УДК 517.9

Г. А. Дерфель

Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений

Дифференциально-функциональные и функциональные уравнения с линейно преобразованным аргументом представляют значительный интерес в самых разнообразных приложениях (например, в астрофизике [1], теории страхования и теории полумарковских процессов умножения со сносом [2, 3], теории вероятностей на алгебраических структурах [4], теории приближений [5, 6]). Авторы работ [1, 2, 5, 6] независимо друг от друга, используя различные методы, исследовали, в частности, вопрос о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом.

В настоящей статье предложен один общий подход, позволяющий охватить большинство известных результатов в этом направлении, а также получить ряд новых. Основной для дальнейшего является теорема 1 об ограниченных решениях интегрального уравнения (1). Выбирая в теореме 1 меру $F(\lambda, \mu)$ тем или иным специальным образом, можно исследовать поведение целого ряда функциональных и дифференциально-функциональных уравнений. Так, полагая меру $F(\lambda, \mu)$ атомарной, приходим к некоторым результатам для функциональных уравнений (ср. с [7]); если $F(\lambda, \mu)$ — смесь сверток показательных распределений, получаем критерий существования ограниченных решений для дифференциально-функциональных уравнений со «сжатиями» и «растяжениями» аргумента. Наконец, в случае, когда $F(\lambda, \mu)$ конструируется при помощи сверток равномерных распределений, теорема 1 приводит к признакам существования финитных решений (ср. с [6]).

1. Пусть в верхней полуплоскости $R_+^2 = \{(\eta, \xi) \mid -\infty < \eta < \infty,\ 0 < \xi < \infty\}$ задана нормированная (вероятностная) мера P, а $F(\lambda, \mu) = F_{\eta, \xi}(\lambda, \mu) = P(\eta < \lambda, \xi < \mu)$ — соответствующая функция распределения. Предположим, что

1) $\forall c \in R \ \ P\{\eta + c\xi = c\} \neq 1$ (т. е. на биссектрисе первого координатного угла плоскости (x, y) не существует точки, в которой с вероятностью 1 пересекаются все прямые $y = \xi x + \eta$);

2) $\iint\limits_{R_+^2} |\lambda| F(d\lambda, d\mu) < \infty$.

Обозначим

$$I = \iint\limits_{R_+^2} \ln \mu F(d\lambda, d\mu)$$

и рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = \iint\limits_{\substack{-\infty<\lambda<\infty \\ 0<\mu<\infty}} y\left(\frac{t-\lambda}{\mu}\right) F(d\lambda, d\mu). \tag{1}$$

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет непрерывное ограниченное на всей оси, отличное от константы решение, если $I < 0$, и не имеет таких решений, если $I > 0$. В случае $I < 0$ существует непрерывное ограниченное решение, которое является функцией распределения некоторой случайной величины ψ, т. е. $y(t) = P(\psi < t)$.*

Теорема 1 доказана в п. 5. Здесь отметим некоторые ее следствия.

Пусть мера P сосредоточена на прямых $\xi_j = \alpha_j^{-1}$ и $P(\eta < \lambda, \xi = \alpha_j^{-1}) = q_j F_j(\lambda)$, где $q_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=0}^{l} q_j = 1$, F_j — функция распределения некоторой случайной величины η_j. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$y(t) = \sum_{j=0}^{l} q_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(\alpha_j(t-\lambda))\, dF_j(\lambda) = \sum_{j=0}^{l} q_j y(\alpha_j t) \# F_j(t), \tag{2}$$

а величину I — в виде $I = \sum\limits_{j=0}^{l} q_j \ln \alpha_j^{-1} = -\sum\limits_{j=0}^{l} q_j \ln \alpha_j$ (значком $\#$ обозначена свертка Стильтьеса).

Таким образом, из теоремы 1 непосредственно следует такое утверждение.

Теорема 2. *Уравнение* (2) *имеет непрерывное ограниченное отличное от константы решение, если $K = \sum\limits_{j=0}^{l} q_j \ln \alpha_j > 0$ и не имеет таких решений, если $K < 0$.*

Анализ доказательства теоремы 1 приводит к такому следствию.

Следствие 1. *Если в уравнении* (2) *все $\alpha_j > 1$, а F_j — функции распределения случайных величин η с конечными носителями, то существу-*

ет нетривальное решение $y(t)$ уравнение (2), *которое является функцией распределения некоторой случайной величины* ψ, *сосредоточенной на конечном интервале. В частности, функция $y'(t)$ (если она существует) является финитной.*

2. Как отмечалось выше, в случае атомарной меры теорема 1 приводит к критерию существования ограниченных решений функциональных уравнений. Пусть

$$P(\xi = \alpha_j^{-1}, \quad \eta = -\beta_j/\alpha_j) = q_j, \quad q_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=0}^{l} q_j = 1, \quad j = 0, \dots, l.$$

В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$y(t) = \sum_{j=0}^{l} q_j y\left(\frac{t+\beta_j/\alpha_j}{1/\alpha_j}\right) = \sum_{j=0}^{l} q_j y(\alpha_j t + \beta_j). \tag{3}$$

Поэтому из теоремы 2 вытекает такая теорема.

