha), u < v$, $u = \overline{1, n-2}$, $v = \overline{2, n-1}$. Поскольку $\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii}) \times \varepsilon_{uv}(\alpha)\varphi_n(\alpha_{ii}) = \tau_{\alpha\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})x_u,\ \rho_v\varphi_n(\alpha_{ii})}$, то необходимо вычислить $\rho_v\varphi_n(\alpha_{ii})$:

$$\rho_v\varphi_n(\alpha_{ii}) x_k = \rho_v x_k = \delta_{vk} \text{ при } k = \overline{1, i-1},$$

$$\rho_v\varphi_n(\alpha_{ii}) x_i = \rho_v(\alpha_{ii}x_i + x_n) = \alpha_{ii}\delta_{vi} + \delta_{vn},$$

$$\rho_v\varphi_n(\alpha_{ii}) x_k = \rho_v x_{k-1} = \delta_{vk-1} \text{ при } k = \overline{i+1, n}.$$

Отсюда при $i \leqslant n-1$

$$\begin{aligned} &\rho_v\varphi_n(\alpha_{ii}) = \rho_v && \text{при } v = \overline{1, i-1}, \\ &\rho_i\varphi_n(\alpha_{ii}) = \alpha_{ii}\rho_i + \rho_{i+1}, && \\ &\rho_v\varphi_n(\alpha_{ii}) = \rho_{v+1} && \text{при } v = \overline{i+1, n-1}, \\ &\rho_n\varphi_n(\alpha_{ii}) = \rho_i, && \end{aligned} \tag{2}$$

а при $i = n$ $\rho_v\varphi_n(\alpha_{nn}) = \rho_v 1_{V_n} = \rho_v$ для всех $v = \overline{1, n}$. Значит, при $1 \leqslant u < v \leqslant n-1$

$$\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\varepsilon_{uv}(\alpha)\varphi_n(\alpha_{ii}) = \begin{cases} \tau_{\alpha x_u, \rho_v} & \text{при } u = \overline{1, i-1},\ v = \overline{1, i-1}, \\ \tau_{\alpha x_u, \alpha_{ii}\rho_i}\tau_{\alpha x_u, \rho_{i+1}} & \text{при } u = \overline{1, i-1},\ v = i, \\ \tau_{\alpha x_u, \rho_{v+1}} & \text{при } u = \overline{1, i-1},\ v = \overline{i+1, n-1}, \\ \tau_{\alpha x_{u+1}, \rho_{v+1}} & \text{при } u = \overline{i, n-1},\ v = \overline{i+1, n-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда при $1 \leqslant u < v \leqslant n-1$

$$\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii}) N_{uv}\varphi_n(\alpha_{ii}) = \begin{cases} N_{uv} & \text{при } u = \overline{1, i-1},\ v = \overline{1, i-1}, \\ N_{ui} & \text{при } u = \overline{1, i-1},\ v = i,\ \alpha_{ii} \neq 0, \\ N_{ui+1} & \text{при } u = \overline{1, i-1},\ v = i,\ \alpha_{ii} = 0, \\ N_{uv+1} & \text{при } u = \overline{1, i-1},\ v = \overline{i+1, n-1}, \\ N_{u+1v+1} & \text{при } u = \overline{i, n-1},\ v = \overline{i+1, n-1}. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть σ_1 удовлетворяет условию 1 теоремы 1, т. е. $N(\sigma_1; UT(V_{n-1})) = \langle\tau\rangle \sum_{k=1}^{s} (N_{i_{k-1}j_k} N_{i_k j_{k+1}})$, где $\tau = \prod_{k=1}^{s} \varepsilon_{i_k j_k}(\alpha_{i_k j_k})$, $j_1 > \ldots > j_s > i_1 > \ldots > i_s$.

Тогда из (3) и (4) следует, что преобразование $\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})$ переводит лестницу [3, 4] с вершинами $(i_1, j_1), \ldots, (i_s, j_s)$ в лестницу с вершинами $(u_1, v_1), \ldots, (u_s, v_s)$, причем $v_1 > \ldots > v_s > u_1 > \ldots > u_s$. По условию 1 теоремы 1 $N(\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\sigma_1\varphi_n(\alpha_{ii}); UT(V_n))$ — абелева подгруппа, а значит, $N(\sigma_1; T_n)$ — тоже абелева подгруппа.

