УДК 517.95

Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев

Разрешимость задачи с неизвестной границей между областями определения параболического и эллиптического уравнений

Исследуется математическая модель фильтрации в пористой среде двух несмешивающихся компонент при наличии свободной (неизвестной) границы, разделяющей эти компоненты, например, задача о вытеснении жидкости газом. При этом искомое распределение давления в одном из компонент (жидкость) описывается эллиптическим уравнением, а в другом (газ) — параболическим. При некоторых предположениях о начальных условиях и геометрии области, в которой изучается задача (свободная граница не пересекается с заданными), доказана теорема существования решения в пространстве гладких функций в малом по времени.

В п. 1 приведена постановка задачи, дано описание функциональных пространств и сформулирован основной результат работы. Его доказательство проводится по следующей схеме. При помощи некоторой замены переменных задача сводится к отысканию функций, определенных в фиксированной области, и линеаризуется на некотором продолжении начальных данных (п. 2), что позволяет представить ее в виде $A\psi = \mathfrak{F}(\psi)$, где A — соответствующий линейный оператор, а $\mathfrak{F}(\psi)$ — оператор, содержащий нелинейности, члены «младшего» порядка и более гладкий свободный член. В п. 3 изучаются свойства линейного уравнения $A\psi = h$ с помощью предельного перехода по малому параметру при производной по времени и априорных оценок, опирающихся на свойства решений соответствующих модельных задач. Наконец, в п. 4 приведены оценки $\mathfrak{F}(\psi)$ и доказана сжимаемость отображения $\psi \to g(\psi)$, где $g(\psi)$ есть единственное решение уравнения $A(g(\psi)) = \mathfrak{F}(\psi)$, что приводит к доказательству существования решения исходной задачи.

1. Пусть Ω — заданная область в R^n, граница которой состоит из двух связных компонент Γ^+ и Γ^-, Γ^+ лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^-, $\Omega_T \equiv \Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T^\pm \equiv \Gamma^\pm \times [0, T]$. Пусть дана $\Gamma \subset \Omega$ — поверхность, диффеоморфная $\Gamma^\pm$ и разделяющая Ω на две связные подобласти $\Omega^\pm$, $\partial\Omega^\pm = \Gamma \cup \Gamma^\pm$, $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$.

Обозначим через $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ некоторые координаты на Γ, $y(\omega) \in \Gamma$ — соответствующая точка в R^n, $\vec{n}(\omega)$ — нормаль к Γ, направленная внутрь Ω^+. Пусть, наконец, $\gamma_0 > 0$ — такое число, что поверхности $\{y = y(\omega) \pm 2\vec{n}(\omega)\gamma,\ 0 < \gamma < \gamma_0\}$ не имеют самопересечений и не пересекаются с $\Gamma^\pm$, Γ Обозначим через $\Omega^\pm_{\rho, T} \subset R^{n+1}$ области, ограниченные плоскостями $\tau = 0$, $\tau = T$ и поверхностями $\Gamma_T^\pm$ и $\Gamma_{\rho, T} \equiv \{(y, \tau) : y = y(\omega) + \vec{n}\rho(\omega, \tau),\ \tau \in [0, T]\}$, где $|\rho(\omega, \tau)| < \gamma_0/4$. Функция $\rho(\omega, \tau)$ позволяет параметризовать искомую поверхность $\Gamma_{\rho, T}$ в терминах ее отклонения по нормали от заданной цилиндрической поверхности Γ_T [1].

Требуется определить функции $u^\pm(y, \tau)$ и $\rho(\omega, \tau)$, определенные в $\Omega^\pm_{\rho, T}$ и на Γ_T соответственно, по условиям:

$$
\begin{aligned}
\partial u^+/\partial\tau - a^+ \nabla_y^2 u^+ = 0, &\quad (y, \tau) \in \Omega^+_{\rho, T},\\
- a^- \nabla_y^2 u^- = 0, &\quad (y, \tau) \in \Omega^-_{\rho, T},
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
u^+ = u^-,\ \sum_{i=1}^n k^- \frac{\partial u^-}{\partial y_i} \cos(\vec{N}, y_i) = \sum_{i=1}^n k^+ \frac{\partial u^+}{\partial y_i} \cos(\vec{N}, y_i) =
$$

