УДК 519.21

Ю. Д. Жданова

Распределение момента достижения для случайного блуждания на конечной разрешимой группе

1. Постановка задачи. Пусть G_N — разрешимая группа, $\{\xi_n, n \geqslant 0\}$ — однородная цепь Маркова со значениями в G_N и с матрицей переходных вероятностей $P = \{p_{ij}, i, j = \overline{0, N-1}\}$, где $p_{ij} = P\{\xi_n = g_j/\xi_{n-1} = g_i\}$. Цепь Маркова ξ_n называется случайным блужданием на группе G_N (см., например, [1]), если

$$P\{\xi_n = g_j/\xi_{n-1} = g_i\} = P\{\xi_n = g_i^{-1}g_j/\xi_{n-1} = e\},$$

где $e = g_0$ — единица группы G_N.

Положим $\{P\xi_n = g_j/\xi_{n-1} = e\} = p_j$, $j = \overline{0, N-1}$. Распределение $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_{N-1}\}$, $p_j \geqslant 0$, $\sum_{j=0}^{N-1} p_j = 1$, однозначно определяет случайное блуждание на G_N.

Матрица P действует на произвольный вектор-столбец $u = \{u(g_i), g_i \in G_N\}$ следующим образом: $Pu(g_k) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j u(g_k g_j)$.

Пусть $H \subset G_N$ — некоторое непустое подмножество группы G_N, $H \neq G_N$, $\overline{H} = G_N \setminus H$ — дополнение подмножества H и $\tau_{g,H} = \min\{n: \xi_n \in H\}$, $\xi_0 = g \in \overline{H}$, — момент первого достижения случайным блужданием ξ_n подмножества H. Положим $\varphi_H(g, \lambda)\, Me^{i\lambda\tau_{g,H}}$, $g \in \overline{H}$. Известно [2], что характеристические функции $\varphi_H(g, \lambda)$ являются решениями системы уравнений

$$\varphi_H(g_k, \lambda) = e^{i\lambda} \sum_{\overline{H}} p_{kj}\varphi_H(g_j, \lambda) + e^{i\lambda} \sum_{H} p_{kj}, \quad g_k \in \overline{H}.$$

Введем векторы-столбцы

$$\varphi_H(\lambda) = \{\varphi_H(g_k,\lambda),\ g_k \in \overline{H}\},\quad q_{\overline{H}} = \{g_{\overline{H}}(q_k) = \sum_H p_{kj},\quad g_k \in \overline{H}\},$$

и сужение $P_{\overline{H}}$ матрицы P на подмножество $\overline{H}$. Тогда при $\lambda \neq 0$

$$\varphi_H(\lambda) = e^{i\lambda}(I - e^{i\lambda}P_{\overline{H}})^{-1} q_{\overline{H}}. \tag{1}$$

Задача состоит в том, чтобы дать явное выражение для $\varphi_H(\lambda)$ в терминах распределения P и характеристик, определяемых группой G_N. Для случая абелевой группы задача решена в [3].

2. Вспомогательные результаты. Пусть G_N — разрешимая группа ступени разрешимости $\geqslant 2$. Известно [4, 5], что конечные разрешимые группы — это группы, которые можно построить из абелевых групп посредством нескольких последовательных расширений. Если $N = n_1 n_2 \ldots n_s$, то G_N обладает субнормальным рядом

$$E = G_{n_0} < G_{n_1} < G_{n_1 n_2} < \ldots < G_{n_1 n_2 \ldots n_s} = G_N,$$

все факторы которого $G_{Rn_{r+1}}/G_R = H_{n_{r+1}}$, $R = n_1 n_2 \ldots n_r$, $r < s$, абелевы.

С помощью характеров абелевых групп H_{n_r}, $r = \overline{1, s}$, построим векторы-столбцы

$$\psi^{G_N}_{l_1,l_2,\ldots,l_{s-1},l_s} = \chi^{H_{n_s}}_{l_s} \underset{G_N}{\otimes} \psi^{G_{n_1 n_2 \ldots n_{s-1}}}_{l_1,l_2,\ldots,l_{s-1}} \overset{\text{def}}{=} \{\chi^{H_{n_s}}_{l_s}(h_i)\, \psi^{G_{n_1 n_2 \ldots n_{s-1}}}_{l_1,l_2,\ldots,l_{s-1}}(g_j^{h_i}),$$

$$i = \overline{0,\ n_s - 1},\quad j = \overline{0,\ n_1 n_2 \ldots n_{s-1} - 1},\quad g_j^{h_i} = h_i g_j h_i^{-1}\},$$

$$l_r = \overline{0,\ n_r - 1},\quad r = \overline{1, s}.$$

Положим $\mu_{l_1,l_2,\ldots,l_s} = \sqrt{N} \sum\limits_{j=0}^{N-1} p_j \psi^{G_N}_{l_1,l_2,\ldots,l_s}(g_j)$.