Теорема 3. *Уравнение* (3) *имеет непрерывное ограниченное, отличное от константы решение, если $K = \sum_{j=0}^{l} q_j \ln \alpha_j > 0$, и не имеет таких решений, если $K < 0$.*

Замечание 1. Частный случай теоремы 3, относящийся к уравнению $y(t) = q_1 y(q_1 t - 1) + q_2 y(q_2 t + 1)$, установлен в [7].

3. Признаки существования и отсутствия ограниченных решений дифференциально-функциональных уравнений со «сжатиями» и «растяжениями» аргумента можно получить из теоремы 2, если в уравнении (2) в качестве F_j взять свертки показательных распределений. Рассмотрим уравнение

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = \sum_{j=0}^{l} q_j P_j \left(\frac{d}{dt}\right) y(\alpha_j t), \quad 0 < t < \infty, \tag{4}$$

где $P(s)$ и $P_j(s)$ — полиномы, корни которых отрицательны, свободный член равен 1, $P(s)$ делится на $P_j(s)$ для всех j, $\deg P = m$. К уравнению (4) присоединим начальные условия

$$y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{5}$$

Ограничимся далее рассмотрением тех решений задачи (4), (5), все производные которых, входящие в уравнение (4), растут не быстрее, чем экспоненциальным образом.

Теорема 4. *Задача Коши* (4), (5) *имеет ограниченное отличное от константы решение, если $K = \sum_{j=0}^{l} q_j \ln \alpha_j > 0$, и не имеет таких решений, если $K < 0$.*

Доказательство теоремы 4 будет приведено в п. 6.

Замечание 2. Уравнения вида (4) первого порядка $y'(t) + y(t) = \sum_{j=0}^{l} q_j y(\alpha_j t)$ возникают в теории страхования и в теории марковских процессов умножения со сносом [2, 3].

Для таких уравнений существование нетривиального ограниченного решения при выполнении условия $K > 0$ может быть получено как следствие результатов [3]. Отсутствие нетривиальных ограниченных решений при выполнении условия $K < 0$ установлено в [8].

Замечание 3. Из теоремы 4 и теоремы 3 работы [9] следует, что существует нетривиальное решение задачи (4), (5), которое удовлетворяет в некоторой окрестности нуля оценке $|y(t)| \leqslant C \exp\{-\gamma \ln^2 t\}$ с $C > 0$ и любым $\gamma < 1/(2 \ln A)$, где $A = \max \alpha_j$.

4. Пусть теперь в уравнении (2) F_i — функции распределения случайных величин η_j, равномерно распределенных в промежутках $[-a_j, a_j]$, где $a_j = \beta_j/\alpha_j$. Тогда из следствия 1 вытекает такой результат о существовании финитных решений.

Теорема 5. *Уравнение*

$$z'(t) = \sum_{j=0}^{l} q_j \frac{\alpha_j^2}{2\beta_j} [z(\alpha_j t + \beta_j) - z(\alpha_j t - \beta_j)], \tag{6}$$

где $\alpha_j > 1$ *имеет нетривиальное финитное решение, сосредоточенное на интервале* $[-B/(\alpha - 1), B/(\alpha - 1)]$. *Здесь* $\alpha = \min \alpha_j$, $B = \max |\beta_j|$.

Доказательство. Согласно следствию 1 уравнение

$$y(t) = \sum_{j=0}^{l} (q_j/2a_j) \int_{-a_j}^{a_j} y(\alpha_j(t - \lambda))\, d\lambda = \sum_{j=0}^{l} (q_j/2a_j) \int_{t-a_j}^{t+a_j} y(\alpha_j s)\, ds \tag{7}$$

имеет решение с финитной производной. Обозначая $y'(t)$ через $z(t)$ и дифференцируя (7), получаем (6). Несложно проверить, что $\operatorname{supp} z(t) \subset \subset \left[-\frac{B}{\alpha - 1}, \frac{B}{\alpha - 1}\right]$.

Возможность появления финитных решений для уравнений с линейно преобразованным аргументом была впервые отмечена в работах В. Л. Рвачева и В. А. Рвачева [5, 6]; ими же были введены специальные финитные решения таких уравнений: $\mathrm{up}(t)$, $\mathrm{Fup}_n(t)$, $\Xi(t)$ и др.