$$
= c_0 \cos(\vec{N}, \tau), \qquad (y, \tau) \in \Gamma_{\rho, T},
$$

$$
u^\pm = b^\pm(y, \tau), \qquad (y, \tau) \in \Gamma_T^\pm,
$$

$$
u^+(y, 0) = u_0^+(y), \quad y \in \Omega^+,\ \rho(\omega, 0) = 0,
$$

где $a^{\pm}$, c_0, $k^{\pm}$ — заданные положительные постоянные, $\vec{N}(\omega, \tau)$ — внутренняя для $\Omega^+_{\rho,T}$ нормаль к $\Gamma_{\rho,T}$, $\nabla y = (\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_n)$, $b^{\pm}(y, \tau)$ и $u_0^+(y)$ — заданные функции.

В настоящей работе используются пространства функций $H^{l,l/2}(\bar\Omega_T)$, $\underset{0}{H}{}^{l,l/2}(\bar\Omega_T)$ с нормой $|u|^{(l)}_{\Omega_T}$, введенные в [2]. Определим полунорму

$$[u]^{(\gamma,\beta)} = \sup_{\substack{(x,t),\\ (y,\tau)\in\Omega_T}} \frac{|u(x,t) - u(y,t) - u(x,\tau) + u(y,\tau)|}{|x-y|^{\gamma}|t-\tau|^{\beta}}, \quad \gamma, \beta \in (0, 1),$$

и введем банаховы пространства функций $\Pi^{1+\alpha}(\bar\Omega_T)$, $\Pi^{2+\alpha}(\bar\Omega_T)$, $E^{2+\alpha}(\bar\Omega_T)$ и $P^{2+\alpha}(\bar\Omega_T)$, получающиеся замыканием бесконечно дифференцируемых функций соответственно в нормах

$$|u|_{\Pi^{1+\alpha}} = |u|^{(1+\alpha)} + [u]^{\left(\alpha, \frac{1+\alpha}{2}\right)} + [u_x]^{\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$|u|_{\Pi^{2+\alpha}} = |u|^{(2+\alpha)} + [u_x]^{\left(\alpha, \frac{1+\alpha}{2}\right)} + [u_{xx}]^{\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$|u|_{E^{2+\alpha}} = |u|^{(1+\alpha)} + |u_x|^{(1+\alpha)} + [u_x]^{\left(\alpha, \frac{1+\alpha}{2}\right)} + [u_{xx}]^{\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$|u|_{P^{2+\alpha}} = |u|_{\Pi^{2+\alpha}} + |u_t|_{\Pi^{1+\alpha}}.$$

Аналогично определяются пространства функций на поверхностях $\Gamma^{\pm}_T$, Γ_T и пространства $\underset{0}{\Pi}{}^{1+\alpha}$, $\underset{0}{\Pi}{}^{2+\alpha}$, $\underset{0}{E}{}^{2+\alpha}$, $\underset{0}{P}{}^{2+\alpha}$.

Пусть данные задачи (1) удовлетворяют следующим условиям: Γ, $\Gamma^{\pm}$ принадлежат классу $H^{5+\alpha}$, $u_0^+(y) \in H^{4+\alpha}(\bar\Omega^+)$, $b^{\pm}(y,\tau) \in H^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}(\Gamma^{\pm}_T)$.

Предполагаем, далее, что выполнены условия согласования до первого порядка включительно, которые вытекают как необходимые из предположения существования гладкого решения. Из этих условий при $\tau = 0$ можно найти функцию $u^-(y, 0)$ как решение задачи Дирихле в области Ω^-. Предположим, наконец, что выполнено условие

$$\partial u_0^+/\partial n - \partial u_0^-/\partial n > 0 \text{ на } \Gamma. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнены указанные условия на данные задачи. Тогда найдется такое $T_0 > 0$, зависящее от этих данных, что существует решение* $u^+(y, \tau) \in \Pi^{2+\alpha}(\Omega^+_{\rho,T})$ $u^-(y, \tau) \in E^{2+\alpha}(\bar\Omega^-_{\rho,T})$, $\rho(\omega, \tau) \in P^{2+\alpha}(\Gamma_T)$, $0 < T \leqslant T_0$.