Для матрицы $h(P)$, где h — функция, определенная на спектре матрицы P, справедливо разложение

$$h(P) = \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \sum_{l_2=0}^{n_2-1} \ldots \sum_{l_s=0}^{n_s-1} h(\mu_{l_1,l_2,\ldots,l_s})\, \Pi_{l_1,l_2,\ldots,l_s}, \tag{2}$$

где

$$\Pi_{l_1,l_2,\ldots,l_s} = \psi^{G_N}_{l_1,l_2,\ldots,l_s} \underset{G_N}{\otimes} \psi^{*G_N}_{l_1,l_2,\ldots,l_s}.$$

Разложение (2) справедливо для любой матрицы, связанной с группой G_N [6].

3. Распределение момента достижения. Пусть $s(P)$ — носитель меры P и G_R, $R = n_1 n_2 \ldots n_r$, $r < s$,— минимальный нормальный делитель индекса t группы G_N, который содержит $s(P)$, P_{G_R} — матрица переходных вероятностей блуждания на инвариантной подгруппе G_R. Если индекс t подгруппы G_R больше 1, то матрица P блуждания ξ_n на группе G_N примет в некотором базисе блочно-диагональный вид, в котором все блоки равны P_{G_R}. Собственные значения матрицы P_{G_R} являются собственными значениями матрицы P с геометрической кратностью t. Обозначим собственные векторы матрицы P через $\psi^{G_R}_{l_1,l_2,\ldots,l_r,j}$, $l_i = \overline{0, n_i - 1}$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{0, t-1}$. Введем сужения $(\psi^{G_R}_{l_1,l_2,\ldots,l_r,j})^H$ и $(\psi^{G_R}_{l_1,l_2,\ldots,l_r,j})^{\overline{H}}$ и вектора $\psi^{G_R}_{l_1,l_2,\ldots,l_r,j}$ на подмножества H и $\overline{H}$ соответственно. Положим $\nu_{l_1,l_2,\ldots,l_r,j}(\lambda) = 1 - e^{i\lambda}\mu_{l_1,l_2,\ldots,l_r,j}$.

Теорема. *Если для любого непустого подмножества H группы G_N, $H \not\subset G_R$ и $H \cap G_R \neq \varnothing$, то для характеристической функции* (1) *момента достижения случайным блужданием подмножества H справедливо соотношение*

$$\varphi_H(\lambda) = \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \sum_{j=0}^{t-1} \nu_{l_1,\ldots,l_r,j}^{-1}(\lambda) (\psi_{l_1,\ldots,l_r,j}^{*G_R})^H \times$$

$$\times \left\{ \left[\sum_{s_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_r-1} \sum_{k=0}^{t-1} \nu_{s_1,\ldots,s_r,k}^{-1}(\lambda) (\psi_{s_1,\ldots,s_r,k}^{G_R})^H \underset{G_R}{\otimes} (\psi_{s_1,\ldots,s_r,k}^{*G_R})^H \right]^{-1} 1 \right\} (\psi_{l_1,\ldots,l_r,j}^{G_R})^{\overline{H}}. \quad (3)$$

Доказательство. Если в матрице P выделить строки и столбцы, соответствующие элементам подмножества H, то в некотором базисе матрица P примет блочный вид, в котором $P_{\overline{H}}$ и P_H — сужения матрицы P на подмножества $\overline{H}$ и H, а элементами подматриц $P_{\overline{H},H}$, $P_{H,\overline{H}}$ являются вероятности перехода из $\overline{H}$ в H и из H в $\overline{H}$ соответственно. Это же справедливо и для матрицы $I - e^{i\lambda} P$. Согласно известной формуле обращения блочной матрицы [7]

$$(I - e^{i\lambda}P)_{\overline{H},H}^{-1} = e^{i\lambda}(I - e^{i\lambda}P_{\overline{H}})^{-1} P_{\overline{H},H} (I - e^{i\lambda}P)_H^{-1}.$$