Пусть σ_1 удовлетворяет условию 2 теоремы 1, т. е. $N(\sigma_1; UT(V_{n-1})) = \langle\tau\rangle N_{i_1-1n}N_{1j_s+1}\prod_{k=2}^{s-1}(N_{i_k-1j_k}N_{i_kj_k+1})$, где $\tau = \prod_{k=1}^{s}\varepsilon_{i_kj_k}(\alpha_{i_kj_k})$, $n = j_1 > \ldots > j_s = i_1 > \ldots > i_s = 1$. Тогда из (3) и (4) следует, что преобразование $\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})$ переводит лестницу с вершинами $(i_1, j_1), \ldots, (i_s, j_s)$ в лестницу с вершинами $(u_1, v_1), \ldots, (u_s, v_s)$, причем $v_1 > \ldots > v_s = u_1 > \ldots > u_s$ при $i \neq i_1 = j_s$ и при $i = i_1 = j_s$, если $\alpha_{ii} = 0$. Если $i = 1$, то $u_s = 2$, а если $i = n$ $(\varphi_n(\alpha_{nn}) = 1_{V_n})$, то $v_1 = n - 1$. Если же $i = i_1 = j_s$ и $\alpha_{ii} \neq 0$, то $u_1 > \ldots > u_s$, $v_1 > \ldots > v_s$, $u_1 = v_s + 1$. По теореме 1 $N(\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\sigma_1\varphi_n(\alpha_{ii}); UT(V_n))$ будет абелевой подгруппой, если либо $i \notin \{1, n, i_1 = j_s\}$, либо $i = i_1 = j_s$ и $\alpha_{ii} = 0$. При этих условиях $N(\sigma_1; T_n)$ будет абелевой подгруппой.

Пусть σ_1 удовлетворяет условию 3 теоремы 1, т. е. $N(\sigma_1; UT(V_{n-1})) = \langle\tau\rangle\langle\varepsilon_{vn-1}(\alpha\alpha_{v+1n-1})\varepsilon_{1v+1}(\alpha\alpha_{1v}) \mid \alpha \in F\rangle N_{v-1n-1}N_{1v+2}\prod_{k=1}^{s}(N_{i_k-1j_k}N_{i_kj_k+1})$, где $\tau = \varepsilon_{v+1n-1}(\alpha_{v+1n-1})\varepsilon_{vn-1}(\alpha_{vn-1})\varepsilon_{1v}(\alpha_{1v})\varepsilon_{1v+1}(\alpha_{1v+1})\prod_{k=1}^{s}\varepsilon_{i_kj_k}(\alpha_{i_kj_k})$, $\alpha_{v+1n-1} \neq 0$, $\alpha_{1v} \neq 0$, $\operatorname{char} F = 2$, $v > i_1 > \ldots > i_s > 1$, $v + 1 < j_s < \ldots < j_1 < n - 1$. Тогда из (3) и (4) следует, что преобразование $\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})$ переводит лестницу с вершинами $(1, v), (i_1, j_1), \ldots, (i_s, j_s), (v + 1, n - 1)$ в лестницу с вершинами $(u_1, v_1), \ldots, (u_{s+2}, v_{s+2})$, причем $u_1 > \ldots > u_{s+2}, v_{s+2} < \ldots < v_1$. Если $i = 1$, то $u_{s+2} = 2$, а если $i = n$ $(\varphi_n(\alpha_{nn}) = 1_{V_n})$, то $v_1 = n - 1$. Если $i = v$ и $\alpha_{vv} \neq 0$, либо $i = v + 1$, то $u_1 = v_{s+2} + 2$. Если же $i \notin \{1, n, v, v + 1\}$, либо $i = v$ и $\alpha_{vv} = 0$, то $u_{s+2} = 1$, $v_1 = n$, $u_1 = v_{s+2} + 1$. По теореме 1 $N(\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\sigma_1\varphi_n(\alpha_{ii}); UT(V_n))$ будет абелевой подгруппой, если либо $i \notin \{1, n, v, v + 1\}$, либо $i = v$ и $\alpha_{vv} = 0$. При этих условиях $N(\sigma_1; T_n)$ будет абелевой подгруппой.

Теперь нам известно какой должна быть силовская p-подгруппа T_n группы $GL(V_n)$, чтобы $\sigma_1 \in UT(V_{n-1}) \subset T_n$ имел абелево нормальное замыкание не только в $UT(V_{n-1})$, но и в T_n. Эти условия на пополнение T_{n-1} до T_n при любом n являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $N(\sigma_1; T_n)$ была абелевой подгруппой. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $T \in \mathfrak{S}(V)$ $\left(T = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k,\ T_k \subset T_{k+1},\ T_k\right.$ — *силовская p-подгруппа в* $\left.GL(V_k)\right)$, $\sigma \in T_{n-1} \subset T$, $UT(V_{n-1}) = \psi_{n-1}^{-1}T_{n-1}\psi_{n-1}$, $\sigma_1 = \psi_{n-1}^{-1}\sigma\psi_{n-1}$. *$N(\sigma; T)$ является абелевой нормальной подгруппой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $N(\sigma_1; UT(V_{n-1})) = \langle\tau\rangle\prod_{k=1}^{s}(N_{i_k-1j_k}N_{i_kj_k+1})$, *где* $\tau = \prod_{k=1}^{s}\varepsilon_{i_kj_k}(\alpha_{i_kj_k})$, $j_1 > \ldots > j_s > i_1 > \ldots > i_s$;