Замечание 4. Полагая в уравнении (6) $l = 0$, $q_0 = 1$, $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 1$, получаем уравнение $y'(t) = 2y(2t + 1) - 2y(2t - 1)$, определяющее up-функцию В. Л Рвачева и В. А. Рвачева.

Замечание 5. Полагая в (6)

$$\alpha_j = 2, \quad q_j = \frac{n + 2 - 2j}{2^{n+1}} (C_{n+1}^j - C_{n+1}^{j-1}), \qquad \beta_j = \frac{n + 2 - 2j}{2^{n+1}},$$

$$j = 0, \ldots, \left[\frac{n + 1}{2}\right]$$

$\left(\text{легко проверить, что } q_j \geqslant 0, \ \sum_{j=0}^{(n+1)/2} q_j = 1\right)$, имеем

$$y'(t) = 2 \sum_{j=0}^{[(n+1)/2]} (C_{n+1}^j - C_{n+1}^{j-1}) \left[y\left(2t + \frac{n + 2 - 2j}{2^{n+1}}\right) - \right.$$

$$\left. - y\left(2t - \frac{n + 2 - 2j}{2^{n+1}}\right)\right] = 2 \sum_{j=0}^{n+2} (C_{n+1}^j - C_{n+1}^{j-1})\, y\left(2t + \frac{n + 2 - 2j}{2^{n+1}}\right)$$

для Fup_n-функции В. Л. Рвачева и В. А. Рвачева.

Замечание 6. Пусть в уравнении (2) $l = 0$, $q_0 = 1$, $\alpha = n + 1$, $n \equiv 1 \pmod 4$ $F_0(t) = \underbrace{h * \ldots * h}_{n \text{ раз}}(t)$, где h — функция распределения случайной величины, равномерно распределенной на $\left[-\frac{1}{n + 1}, \frac{1}{n + 1}\right]$.

Согласно следствию 1 такое уравнение имеет решение $y(t)$ с финитной производной $y'(t) = z(t)$. Нетрудно проверить, что $z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$z^{(n)}(t) = (n + 1)^{n+1} \cdot 2^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k z((n + 1)t - 2k)$$

для Ξ-функции В. Л. Рвачева и В. А. Рвачева.

5. Доказательство теоремы 1. а). Пусть выполнено условие $I < 0$. Рассмотрим ряд

$$\eta_1 + \eta_2\xi_1 + \eta_3\xi_1\xi_2 + \ldots + \eta_n\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n-1} + \ldots, \tag{8}$$

где $(\eta_i\xi_i)$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы с функцией распределения $F_{\eta,\xi}(\lambda, \mu)$. Воспользуемся результатами работы [4]: во-первых, из условий $I < 0$ и 2 следует, что ряд (8) сходится с вероятностью 1 к некоторой случайной величине ψ; во-вторых, из условия 1 следует, что ψ имеет непрерывное распределение $y(t) = P(\psi < t)$.

Заметим еще, что ψ обладает следующим свойством автомодельности

$$\psi = \eta_1 + \xi_1(\eta_2 + \eta_3\xi_2 + \ldots + \eta_n\xi_2\ldots\xi_{n-1} + \ldots) = \eta_1 + \xi_1\psi_1, \tag{9}$$

где ψ_1 имеет то же распределение, что и ψ. Из (9) вытекает (1).

б). Пусть теперь $I > 0$. Итерируя уравнение (1), получаем

$$y(t) = \iint\limits_{\substack{-\infty<\lambda_n<\infty\\ 0<\mu_n<\infty}} \ldots \iint\limits_{\substack{-\infty<\lambda_1<\infty\\ 0<\mu_1<\infty}} y\left[(\mu_1\ldots\mu_n)^{-1}t + \lambda_1\mu_1^{-1} + \ldots + \lambda_n(\mu_1\ldots\mu_n)^{-1}\right] \times$$
$$\times F(d\lambda_1, d\mu_1)\ldots F(d\lambda_n, d\mu_n),$$

т. е. $y(t)$ равно математическому ожиданию случайной величины $y(\rho_n t + \varphi_n)$:

$$y(t) = My(\rho_n t + \varphi_n), \tag{10}$$

где $\rho_n = (\zeta_1\ldots\zeta_n)^{-1}$, $\varphi_n = \theta_1\zeta_1^{-1} + \ldots + \theta_n(\zeta_1\ldots\zeta_n)^{-1}$, (θ_i, ζ_i) — независимые одинаково распределенные случайные векторы с функцией распределения $F_{\theta,\zeta}(\lambda, \mu) = F(\lambda, \mu)$. Используя еще раз результаты [4], находим

$$\rho_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0; \qquad \varphi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \varphi; \qquad \rho_n t + \varphi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \varphi, \text{ где } \varphi = \sum_{k=1}^{\infty}\theta_k(\zeta_1\ldots\zeta_k)^{-1} < \infty \text{ (п.н.)}$$

Значит, для любой непрерывной ограниченной функции $y(t)$ $\lim\limits_{n\to\infty} My(\rho_n t + \varphi_n) = My(\varphi)$ (см., например, [10]) и, следовательно, устремляя в (10) n к бесконечности, получаем $y(t) = My(\varphi) = \mathrm{const}$, что и требовалось доказать.

