УДК 513.881

В. В. Шевчик

Действие оператора с незамкнутой областью значений на ортонормированных базисах в гильбертовом пространстве

Напомним (см. [1, с. 69]), что базис $\{x_n\}$ банахового пространства X называется безусловным, если он остается базисом при любой перестановке его членов. Всякий квазинормированный безусловный базис $\{x_n\}$ (т. е. такой, что $0 < c_1 \leqslant \| x_n \| \leqslant c_2 < \infty$) гильбертового пространства H эквивалентен ортонормированному. Это означает, что существует изоморфизм T, действующий в H такой, что $x_n = Te_n$, где $\{e_n\}$ — ортонормированный базис пространства H. Последнее утверждение хорошо известный факт, по-видимому, впервые установленный Кете в 1936 г. (см. по этому поводу [2, с. 71]). К. И. Бабенко в 1948 г. показал, что в H существуют условные базисы. Именно, в [3] установлено, что система $\{y_n\} = \left\{\frac{t^\alpha e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{-\infty}^{\infty}$, $0 < |\alpha| < 1/2$, образует условный базис в $L_2[0, 2\pi]$. Система $\{y_n\}$ получается из системы $\{x_n\} = \left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ (являющейся ортонормированным базисом в $L_2[0,2\pi]$) в результате применения к ней оператора A с незамкнутой областью значений: $(Af)(t) = t^\alpha f(t)$.

Вопрос о построении квазинормированных условных базисов в гильбертовом пространстве с помощью применения к ортонормированным базисам оператора с незамкнутой областью значений изучался в работе [4]. Нас будет интересовать вопрос о существовании ортонормированного базиса $\{x_n\}$ в H, для которого последовательность $\{Ax_n\}$, полученная в результате применения к $\{x_n\}$ ограниченного линейного оператора с незамкнутой областью значений, будет базисом пространства H, обладающим теми или иными свойствами.

Заметим, что если $\{x_n\}$ — базис в H, то, как легко видеть, необходимыми условиями того, что последовательность $\{Ax_n\}$ — базис H, являются следующие условия: 1) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$; 2) $\overline{R(A)} = H$, где $R(A)$ — область значений A. Как показывают простейшие примеры (см. [5], где рассмотрена задача об умножении базисов в $L_p[0, 2\pi]$ на ограниченные функции), условия 1, 2 не являются достаточными для того, чтобы $\{Ax_n\}$ была базисом в H. Исключение представляет случай, когда $R(A) = H$ (т. е. A — изоморфизм), не представляющий интереса.

Итак, относительно оператора A мы будем предполагать дополнительно 3) $R(A) \neq H$. Заметим, что метод исследования, используемый нами, примыкает к методу работы [4] и основан на применении спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [6]).

Теорема 1. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям 1—3. В H существует ортонормированный базис $\{x_n\}$ такой, что $\{y_n = Ax_n\}$ будет безусловным базисом пространства H.*

Доказательство. Пусть $A = UR$ — полярное представление оператора A, где u в силу условий на A унитарный в H, $R = (A^*A)^{1/2}$ — положительный самосопряженный. Рассмотрим два случая: а) спектр R чисто точечный, б) спектр R непрерывный.

Если спектр R чисто точечный, то спектральная функция P_λ оператора R является функцией скачков. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — скачки P_λ — собственные значения оператора R. Если N_{λ_k} — собственное подпространство (возможно бесконечномерное), соответствующее λ_k, то через $\{e_i^k\}$ обозначим его ортонормированный базис. Очевидно, последовательность $\{x_h\} = \bigcup\limits_k \{e_i^k\}$ образует ортонормированный базис пространства H такой, что система $\{Ax_h\}$ является ортогональным базисом H. Для рассмотрения случая б) представим оператор R в виде

$$R = \int\limits_{0-0}^{1} \lambda dP_\lambda = \sum_1^\infty \int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} \lambda dP_\lambda.$$

(Не нарушая общности предполагаем, что $\|R\| = 1$). Положим $R_k = \int\limits_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \lambda dP_\lambda$, $\Delta_k P = P_{2^{-k+1}} - P_{2^{-k}}$, $N_k = \Delta_k P(H)$. Тогда $H = \sum\limits_1^\infty \oplus N_k$. Пусть $\{e_i^k\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис N_k. Так как оператор R_k обратим на N_k, то последовательность $\{z_i^k\} = \{R_k e_i^k\}$ является безусловным базисом в N_k. Легко видеть, что $2^{-k} \leqslant \|z_i^k\| \leqslant 2^{-k+1}$. Положим $\{x_k\} = \bigcup\limits_k \{e_i^k\}$, $\{y_k\} = \bigcup\limits_k \{z_i^k\}$. Покажем, что $\{y_k\}$ является безусловным базисом пространства H.