Отметим, что только ради упрощения изложения мы рассматриваем в областях $\Omega^{\pm}_{\rho T}$ простейшие параболическое и эллиптическое уравнения. Предлагаемый метод практически без изменений позволяет рассмотреть в областях $\Omega^{\pm}_{\rho T}$ произвольные квазилинейные уравнения соответствующих типов. В работе [3] рассмотрен случай, когда в каждой из областей $\Omega^{\pm}_{\rho T}$ распределение удовлетворяло параболическому уравнению. При изучении данной задачи потребовалось ввести другие функциональные пространства и обосновать некоторые предельные переходы, кроме того, предлагается более общий метод изучения модельной задачи сопряжения со старшими производными в граничных условиях.

2. Для доказательства теоремы 1 введем замену переменных $(y, \tau) = e_\rho(x, t)$ [1], при которой прообраз $\Omega^{\pm}_{\rho,T}$, $\Gamma_{\rho,T}$ есть $\Omega^{\pm}_T$, Γ_T, а точки $\Gamma^{\pm}_T$ остаются неподвижными. В новых переменных задача (1) примет вид

$$L^+_\rho u^+ \equiv \partial u^+/\partial t + (\vec{h}_\rho, \nabla_x) u^+ - a^+ \nabla^2_\rho u^+ = 0, \quad (x,t) \in \Omega^+_T, \tag{3}$$

$$L^-_\rho u^- \equiv -a^- \nabla^2_\rho u^- = 0, \quad (x,t) \in \Omega^-_T,$$

$$u^+ = u^-,\ k^- \frac{\partial u^-}{\partial n} S(\omega, \rho, \rho_\omega) + k^- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u^-}{\partial \omega_i} S^{(i)}(\omega, \rho, \rho_\omega) =$$

$$= k^+ \frac{\partial u^+}{\partial n} S(\omega, \rho, \rho_\omega) + k^+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u^+}{\partial \omega_i} S^{(i)}(\omega, \rho, \rho_\omega) = -c_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ на } \Gamma_T,$$

$$u^\pm(x, t) = b^\pm(x, t) \text{ на } \Gamma_T^\pm,\ u^+(x, 0) = u_0^+(x),\ \rho(\omega, 0) = 0,$$

где $\nabla_\rho = (E_\rho^*)^{-1} \nabla_x$, $E_\rho(x, t)$ — матрица Якоби $e_\rho(x, t)$, $\vec{h}_\rho = (\partial x / \partial \tau) \circ e_\rho(x, t)$, а функции $S(\omega, \rho, q_1, \dots, q_{n-1})$ и $S^{(i)}(\omega, \rho, q_1, \dots, q_{n-1})$ принадлежат классу $H^{4+\alpha}$ по своим аргументам и обладают свойствами $S(\omega, 0, 0, \dots, 0) = 1$, $S_{q_i}(\omega, 0, 0, \dots, 0) = 0$, $S^{(i)}(\omega, 0, 0, \dots, 0) = 0$. Определим такие функции $w^\pm(x, t) \in H^{4+\alpha, (4+\alpha)/2}(\Omega_T^\pm)$ и $s(\omega, t) \in H^{4+\alpha, (4+\alpha)/2}(\Gamma_T)$, что $w^+ = w^-$ на Γ_T, $w^\pm(x, 0) = u_0^\pm(x)$, $\frac{\partial w^+}{\partial t}(x, 0) = u^{+(1)}(x)$, $s(\omega, 0) = 0$, $\frac{\partial s}{\partial t}(\omega, 0) = \rho^{(1)}(\omega)$, где $u^{+(1)}(x)$ и $\rho^{(1)}(\omega)$ определяются из условий согласования. Способ построения таких функций указан в [2] (гл. 4) и из него следует

$$|w^+|_{\Omega_T^+}^{(4+\alpha)} + |w^-|_{\Omega_T^-}^{(4+\alpha)} + |s|_{\Gamma_T}^{(4+\alpha)} \leqslant C(T) |u_0^+|_{\Omega^+}^{(4+\alpha)}, \tag{4}$$