2) *для всех n с условием* $\sigma \in T_{n-1}$ $N(\sigma_1; UT(V_{n-1})) = \langle\tau\rangle N_{i_1-1n}N_{1j_s+1} \times \prod_{k=2}^{s-1}(N_{i_k-1j_k}N_{i_kj_k+1})$, *где* $\tau = \tau(n-1) = \prod_{k=1}^{s}\varepsilon_{i_kj_k}(\alpha_{i_kj_k})$, $j_1 = n - 1 > \ldots > j_s = i_1 > \ldots > i_s = 1$ *и у оператора* $\varphi_n(\alpha_{ii})$ *вида* (1) $(\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii}) \times (\psi_{n-1}^{-1}T_n\psi_{n-1})\varphi_n(\alpha_{ii}) = UT(V_n))$ *либо* $i \notin \{1, n, i_1 = j_s\}$, *либо* $i = i_1 = j_s$ *и* $\alpha_{ii} = 0$;

3. $\operatorname{char} F = 2$; *для всех n с условием* $\sigma \in T_{n-1}$ $N(\sigma_1; UT(V_{n-1})) = \langle\tau\rangle \langle \varepsilon_{vn-1}(\alpha\alpha_{v+1n-1})\ \varepsilon_{1v+1}(\alpha\alpha_{1v}) \mid \alpha \in F\rangle\ N_{v-1n-1} N_{1v+2} \prod_{k=1}^{s} (N_{i_k-1j_k} N_{i_kj_k+1})$,

где $\tau = \tau(n-1) = \varepsilon_{v+1n-1}(\alpha_{v+1n-1})\, \varepsilon_{vn-1}(\alpha_{vn-1})\, \varepsilon_{1v}(\alpha_{1v}) \varepsilon_{1v+1}(\alpha_{1v+1}) \prod_{k=1}^{s} \varepsilon_{i_kj_k}(\alpha_{i_kj_k})$, $v > i_1 > \ldots > i_s > 1$, $v+1 < j_s < \ldots < j_1 < n-1$, $\alpha_{v+1n-1} \neq 0$, $\alpha_{1v} \neq 0$ *и у оператора* $\varphi_n(\alpha_{ii})$ *вида* (1) *либо* $i \notin \{1, n, v, v+1\}$, *либо* $i = v$ *и* $\alpha_{vv} = 0$.

Напомним обозначения из [2]. Пусть $P \in \mathfrak{P}(V)$, $W = \langle \rho_i \mid i = \overline{1, \infty}\rangle$, где $\rho_i(x_j) = \delta_{ij}$. Тогда $V(P)$ и $W(P)$ обозначают следующие подпространства в V и W соответственно: $V(P) = \langle x \mid$ существует трансвекция $\tau_{x,\rho} \in P$ $(x \in V,\ \rho \in W)\rangle$, $W(P) = \langle \rho \mid$ существует трансвекция $\tau_{x,\rho} \in P$ $(x \in V,\ \rho \in W)\rangle$. Определим $V^0(P) = \{\rho \in W \mid \rho x = 0$ для всех $x \in V(P)\}$, а $W^0(P) = \{x \in V \mid \rho x = 0$ для всех $\rho \in W(P)\}$.

Теорема 3. *Пусть* $T \in \mathfrak{S}(V)$, $\sigma \in T_n \subset T$, $\psi_n^{-1} T_n \psi_n = UT(V_n)$, $\sigma_1 = \psi_n^{-1}\sigma\psi_n$. *При* $\dim V^0(T) + \dim W^0(T) \leqslant 1$ $N(\sigma; T)$ *будет абелевой подгруппой тогда и только тогда, когда*

$$N(\sigma_1;\ UT(V_n)) = \langle\tau\rangle \prod_{k=1}^{s} (N_{i_k-1j_k} N_{i_kj_k+1}),$$

где

$$\tau = \prod_{k=1}^{s} \varepsilon_{i_kj_k}(\alpha_{i_kj_k}),\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s < j_1 < \ldots < j_s \leqslant n.$$

Доказательство. Достаточность следует из условия 1 теоремы 2.