Определим на ортонормированном базисе $\{e_i^k\}$ подпространства N_k оператор $S_k e_i^k = 2^k R_k e_i^k$. Так как $1 \leqslant \|S_k e_i^k\| \leqslant 2$, то S_k переводит ортонормированный базис $\{e_i^k\}$ в квазинормированный безусловный базис. Следовательно, S_k продолжается до изоморфизма в N_k. При этом

$$\|S_k^{-1}\| \leqslant 1 \leqslant \|S_k\| \leqslant 2. \tag{1}$$

Рассмотрим в H оператор $Sx = \sum\limits_1^\infty \oplus S_k x_k$, где $x \in H$ и $x = \sum\limits_1^\infty \oplus x_k$, $x_k \in N_k$. Как следует из (1), $\|S^{-1}\| \leqslant 1 \leqslant \|S\| \leqslant 2$, т. е. S—изоморфизм в H. Следовательно, $\{y_k\} = \bigcup\limits_{k=1}^\infty \{S(2^{-k}e_i^k)\}_{i=1}^\infty$, как результат применения S к ортогональному базису $\bigcup\limits_k \{2^k e_i^k\}$, — безусловный базис в H.

Заметим наконец, что доказательство в общем случае легко получается как следствие двух рассмотренных. Действительно, представим H в виде $H = N \oplus M$, где N и M — подпространства, инвариантные относительно A, такие, что спектр A на N чисто точечный, а на M непрерывный [6, с. 385]. Ортонормированный базис $\{x_n\}$, обладающий нужными свойствами, получим как объединение соответствующих базисов в N и M. Теорема доказана.

Оказывается, в общем случае замена в утверждении теоремы 1 «безусловный» базис на «ортогональный» невозможна. Непосредственно из определений следует такое утверждение.

П р е д л о ж е н и е. *Если оператор A удовлетворяет условиям* 1—3, *то в H существует ортонормированный базис $\{x_n\}$ такой, что $\{y_n = Ax_n\}$ — ортогональный базис тогда и только тогда, когда спектр оператора A^*A чисто точечный.*

Заметим, что если $\{y_n\}$ — безусловный базис в H, то $\inf_n \|y_n\| = 0$. В самом деле, так как в гильбертовом пространстве любой безусловный квазинормированный базис эквивалентен ортонормированному, то $\inf_n \|y_n\| > 0$ означало бы, что A — изоморфизм. Отказавшись от требования, что $\{y_n\}$ — безусловный базис в H, естественно поставить вопрос о существовании такого ортонормированного базиса $\{x_n\}$, для которого последовательность $\{y_n\}$ отграничена от нуля (т. е. $\inf_n \|y_n\| > 0$). В соответствии с определением в случае банахова пространства полная минимальная последовательность $\{e_n\}$ в H называется M-базисом, если последовательность $\{f_n\}$, биортогональная к $\{e_n\}$, полная в H [7, с. 219].

Т е о р е м а 2. *Если оператор A удовлетворяет условиям* 1—3, *то в H существует ортонормированный базис $\{x_n\}$ такой, что $\{y_n\}$ — M-базис, обладающий свойством $\inf_n \|y_n\| > 0$, тогда и только тогда, когда оператор A некомпактный.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A = UR$ — полярное представление оператора A и $R = \int_{0-0}^{1} \lambda dP_\lambda$. Рассмотрим случай, когда спектр оператора R чисто точечный. Так как оператор A некомпактный, то найдется собственное значение μ оператора R бесконечной кратности. Тогда проектор $P_\mu - P_{\mu-0}$ бесконечномерный.

Рассмотрим две возможности: а) μ — изолированная точка спектра R; б) μ таковой не является.

Если имеет место случай а), то положим $H = N \oplus M$, где $N = [e_k]$ — собственное подпространство оператора R, соответствующее μ и $\{e_k\}$ — его ортонормированный базис. Обозначим через $\{v_k\}$ ортонормированный базис подпространства M, состоящий из собственных векторов оператора R на M и положим $\{x_n\} = \left\{\frac{e_n - v_n}{2}\right\} \cup \left\{\frac{e_n + v_n}{2}\right\}$. Покажем, что $\{x_n\}$ — ортонормированный базис пространства H такой, что $\{Ax_n\} = \{y_n\}$ — M-базис H. То, что $(x_n, x_k) = \delta_{nk}$, очевидно. Для проверки полноты $\{x_n\}$ предположим, что φ_0 — ненулевой элемент пространства H — такой, что $(x_n, \varphi_0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $(e_n, \varphi_0) - (v_n, \varphi_0) = 0$, $(e_n, \varphi_0) + (v_n, \varphi_0) = 0$. Таким образом, $(e_n, \varphi_0) = (v_n, \varphi_0) = 0$, а так как система $\{e_n\} \cup \{v_n\}$ полна в H, то $\varphi_0 = 0$.