$$C(T) \leqslant \text{const при } T \to 0.$$

Вместо искомых функций в задаче (3) введем новые неизвестные $v^\pm(x, t) = u^\pm(x, t) - w^\pm(x, t)$, $\sigma(\omega, t) = \rho(\omega, t) - s(\omega, t)$, для которых задача (3) сводится к задаче с нулевыми начальными условиями. Обозначим $L_0^+ = \partial/\partial t - a^+ \nabla_x^2$, $L_0^- = -a^- \nabla_x^2$, $\delta e_\sigma = \Xi(x) \sigma(\omega, t)$, где $\Xi(x)$ — некоторая известная функция и δe_σ есть вариация отображения e_ρ при $\rho = s(\omega, t)$, $\theta^\pm(x, t) = v^\pm(x, t) - (\nabla_x w^\pm, \delta e_\sigma)$.

В нелинейных соотношениях (3) выделим старшие линейные по $\psi \equiv \equiv (v^+, v^-, \sigma)$ члены и, оставив их слева, представим эти соотношения в виде

$$L_0^\pm \theta^\pm = \mathfrak{F}_0^\pm(v^\pm, \sigma) \text{ в } \Omega_T^\pm, \tag{5}$$

$$c_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + k^\pm \frac{\partial \theta^\pm}{\partial n} + \sum_{i=1}^{n-1} l_i^\pm(\omega, t) \sigma_{\omega_i} = \mathfrak{F}_1^\pm(v^\pm, \sigma) \text{ на } \Gamma_T,$$

$$\theta^+ - \theta^- + d(\omega, t) \sigma = 0 \text{ на } \Gamma_T;$$

$$\theta^\pm = \mathfrak{F}_2^\pm(x, t) \text{ на } \Gamma_T^\pm;$$

$$v^+ \in \underset{0}{\Pi}^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^+),\ v^- \in \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^-),\ \sigma \in \underset{0}{P}^{2+\alpha}(\Gamma_T),$$

$$l_i^\pm(\omega, t) = k^\pm \sum_n \frac{\partial w^\pm}{\partial \omega_n} \frac{\partial S^{(n)}}{\partial q_i}(\omega, s, s_\omega),\ d(\omega, t) = \frac{\partial w^+}{\partial n} - \frac{\partial w^-}{\partial n},$$

где, например,

$$\mathfrak{F}_0^+(v^+, \sigma) = -L_s^+ w^+ + (L_s^+ - L_0^+)(w^+ - w^+ \circ e_s) + L_0^+ [w^+ +$$

$$+ (\nabla_x w^+, \delta e_s) - w^+ \circ e_s] - [(L_0^+ w^+) \circ e_\rho - (L_0^+ w^+) \circ e_s] -$$

$$- (L_\rho^+ - L_0^+)(w^+ - w^+ \circ e_\rho) - L_0^+ [w^+ + (\nabla_x w^+, \delta e_\rho) - w^+ \circ e_\rho] -$$

$$- (L_\rho^+ - L_0^+) v^+,\ \mathfrak{F}_2^\pm(x, t) = b^\pm(x, t) - w^\pm(x, t).$$

Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{F}_0^{\pm}(v^{\pm}, \sigma)$ можно представить в виде

$$\mathfrak{F}_0^{\pm}(v^{\pm}, \sigma) = f_0^{\pm}(v^{\pm}, \sigma) + \sum_{k,l} \sum_{i=1}^{n} a_{kl} f_{k,i}^{\pm}(v^{\pm}, \sigma) \frac{\partial}{\partial x_i} f_{l,i}^{\pm}(\sigma \pm, \sigma), \tag{6}$$

где операторы $f_0^{\pm}$, $f_{k,i}^{\pm}$ содержат не более чем первые производные функций $v^{\pm}(x, t)$, $\sigma(\omega, t)$ по x и $\partial\sigma/\partial t$, $a_{kl} \in \{0, 1\}$, $k, l = \overline{1, N}$.

Соотношения (5) будем в дальнейшем записать в виде

$$A\psi = \mathfrak{F}(\psi), \tag{7}$$

где A — линейный оператор, определяемый левыми частями соотношений (5).