Необходимость. Если в условиях 2 и 3 теоремы 2 у операторов $\varphi_n(\alpha_{ii})$ $i = i(n) \neq 1$ для всех n, то из (1) следует, что $\varphi_n(\alpha_{ii}) x_1 = x_1$ для всех n и $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда для трансвекции $\tau_{x,\rho} \in \psi_{n-1}^{-1} T_n \psi_{n-1}$ имеем $\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\,\tau_{x,\rho}\varphi_n(\alpha_{ii})\, x_1 = \tau_{\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})x,\, \rho\varphi_n(\alpha_{ii})}\, x_1 = x_1 + \rho(x_1)\,\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\, x$. Поскольку $\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\,\tau_{x,\rho}\varphi_n(\alpha_{ii}) \in UT(V_n)$, а $UT(V_n)$ стабилизирует флаг подпространств с неподвижной прямой $\langle x_1\rangle$, то $\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\,\tau_{x,\rho}\varphi_n(\alpha_{ii})\, x_1 = x_1$. Отсюда следует, что $\rho(x_1) = 0$ для любой трансвекции $\tau_{x,\rho} \in \psi_{n-1}^{-1} T_n \psi_{n-1}$ при всех n. Тогда при всех n для любой трансвекции $\psi_{n-1}\tau_{x,\rho}\psi_{n-1}^{-1} \in T_n$ и вектора $a = \psi_{n-1} x_1$ получим $\tau_{\psi_{n-1}x,\, \rho\psi_{n-1}^{-1}}\, a = a$. Отсюда $\rho\psi_{n-1}^{-1}(a) = 0$ для всех функционалов $\rho\psi_{n-1}^{-1}$ при всех n. Так как $W(T) = \langle \rho\psi_{n-1}^{-1} \mid \tau_{\psi_{n-1}x,\, \rho\psi_{n-1}^{-1}} \in T_n,\ n = \overline{1, \infty}\rangle$, то $W^0(T) = \langle a\rangle$ и $\dim W^0(T) = 1$.

Если в условиях 2 и 3 теоремы 2 у операторов $\varphi_n(\alpha_{ii})$ $i = i(n) \neq n$ для всех n, то из (2) следует $\rho_{n-1}\varphi_n(\alpha_{ii}) = \rho_n$ для всех n и $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Поскольку для любой трансвекции $\tau_{x,\rho} \in UT(V_n)$ $\rho_n(x) = 0$, то для любой трансвекции $\psi_{n-1}\varphi_n(\alpha_{ii})\,\tau_{x,\rho}\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\,\psi_{n-1}^{-1} = \tau_{\psi_{n-1}\varphi_n(\alpha_{ii})x,\, \rho\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\psi_{n-1}^{-1}}$, принадлежащей T_n, $\rho_n\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\,\psi_{n-1}^{-1}(\psi_{n-1}\varphi_n(\alpha_{ii})\, x) = 0$ для всех n. Заметим, что $\rho_n\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\,\psi_{n-1}^{-1} = \rho_{n-1}\psi_{n-1}^{-1} = \rho_k\psi_k^{-1}$ для любого $k \geqslant n$, поскольку $\psi_k = \psi_{k-1}\varphi_k(\alpha_{ii})$, а $\rho_k\varphi_k^{-1}(\alpha_{ii}) = \rho_{k-1}$ для всех $k \geqslant n$. Так как $V(T) = \langle \psi_{n-1}\varphi_n(\alpha_{ii})\, x \mid \tau_{\psi_{n-1}\varphi_n(\alpha_{ii})x,\, \rho\varphi_n^{-1}(\alpha_{ii})\psi_{n-1}^{-1}} \in T_n,\ n = \overline{1, \infty}\rangle$, то $V^0(T) = \langle \nu\rangle$ и $\dim V^0(T) = 1$, где $\nu = \rho_{n-1}\psi_{n-1}^{-1}$.

Следовательно, если $\sigma \in T$ удовлетворяет условиям 2 и 3 теоремы 2, то $\dim V^0(T) + \dim W^0(T) = 2$, что противоречит условиям теоремы. Значит, σ необходимо должен удовлетворять условию 1 теоремы 2, что и требовалось доказать.

В [1] доказано, что силовские p-подгруппы из $\mathfrak{P}(V)$ локально сопряжены с силовскими p-подгруппами из $\mathfrak{S}(V)$ с помощью нормализаторных автоморфизмов $\eta \in \mathrm{Aut}\, \overline{GL}\,(V)$, которые сохраняют трансвекции. Тогда теорема 2 дает описание абелевых нормальных замыканий элементов силовских p-подгрупп из $\mathfrak{P}\,(V)$ с точностью до автоморфизма η, а теорема 3 полностью переносится на случай силовских p-подгрупп из $\mathfrak{P}\,(V)$.

1. *Косман Е. Г.* Построение силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы// Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 173—179.
2. *Косман Е. Г.* О геометрической характеризации силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы // Там же.— 1988.— **40**, № 3.— С. 391—397.
3. *Левчук В. М.* Подгруппы унитреугольной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— **38**, № 6.— С. 1202—1220.
4. *Левчук В. М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч. 1 // Алгебра и логика.— 1976.— **15**, № 5.— С. 558—578.

Ин-т ботаники АН УССР, Киев Получено 12.07.88