Отсюда

$$e^{i\lambda}(I - e^{i\lambda}P_{\overline{H}})^{-1} P_{\overline{H},H} = (I - e^{i\lambda}P)_{\overline{H},H}^{-1} [(I - e^{i\lambda}P)_H^{-1}]^{-1}. \quad (4)$$

Используя разложение (2) и замечая, что $e^{i\lambda} q_{\overline{H}} = e^{i\lambda} P_{\overline{H},H} 1$, из (4) получаем

$$e^{i\lambda}(I - e^{i\lambda}P_{\overline{H}})^{-1} P_{\overline{H},H} 1 = \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \sum_{j=0}^{t-1} \nu_{l_1,\ldots,l_r,j}^{-1}(\lambda) (\psi_{l_1,\ldots,l_r,j}^{G_R})^{\overline{H}} \underset{G_R}{\otimes}$$

$$\underset{G_R}{\otimes} (\psi_{l_1,\ldots,l_r,j}^{G_R})^H \left[\sum_{l_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \sum_{j=0}^{t-1} \nu_{l_1,\ldots,l_r,j}^{-1}(\lambda) (\psi_{l_1,\ldots,l_r,j}^{G_R})^H \underset{G_R}{\otimes} (\psi_{l_1,\ldots,l_r,j}^{*G_R})^H \right]^{-1} 1,$$

откуда для функции $\varphi_H(\lambda)$ окончательно имеем

$$\varphi_H(\lambda) = \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{l_r=0}^{n_r-1} \sum_{j=0}^{t-1} \nu_{l_1,\ldots,l_r,j}^{-1}(\lambda) (\psi_{l_1,\ldots,l_r,j}^{*G_R})^H \left\{ \left[\sum_{s_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_r-1} \sum_{k=0}^{t-1} v_{s_1,\ldots,s_r,k}^{-1} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times (\lambda) (\psi_{s_1,\ldots,s_r,k}^{G_R})^H \underset{G_R}{\otimes} (\psi_{s_1,\ldots,s_r,k}^{*G_R})^H \right]^{-1} 1 \right\} (\psi_{l_1,\ldots,l_r,j}^{G_R})^{\overline{H}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $s(P)$ не содержится ни в каком смежном классе ни по какому нормальному делителю группы G_N, то*

$$\varphi_H(\lambda) = \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{l_s=0}^{n_s-1} \nu_{l_1,\ldots,l_s}^{-1}(\lambda) (\psi_{l_1,\ldots,l_s}^{*G_N})^H \left\{ \left[\sum_{q_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{q_s=0}^{n_s-1} \nu_{q_1,\ldots,q_s}^{-1}(\lambda) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times (\psi_{q_1,\ldots,q_s}^{G_N})^H \underset{G_N}{\otimes} (\psi_{q_1,\ldots,q_s}^{*G_N})^H \right]^{-1} 1 \right\} (\psi_{l_1,\ldots,l_s}^{G_N})^{\overline{H}}.$$

Следствие 2. *Если H состоит из одного элемента и $s(P) \subset G_N$, то*

$$\varphi_H(\lambda) = \left\{ N \left(\sum_{q_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{q_s=0}^{n_s-1} \nu_{q_1,\ldots,q_s}^{-1}(\lambda) \right)^{-1} \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{l_s=0}^{n_s-1} \nu_{l_1,\ldots,l_s}^{-1}(\lambda) \times \right.$$

$$\left. \times (\psi_{l_1,\ldots,l_s}^{*G_N})^H \right\} (\psi_{l_1,\ldots,l_s}^{G_N})^{\overline{H}}.$$

4. Пример. $G_6 = C_3 \leftthreetimes C_2$, $H = C_2$.