3. Рассмотрим линейную задачу

$$A\varphi = h, \tag{8}$$

где

$$\varphi = (\theta^+, \theta^-, \sigma) \in \mathcal{H}^{\alpha} \equiv \underset{0}{\Pi}^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^+) \times \underset{0}{\mathrm{E}}^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T^-) \times \underset{0}{P}^{2+\alpha}(\Gamma_T),$$

$$h = (\mathfrak{F}_0^+(x, t),\ \mathfrak{F}_0^-(x, t),\ \mathfrak{F}_1^+(\omega, t),\ \mathfrak{F}_1^-(\omega, t),\ \mathfrak{F}_0^+(x, t),\ \mathfrak{F}_2^-(x, t)),$$

$$\mathfrak{F}_0^{\pm}(x, t) = f_0^{\pm}(x, t) + \sum_{k,l} \sum_{i=1}^{n} a_{kl} f_{k,i}^{\pm}(x, t) \frac{\partial f_{l,i}^{\pm}}{\partial x_i}(x, t),$$

$$f_0^{\pm},\ f_{k,i}^{\pm} \in \underset{0}{\Pi}^{1+\alpha}(\bar{\Omega}_T^{\pm}),\quad \mathfrak{F}_1^{\pm}(\omega, t) \in \underset{0}{\Pi}^{1+\alpha}(\Gamma_T),$$

$$\mathfrak{F}_2^+(x, t) \in \underset{0}{\Pi}^{2+\alpha}(\Gamma_T^+),\ \mathfrak{F}_2^-(x, t) \in \underset{0}{\mathrm{E}}^{2+\alpha}(\Gamma_T^-).$$

Теорема 2. *Пусть h удовлетворяет указанным условиям. Тогда существует единственное решение задачи* (8), *для которого справедлива оценка*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^{\alpha}} \leqslant C(T)(\mathfrak{M}^+(h, T) + \mathfrak{M}^-(h, T)), \tag{9}$$

где $\mathfrak{M}^+(h, T) = |f_0^+|_{\Pi^{1+\alpha}(\bar{\Omega}_T^+)} + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i}^{n} |f_{k,i}^+|^2_{\Pi^{1+\alpha}(\bar{\Omega}_T^+)} + |\mathfrak{F}_1^+|_{\Pi^{1+\alpha}(\Gamma_T)} + |\mathfrak{F}_2^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\Gamma_T^+)}$, а $\mathfrak{M}^-(h, T)$ *имеет такой же вид, только последнее слагаемое заменено на* $|\mathfrak{F}_2^-|_{\mathrm{E}^{2+\alpha}(\Gamma_T^-)}$.

Доказательство теоремы получается последовательным применением следующих утверждений. Первое утверждение относится к модельной задаче специального вида, связанной с наличием неизвестной границы в (1):

$$L_0^+\theta^+ = f_0^+ + f_1^+ \partial f_2^+/\partial z_i \text{ в } R_{n,T}^+ = \{(z, t) \in R^n \times (0, T) : z_n > 0\},$$

$$L_\varepsilon^- \equiv \varepsilon\partial\theta^-/\partial t - a^- \nabla_x^2 \theta^- = f_0^- + f_1^- \partial f_2^-/\partial z_i \text{ в } R_{n,T}^- = \{(z, t) \in R^n \times$$

$$\times (0, T) : z_n < 0\},\ c_0 \partial\sigma/\partial t + k^{\pm}\partial\theta^{\pm}/\partial z_n + \sum_{i=1}^{n-1} l_i^{\pm}\sigma_{z_i} = \mathfrak{F}_1^{\pm},$$

$$\theta^+ - \theta^- + d\sigma = \mathfrak{F}_3 \text{ на } R_{n-1,T} = \{(z, t)\, R^n \times (0, T) : z_n = 0\};$$

$$\theta^+ \in \underset{0}{\Pi}^{2+\alpha}(\bar{R}_{n,T}^+),\ \theta^- \in \underset{0}{\mathrm{E}}^{2+\alpha}(\bar{R}_{n,T}^-),\ \sigma \in \underset{0}{P}^{2+\alpha}(R_{n-1,T}), \tag{10}$$

где c_0, $k^{\pm}$, $l_i^{\pm}$, d — заданные положительные постоянные, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, правые части соотношений (10) предполагаются достаточно гладкими финитными заданными функциями.