Обозначим через λ_n собственное значение, соответствующее v_n. Тогда

$$\{Ax_n\} = \left\{\frac{\mu e_n - \lambda_n v_n}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\mu e_n + \lambda_n v_n}{2}\right\}.$$

Положим $\{\varphi_n\} = \left\{\frac{v_n}{\lambda_n}\right\}$, $\{\psi_n\} = \left\{\frac{e_n}{\mu}\right\}$. Очевидно, что последовательность функционалов $\{f_n\} = \{2(\varphi_n + \psi_n)\} \cup \{2(\varphi_n - \psi_n)\}$ является биортогональной к $\{Ax_n\}$. Кроме того, если $(f_n, x_0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то отсюда следует, что $(\varphi_n, x_0) + (\psi_n, x_0) = 0$, $(\varphi_n, x_0) - (\psi_n, x_0) = 0$. Таким образом, $(v_n, x_0) = 0$ и $(e_n, x_0) = 0$, а это означает, что $x_0 = 0$. Свойство отграниченности последовательности от нуля следует из того, что $\|Ax_n\| \geqslant \frac{1}{2} \inf_n |\mu - \lambda_n| > 0$. Переходя к рассмотрению случая б) и считая, что $\mu = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$ для тех λ_n, для которых $\lambda_n < \mu$, представляем H в виде ортогональной суммы трех бесконечномерных инвариантных относительно R подпространств: $H = N \oplus M \oplus L$, где

$$N=\sum_{0\leqslant\lambda\leqslant\mu-\varepsilon_0}\Delta P_\lambda H,\quad M=\sum_{\mu-\varepsilon_0<\lambda<\mu}\Delta P_\lambda H,\quad L=\sum_{\mu\leqslant\lambda\leqslant 1}\Delta P_\lambda,\quad 0<\varepsilon_0<\mu.$$

Пусть $\{e_n\}$, $\{v_n\}$ и $\{u_n\}$ — ортонормированные базисы подпространств N, M и L соответственно, составленные из собственных векторов оператора A на этих подпространствах. Предположим $Ae_n=\lambda_n e_n$, $Av_n=\lambda_n^1 v_n$, $Au_n=\lambda_n^2 u_n$. При этом $\lambda_n\leqslant\mu-\varepsilon_0$, $\mu-\varepsilon_0<\lambda_n^1<\mu$, $\mu\leqslant\lambda_n^2\leqslant\leqslant 1$. Пусть $\{x_n\}=\left\{\frac{e_n-u_n}{2}\right\}\cup\left\{\frac{e_n+u_n}{2}\right\}\cup\{v_n\}$ — ортонормированный базис пространства H. Тогда $\|Av_n\|\geqslant\mu-\varepsilon_0$ и $\left\|A\left(\frac{e_n\pm u_n}{2}\right)\right\|\geqslant\frac{1}{2}\times\times|\|Ae_n\|-\|Au_n\||\geqslant\frac{1}{2}\inf_n|\lambda_n-\lambda_n^2|\geqslant\varepsilon_0$. Проверка того, что $\{Ax_n\}$ — M-базис пространства H, аналогична проверке в случае, когда μ — изолированная особая точка.