6. Доказательство теоремы 4. а). Пусть выполняется условие $K < 0$, $y(t)$ — решение задачи Коши (4), (5), $f(p)$ — преобразование Лапласа функции $y(t)$. Тогда

$$f(p) = \sum_{j=0}^{l}\alpha_j^{-1}q_j(P_j(p)/P(p))\,f\left(\frac{p}{\alpha_j}\right) = \sum_{j=0}^{l}\alpha_j^{-1}q_jR_j^{-1}f\left(\frac{p}{\alpha_j}\right), \tag{11}$$

где $R_j(s) = P(s)/P_j(s)$ — полиномы вида $R_j(s) = \prod\limits_{k=1}^{m_j}\left(1 + \dfrac{s}{a_{jk}}\right)$, $a_{jk} > 0$.

Но $1/R_j$ — это преобразование Лапласа функции плотности вероятности $G_j(x) = g_{j1} * g_{j2} * \ldots * g_{jm_j}$, где

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad g_{jk} = a_{jk}g(a_{jk}x). \tag{12}$$

Используя этот факт и теорему о свертке, из [11] получаем

$$y(t) = \sum_{j=0}^{l} q_j y(\alpha_j t) * G_j(t). \tag{13}$$

Из теоремы 2 вытекает $y(t) \equiv 0$.

б). Если $K > 0$, то согласно теореме 2 уравнение (13) имеет непрерывное ограниченное отличное от константы решение. Применяя к обеим частям уравнения (13) оператор $P(D)=P_j(D)R_j(D)$ (здесь $D\equiv d/dt$), по теореме об обращении свертки [11] получаем

$$P(D)\,y(t)=\sum_{j=0}^{l} q_jP_j(D)\,[R_j(D)\,(G_j(t)*y(\alpha_jt))]=\sum_{j=0}^{l} q_jP_j(D)\,y(\alpha_jt),$$

т. е. $y(t)$ удовлетворяет (4).

Из п. а) доказательства теоремы 1 и формул (12) следует, что $y(t)\equiv 0$ при $t<0$, кроме того $y(t)\in C^{\infty}(-\infty,\infty)$. Значит, $y^{(k)}(0)=0$ при всех $k=0,1,\ldots$, т. е. выполнены условия (5).

1. *Амбарцумян В. А.* О флуктуациях яркости Млечного пути // Докл. АН СССР.—1944. — **44**.— С. 223—226.
2. *Gaver D. P. Jr.* An absorption probability problem // J. Math. Anal. and Appl.— 1964.— **9**, N 3.— P. 384—393.
3. *Лев Г. Ш.* Полумарковские процессы умножения со сносом // Теория вероятностей и ее применения.— 1972.— **17**, № 1.— С. 160—166.
4. *Гринцевичус А. К.* О непрерывности распределения одной суммы зависимых величин, связанных с независимыми блужданиями по прямым // Там же.— 1974.— **19**, № 1.— С. 163—168.
5. *Рвачов В. Л., Рвачов В. О.* Про одну фінітну функцію // Допов. АН УРСР.— 1971.— № 8.— С. 705—707.
6. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах.— Киев : Наук. думка, 1979.— 193 с.
7. *Steinmetz N., Volkman.* Funktionalgleichungen für Konstante Funktionen // Aequat. math.— 1984.— **27**, № 1-2.— P. 87—96.
8. *Дерфель Г. А.* Критерий существования ограниченных решений одного дифференциально-функционального уравнения, возникающего в теории вероятностей // Дифференциально-функциональные уравнения и их прил.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 25—31.
9. *Дерфель Г. А.* Об асимптотических свойствах решений некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений // Докл. сем. Ин-та прикл. математики Тбил. ун-та.— 1978.— **12-13**.— С. 21—23.
10. *Боровков А. А.* Теория вероятностей.— М. : Наука, 1967.— 352 с.
11. *Хиршман И. И., Уиддер Д. В.* Преобразования типа свертки.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.— 312 с.

Караганд. ун-т

Получено 04.06.87