Л е м м а 1. *Задача* (10) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка, не зависящая от* ε:

$$|\theta_\varepsilon^+|_{\Pi^{2+\alpha}(\bar{R}^+_{n,T})} + |\theta_\varepsilon^-|_{E^{2+\alpha}(\bar{R}^-_{n,T})} + |\sigma|_{P^{2+\alpha}(\bar{R}_{n-1,T})} \leqslant c\,[|f_0^+|_{\Pi^{1+\alpha}} + |f_0^-|_{\Pi^{1+\alpha}} + \sum_{i=1}^{2}(|f_i^+|^2_{\Pi^{1+\alpha}} + |f_i^-|^2_{\Pi^{1+\alpha}}) + |\mathfrak{F}_1^+|_{\Pi^{1+\alpha}} + |\mathfrak{F}_1^-|_{\Pi^{1+\alpha}} + |\mathfrak{F}_3|_{P^{2+\alpha}}], \qquad (11)$$

где c *зависит только от* $a^\pm$, $k^\pm$, d, $l_i^\pm$, T *и размеров носителей правых частей в* (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Оценки объемного потенциала

$$v_\varepsilon(x, t) = \int_0^t \int_{R^n} \frac{\varepsilon^{n/2-1}}{[4\pi(t-\tau)]^{n/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2\varepsilon}{4(t-\tau)}} f_1(\xi, \tau)\, \frac{\partial f_2(\xi, \tau)}{\partial \xi_j}\, d\xi d\tau$$

показывают, что $|v_\varepsilon|_{E^{2+\alpha}} \leqslant c\,|f_1|_{\Pi^{1+\alpha}}|f_2|_{\Pi^{1+\alpha}}$, где c не зависит от ε. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $f_i^\pm \equiv 0$, $i = 0, 1, 2$, $\mathfrak{F}_3 \equiv 0$. Используя преобразования Фурье и Лапласа, для неизвестной функции σ можно получить соотношения

$$\tilde{\sigma}\{1 + [i(\lambda, c_1) + c_2\sqrt{p + a^+\lambda^2}]\,p(\varepsilon a^+ - a^-)[p + c_3\sqrt{p + a^+\lambda^2} + i(\lambda, c_4)]^{-1}[c_5\sqrt{p + a^+\lambda^2} + c_6\sqrt{\varepsilon p + a^-\lambda^2}]^{-1}[\sqrt{a^+}\sqrt{\varepsilon p - a^-\lambda^2} + \sqrt{a^-}\sqrt{p + a^+\lambda^2}]^{-1}\} = [\tilde{\mathfrak{F}}_1 + c_6\sqrt{\varepsilon p + a^-\lambda^2} + \tilde{\mathfrak{F}}_1^- c_5\sqrt{p + a^+\lambda^2}] \times [c_6\sqrt{\varepsilon p + a^-\lambda^2} + c_5\sqrt{p + a^+\lambda^2}]^{-1}[p + c_3\sqrt{p + a^+\lambda^2} + i(\lambda, c_4)]^{-1}, \qquad (12)$$

где $c_1, c_4 \in R^{n-1}$, c_2, c_3, c_5, c_6 — некоторые положительные постоянные, $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\mathfrak{F}}_1^\pm$ — преобразования соотвествующих функций. Из (12), следует, что функция $\sigma(z, t)$, $(z, t) \in R_{n-1,T}$, удовлетворяет уравнению $(I + K)\sigma = \mathfrak{F}$ с вполне непрерывным оператором K в пространстве $P^{2+\alpha}(R_{n-1,T})$, откуда выводится утверждение леммы. Аналогичные модельные задачи в других функциональных пространствах изучались в [3, 4].

Рассмотрим теперь линейную задачу

$$A_\varepsilon \varphi_\varepsilon = h, \qquad (13)$$

полностью аналогичную задаче (8) с заменой оператора L_0^- на L_ε^-.