$$P = \begin{Vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ p_2 & p_0 & p_1 & p_4 & p_5 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_0 & p_5 & p_3 & p_4 \\ p_3 & p_4 & p_5 & p_0 & p_1 & p_2 \\ p_4 & p_5 & p_3 & p_2 & p_0 & p_1 \\ p_5 & p_3 & p_4 & p_1 & p_2 & p_0 \end{Vmatrix},$$

$$F_{G_6} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 & 1 & \omega_3 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3 & 1 & \omega_3^2 & \omega_3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3 & -1 & -\omega_3^2 & -\omega_3 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 & -1 & -\omega_3 & -\omega_3^2 \end{Vmatrix}, \quad \omega_3^3 = 1,$$

$$\mu_{00} = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5,$$

$$\mu_{01} = p_0 + \omega_3 p_1 + \omega_3^2 p_2 + p_3 + \omega_3^2 p_4 + \omega_3 p_5,$$

$$\mu_{02} = p_0 + \omega_3^2 p_1 + \omega_3 p_2 + p_3 + \omega_3 p_4 + \omega_3^2 p_5,$$

$$\mu_{10} = p_0 + p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5,$$

$$\mu_{11} = p_0 + \omega_3 p_1 + \omega_3^2 p_2 - p_3 - \omega_3^2 p_4 - \omega_3 p_5,$$

$$\mu_{12} = p_0 + \omega_3^2 p_1 + \omega_3 p_2 - p_3 - \omega_3 p_4 - \omega_3^2 p_5.$$

По формуле (3)

$$\varphi_H(\lambda) = \sum_{k=0}^{1} \sum_{l=0}^{2} \nu_{kl}^{-1}(\lambda) (\psi_{kl}^{*G_6})^H \left\{ \left[\sum_{r=0}^{1} \sum_{s=0}^{2} \nu_{rs}^{-1}(\lambda) (\psi_{rs}^{G_6})^H \underset{G_6}{\otimes} (\psi_{rs}^{*G_6})^H \right]^{-1} 1 \right\} (\psi_{kl}^{G_6})^{\bar{H}}.$$

Обозначим через C матрицу

$$\sum_{r=0}^{1} \sum_{s=0}^{2} \nu_{rs}^{-1}(\lambda) (\psi_{rs}^{G_6})^H \underset{G_6}{\otimes} (\psi_{rs}^{*G_6})^H.$$

Тогда имеем

$$C^{-1} 1 = \frac{12}{|C|} \begin{pmatrix} \nu_{10}^{-1}(\lambda) + \nu_{11}^{-1}(\lambda) + \nu_{12}^{-1}(\lambda) \\ \nu_{10}^{-1}(\lambda) + \nu_{11}^{-1}(\lambda) + \nu_{12}^{-1}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$|C| = 4 (\nu_{10}^{-1}(\lambda) + \nu_{11}^{-1}(\lambda) + \nu_{12}^{-1}(\lambda)) (\nu_{00}^{-1}(\lambda) + \nu_{01}^{-1}(\lambda) + \nu_{02}^{-1}(\lambda)),$$

$$\varphi_H(\lambda) = (\nu_{00}^{-1}(\lambda) + \nu_{01}^{-1}(\lambda) + \nu_{02}^{-1}(\lambda))^{-1} \begin{Vmatrix} \nu_{00}^{-1}(\lambda) + \nu_{01}^{-1}(\lambda)\,\omega_3 + \nu_{02}^{-1}(\lambda)\,\omega_3^2 \\ \nu_{00}^{-1}(\lambda) + \nu_{01}^{-1}(\lambda)\,\omega_3^2 + \nu_{02}^{-1}(\lambda)\,\omega_3 \\ \nu_{00}^{-1}(\lambda) + \nu_{01}^{-1}(\lambda)\,\omega_3^2 + \nu_{02}^{-1}(\lambda)\,\omega_3 \\ \nu_{00}^{-1}(\lambda) + \nu_{01}^{-1}(\lambda)\,\omega_3 + \nu_{02}^{-1}(\lambda)\,\omega_3^2 \end{Vmatrix}.$$

1. *Гренандер У.* Вероятности на алгебраических структурах.— М. : Мир, 1965.— 276 с.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : В 2-х Т.— М. : Мир, 1984.— Т. 2.— 752 с.
3. *Жданова Ю. Д.* Распределение момента достижения для случайного блуждания на конечной абелевой группе // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 56—60.
4. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
6. *Жданова Ю. Д.* Спектральное разложение для функции от матрицы, связанной с конечной разрешимой группой // Укр. мат. журн.— 1989.—41, № 9.— С. 1204—1207.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.—576 с.

Киев. пед. ин-т

Получено 29.06.87