Перейдем к рассмотрению случая, когда спектр R чисто непрерывный. (Доказательство в общем случае получим наложением двух рассмотренных.) Пусть $\lambda_1,\lambda_2\,(\lambda_1<\lambda_2)$ такие, что каждое из подпространств $N=P_{\lambda_1}H$, $M=(R_{\lambda_2}-P_{\lambda_1})H$, $L=(I-P_{\lambda_2})H$ бесконечномерное. (Такие λ_1, λ_2 существуют в силу некомпактности R.) Каждое из подпространств N, M, L инвариантно относительно R. При этом A необратим на N и $Ax=\int\limits_0^{\lambda_1}\lambda dP_\lambda x$, $x\in N$. В силу теоремы 1 существует ортонормированный базис $\{e_n\}$ подпространства N такой, что $\{Ae_n\}$ — безусловный базис N. Очевидно, что $\|Ae_n\|\leqslant\lambda_1$. Обозначим, далее, через $\{v_n\}$ и $\{u_n\}$ ортонормированные базисы подпространств M и L соответственно. Ясно, что A обратим как на M, так и на L, и при этом $\{Av_n\}$ и $\{Au_n\}$ — безусловные базисы M и L такие, что $\lambda_1\leqslant\|Av_n\|\leqslant\lambda_2$, $\lambda_2,\leqslant\|Au_n\|\leqslant 1$. Пусть $\{x_n\}=\left\{\frac{u_n-e_n}{2}\right\}\cup\left\{\frac{u_n+e_n}{2}\right\}\cup\{v_n\}$—ортонормированный базис пространства H. Так как $\left\|A\left(\frac{u_n\pm e_n}{2}\right\|\geqslant\frac{1}{2}|\|Au_n\|-\|Ae_n\||\geqslant|\lambda_2-\lambda_1|\right.$, то $\{Ax_n\}$ — последовательность, отграниченная от нуля. То, что $\{Ax_n\}$ — M-базис пространства H, проверяется так же, как в п. а), в случае когда спектр R чисто точечный. Заметим, что в качестве последовательностей $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ следует рассматривать последовательности, биортогональные к $\{Ae_n\}$ и $\{Au_n\}$ соответственно такие, что $\varphi_n\perp(M\oplus L)$, $\psi_n\perp(N\oplus L)$, и ввести дополнительно последовательность $\{g_n\}$, биортогональную к $\{Av_n\}$, обладающую свойством $g_n\perp(N\oplus M)$. Тогда последовательность $\{f_n\}=\{2(\varphi_n+\psi_n)\}\cup\{2(\varphi_n-\psi_n)\}\cup\{g_n\}$ биортогональна к $\{x_n\}$ и такая, что, если $f_n(x_0)=0$, $n=1,2,\ldots$, то $x_0=0$. Таким образом, $\{y_n\}$ — M-базис пространства H. Обратное утверждение следует из того факта, что если A компактный, то для любого ортонормированного базиса $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|Ax_n\|=0$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $H=L_2[0,2\pi]$, I — оператор интегрирования: $(Tf)(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$. T, как известно, компактный в H и точка 0 является единственной точкой спектра T. В соответствии с предложением 2 в $L_2[0,2\pi]$ существует ортонормированный базис $\{x_n\}$, состоящий из собственных функций оператора T^*T, такой, что $\{Tx_n\}$ — ортонормированный базис $L_2[0,2\pi]$. Так как $(T^*f)(t)=\int\limits_t^{2\pi}f(\tau)\,d\tau$, то после изменения порядка интегрирования получим

$$(T^*T\varphi)(t)=\int\limits_t^{2\pi}(2\pi-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau+(2\pi-t)\int\limits_0^t\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $x_n(t)$ находятся как решение интегрального уравнения

$$\int_t^{2\pi} (2\pi - \tau)\, x(\tau)\, d\tau - (2\pi - t) \int_0^t x(\tau)\, d\tau = \lambda x(t),$$

которое дифференцированием сводится к решению простейшей краевой задачи: $x''(t) + \mu^2 x(t) = 0$, $x'(0) = x(2\pi) = 0$, $\mu = 1/\sqrt{\lambda}$. n-е нормированное решение этой краевой задачи $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right) t$ соответствует собственному значению $\lambda_n = \frac{4}{(1+2n)^2}$. Ясно, что $\{x_n\}$ — единственный ортонормированный базис пространства $L_2[0, 2\pi]$, который при интегрировании преобразуется в ортогональный базис.

З а м е ч а н и е. При применении оператора T к любому из «классических» ортонормированных базисов в $L_2[0, 2\pi]$: тригонометрическому базису, базису Хаара, базису Уолша получим последовательность, которая даже не минимальна в $L_2[0, 2\pi]$ [8]. (О понятии минимальной последовательности см. [1, с. 65].) В [8] даны условия на $\{x_n(t)\}$, при выполнении которых $\{(Tx_n)(t)\}$ минимальна в $L_2[0, 2\pi]$.

1. *Функциональный* анализ: Справочник / Под ред. С. Г. Крейна.— М. : Наука, 1972.
2. *Lindenstraus J.*, *Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I.— Berlin etc. : Springer, 1977.— 188 p.
3. *Бабенко К. И.* О сопряженных функциях // Докл. АН СССР. — 1948. — **62, № 2.** — С. 157—160.
4. *Олевский А. М.* Об операторах, производящих условные базисы в гильбертовом пространстве // Мат. заметки.— 1972.— **12**.— С. 73—84.
5. *Гапошкин В. Ф.* Одно обобщение теоремы Рисса о сопряженных функциях // Мат. сб.— 1958.— **46**.— С. 359—372.
6. *Рисс Ф.*, *Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М. : Мир, 1979.— 587 с.
7. *Singer I.* Bases in Banach spaces. II. — Berlin etc. : Springer, 1981.— 880 p.
8. *Шевчик В. В.* Действие оператора вложения на минимальных последовательностях в банаховом пространстве // Докл. АН СССР.— 1987.— **294**, № 5.— С. 1072—1076.

Запорож. ун-т

Получено 01.09.87