Л е м м а 2. *Для* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *задача* (13) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\mathscr{H}^\alpha} \leqslant C(T)(\mathfrak{M}^+(h, T) + \mathfrak{M}^-(h, T)), \qquad (14)$$

где $C(T)$ *не зависит от* ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. В модельной задаче (10) при $\varepsilon > 0$ имеют место разрешимость и оценки в пространствах $H^{l, l/2}$ [3]. С использованием этих оценок, аналогично [2], как это сделано, например, в [4], доказывается разрешимость задачи (13) при бесконечно дифференцируемых правых частях в (13). Полностью аналогично получению априорных оценок Шаудера (см. [5], гл. 3) с использованием (11) доказывается оценка

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\mathscr{H}^\alpha} \leqslant C(T)(\mathfrak{M}^+(h, T) + \mathfrak{M}^-(h, T)) + C(T)\langle\theta_\varepsilon^-\rangle_t^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}. \qquad (15)$$

Для оценки последнего слагаемого в (15) будем считать все функции продолженными нулем в область $t < 0$ и введем обозначения $(\Delta t > 0)$

$$f_{\Delta t}(x, t) = \frac{f(x, t) - f(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^{\frac{1+\alpha}{2}}}.$$

Легко понять, что функция $\theta^-_{\varepsilon, \Delta t}(x, t)$ удовлетворяет краевой задаче вида

$$\varepsilon \frac{\partial \theta^-_{\varepsilon, \Delta t}}{\partial t} - a^- \nabla^2_x \theta^-_{\varepsilon, \Delta t} = f^-_{0, \Delta t} + f^-_{1, \Delta t} \frac{\partial f^-_2}{\partial x_i}(x, t) + f^-_1(x, t - \Delta t) \frac{\partial f^-_{2, \Delta t}}{\partial x_i}$$

$$\text{в } \Omega^-_T,\ \theta^-_{\varepsilon, \Delta t}|_{\Gamma_T} = \theta^+_{\varepsilon, \Delta t}|_{\Gamma_T} + \sigma_{\varepsilon, \Delta t} d(\omega, t) + \sigma(\omega, t - \Delta t) d_{\Delta t}(\omega, t), \quad (16)$$

$$\theta^-_{\varepsilon, \Delta t}|_{\Gamma^-_T} = \mathfrak{F}^-_{2, \Delta t},\ \theta^-_{\varepsilon, \Delta t}|_{t=0} = 0.$$

Ввиду ограниченности всех функций, входящих в правые части (16), производя замену $t = \varepsilon\tau$, при которой максимумы всех функций остаются неизменными, и используя теорему 7.1 из [2] (гл. 3), получаем оценку

$$\max_{\overline{\Omega}^-_T} |\theta^-_{\varepsilon, \Delta t}| \leqslant c(\mathfrak{M}^-(h, T) + \max_{\Gamma_T} |\theta^+_{\varepsilon, \Delta t}| + \max_{\Gamma_T} |\sigma_{\varepsilon, \Delta t}| +$$

$$+ \max_{\Gamma_T} |\sigma_\varepsilon|) \leqslant c(\mathfrak{M}^-(h, T) + \langle\theta^+_\varepsilon\rangle_t^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle\sigma_\varepsilon\rangle_t^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} +$$

$$+ \max_{\Gamma_T} |\sigma_\varepsilon|) \leqslant c\mathfrak{M}^-(h, T) + T^{\frac{1}{2}} c(|\theta^+_\varepsilon|_{\overset{0}{H}{}^{2+\alpha}} + |\sigma_\varepsilon|_{\overset{0}{P}{}^{2+\alpha}}), \quad (17)$$

где последнее неравенство следует из соотношений

$$|u|_{\overset{0}{H}{}^{1+\alpha}} \leqslant cT^{1/2} |u|_{\overset{0}{H}{}^{2+\alpha}} \leqslant cT^{1/2} |u|_{\overset{0}{P}{}^{2+\alpha}}. \quad (18)$$

Комбинируя теперь (15) и (17), получаем (14) вначале при малых $T \leqslant T_0$, а затем на интервале $[T_0, 2T_0]$ и т. д. до T (ср. с [2], гл. IV).

Из доказанной леммы легко вытекает утверждение теоремы 2. Действительно, пусть сначала h — набор бесконечно дифференцируемых функций. Тогда, как легко проверить, φ_ε, $\varepsilon > 0$, будет также бесконечно дифференцируемой и для всех производных φ_ε будут справедливы оценки, аналогичные (14). Отсюда следует, что в (13) можно совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и получить бесконечно дифференцируемое решение задачи (8), для которого будет справедлива оценка (14). Для произвольных наборов h, удовлетворяющих условиям теоремы 2, доказательство получается приближением правых частей бесконечно дифференцируемыми функциями и предельным переходом в силу оценки (14).

4. Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть B_r — замкнутый шар в пространстве $\mathcal{H}^\alpha$ с центром в нуле радиуса r. На шаре B_r рассмотрим оператор $g = g_2 g_1$, где $g_1 : B_r \to \mathcal{H}^\alpha$, который каждому $\psi \in B_r$ ставит в соответствие элемент $g_1(\psi)$ — решение задачи (8) с $h = \mathfrak{F}(\psi)$, и $g_2 : (\theta^+, \theta^-, \sigma) \to (v^+, v^-, \sigma)$. Неподвижная точка этого оператора будет, очевидно, решением уравнения (7), и, следовательно, решением исходной задачи. Выражение $\mathfrak{F}(\psi)$ удовлетворяет соотношению

$$|\mathfrak{M}^\pm(\mathfrak{F}(\psi_1), T) - \mathfrak{M}^\pm(\mathfrak{F}(\psi_2), T)| \leqslant C(T)(\delta(r) + T^{\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}}) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{H}^\alpha},$$

$$|\mathfrak{M}^\pm(\mathfrak{F}(0), T)| \leqslant C(T) T^{\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}}, \qquad \alpha_1 > \alpha, \quad (19)$$

$$\psi_1,\ \psi_2 \in B_r, \quad \delta(r) \to 0 \text{ при } r \to 0.$$

Неравенство (19) является следствием того, что выражение $\mathfrak{B}(\psi)$ содержит либо члены, более гладкие, чем элементы $\mathcal{H}^\alpha$, либо члены, представимые в виде произведения функций из $\mathcal{H}^\alpha$. Эти обстоятельства позволяют пользоваться соотношениями

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^\alpha} \leqslant C(T)\,T^{\frac{\alpha_1-\alpha}{2}}\|\psi\|_{\mathcal{H}^{\alpha_1}},\ \alpha_1>\alpha_2\ \ \psi\in H^{\alpha_1},$$

$$\|\psi_1\psi_2\|_{\mathcal{H}^\alpha}\leqslant cr\|\psi_2\|_{\mathcal{H}^\alpha},\quad \psi_1\in B_r.$$

Оценки, аналогичные (19), в случае задачи Стефана подробно описаны в [4]. Из соотношений (9) и (19) следует

$$\|g(\psi_1)-g(\psi_2)\|_{\mathcal{H}^\alpha}\leqslant C(T)\,(\delta(r)+T^{\frac{\alpha_1-\alpha}{2}})\,\|\psi_1-\psi_2\|_{\mathcal{H}^\alpha}, \tag{20}$$

$$\|g(0)\|_{\mathcal{H}^\alpha}\leqslant c(T)\,T^{\frac{\alpha_1-\alpha}{2}}.$$

Неравенства (20) показывают, что выбором достаточно малых r и T можно добиться того, чтобы отображение g переводило B_r в себя и было тем сжимающим. Утверждение теоремы 1 следует теперь из принципа сжатых отображений.

1. *Hanzawa E. I.* Classical solutions of the Stefan problem // Tohoku Math. J.— 1981.— **33**. — P. 297—335.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
3. *Базалий Б. В., Данилюк И. И., Дегтярев С. П.* Классическая разрешимость многомерной нестационарной задачи фильтрации со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 2.— С. 3—7.
4. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб.— 1987.— **132**, № 1.— С. 3—19.
5. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1964.— 538 с.

Ин-т прикл математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 08.07.87