УДК 513.88

В. А. Штраус

О структуре семейства коммутирующих J-самосопряженных операторов

1. В настоящей статье рассматриваются ограниченные линейные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом J-пространстве $\mathfrak{H}$. Соответствующую терминологию, в частности, понятия J-самосопряженного (J-с. с.) оператора, J-спектральной функции и библиографию см. в [1]. Всюду ниже $\mathfrak{D}$ — коммутативное семейство J-с. с. операторов с общим максимальным неотрицательным инвариантным подпространством, распадающимся в прямую сумму равномерно положительного и конечномерного нейтрального подпространств (подпространство типа $\mathfrak{M}^+ \cap h^+$ в смысле [1]). Невещественный спектр операторов из $\mathfrak{D}$ состоит из конечного числа собственных значений конечной кратности ([1], следствие III. 5.21, упр. III.5.14 и III.5.15) и более того, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_r [+] \mathfrak{H}_c$, где $\mathfrak{H}_r$ и $\mathfrak{H}_c$ инвариантны относительно $\mathfrak{D}$ и спектр $\sigma(A|_{\mathfrak{H}_r}) \subset \mathbb{R}$ для любого $A \in \mathfrak{D}$, а $\mathfrak{H}_c$ конечномерно.

Теорема 1. *Пусть $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ для любого $A \in \mathfrak{D}$. Тогда найдется такая J-спекральная функция E_λ с конечным множеством критических точек Λ и носителем $\sigma(E_\lambda) \subset (-1; 1)$, что*

а) $AE_\lambda = E_\lambda A$ для любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$ и $A \in \mathfrak{D}$;

б) если $\Delta = [a; b]$, $\Delta \cap \Lambda = \varnothing$ и $E(\Delta)\mathfrak{H} \neq \{0\}$, то $A|_{E(\Delta)\mathfrak{H}}$ является скалярным спектральным оператором [2] *и найдется такая определенная на Δ E-измеримая функция $\varphi(\lambda)$, что $AE(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda$;*

в) *если $\lambda \in \Lambda$ и $\mathfrak{L}_\lambda = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} E([\lambda - \varepsilon; \lambda + \varepsilon])\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{L}_\lambda$ является для любого $A \in \mathfrak{D}$ корневым подпространством, распадающимся в прямую сумму проекционно полного и конечномерного нейтрального подпространств.*

Доказательство теоремы 1 основывается на существовании собственной J-спектральной функции у произвольного оператора $A \in \mathfrak{D}$ ([1], упр. IV.1.1) и стандартной схеме доказательства теоремы о порождающем операторе для коммутативного семейства самосопряженных операторов (см., например, [3], п. 90).

2. Исследуем вопрос о модельном представлении связанной с $\mathfrak{D}$ J-спектральной функции E_λ, свойства которой описаны в теореме 1. Не умаляя общности, можно считать, что E_λ имеет единственную критическую точку $\mu = 0$ и E_λ не является ограниченной. Указанные условия предполагаются выполненными без дополнительных оговорок.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{H}}$ замыкание линейной оболочки всех подпространств вида $E_{-\lambda}\mathfrak{H}$ и $(I - E_\lambda)\mathfrak{H}$, где $\lambda > 0$, $\mathfrak{H}_0 = \tilde{\mathfrak{H}} \cap \tilde{\mathfrak{H}}^{[\perp]}$, $\mathfrak{H}_1 = \tilde{\mathfrak{H}}_1 \ominus \mathfrak{H}_0$. В силу условия в) $\mathfrak{H}_1$ — проекционно полное подпространство. Пусть P_1 — J-с. с. проектор на $\mathfrak{H}_1$. Тогда оператор-функция $E_\lambda^{(1)} = P_1 E_\lambda|_{\mathfrak{H}_1}$, доопределенная по сильной непрерывности в нуле, подобна действующей в $\mathfrak{H}_1$ ортогональной (в гильбертовом смысле) спектральной мере. В силу этого найдется такое гильбертово пространство определенных на $(-1; 1)$ комплекснозначных вектор-функций $L_\sigma^2 = \oplus \sum\limits_{k=1}^{N} L_{\sigma_k}^2(-1; 1)$, где N — некоторое натуральное число или $+\infty$, что оператор-функция $E_\lambda^{(1)}$ подобна действующей в L_σ^2 оператор-функции умножения на $\chi_\lambda(t)$ — характеристическую функцию множества $(-1; \lambda)$. Обозначим через H гильбертово N-мерное пространство, в котором принимают значения элементы из L_σ^2. Заметим, что с точки зрения изучения особенностей J-спектральной функции E_λ можно было бы ограничиться случаем, когда H конечномерно [4].

Пусть $\tilde{x}(t)$ — заданная почти всюду на $(-1; 1)$ и измеримая по отношению к $\sigma(t)$ вектор-функция со значениями в H. Если при любом $\lambda > 0$

имеем $\chi_{-\lambda}(t)\tilde{x}(t)\in L^2_\sigma$, $(1-\chi_\lambda(t))\tilde{x}(t)\in L^2_\sigma$, но $\tilde{x}(t)\notin L^2_\sigma$, то назовем $\tilde{x}(t)$ (согласованным с $\chi_\lambda(t)$) неограниченным элементом [4] из L^2_σ. Теперь пусть $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)$ — неограниченные элементы из L^2_σ, любая нетривиальная линейная комбинация которых не принадлежит L^2_σ. Обозначим через $\tilde{L}^2_\sigma$ гильбертово функциональное пространство, полученное присоединением к L^2_σ этих неограниченных элементов, которые по определению полагаются нормированными, попарно ортогональными и ортогональными к L^2_σ.

Теорема 2. *Существует такое пространство $\tilde{L}^2_\sigma$, что $E_\lambda|\tilde{\mathfrak{H}}$ и $E^{(1)}_\lambda$ подобны действующей соответственно в $\tilde{L}^2_\sigma$ и L^2_σ оператор-функции, сопряженной (в гильбертовом смысле) к оператор-функции умножения на $\chi_\lambda(t)$, причем оператор подобия является общим для обеих оператор-функций.*

Теорема 2 доказывается по той же схеме, что и теорема о модельном представлении π-с. с. оператора [5].

Будем говорить, что некоторый оператор B ассоциирует со скалярной функцией $\varphi(\lambda)$, если для любого отрезка $\Delta\subset(-1;1)\setminus\{0\}$ справедливо представление

$$E(\Delta)B = BE(\Delta) = \int_\Delta \varphi(\lambda)\,dE_\lambda. \qquad (1)$$

Теорема 3. *Для того чтобы с данной вещественной функцией $\varphi(\lambda)$ ассоциировал некоторый J-с. с. оператор B, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t)\tilde{f}(t)\in\tilde{L}^2_\sigma$ для любой вектор-функции $\tilde{f}(t)\in\tilde{L}^2_\sigma$,* где $\tilde{L}^2_\sigma$ *то же, что и в теореме 2.*

Следствие. *J-спектральная функция E_λ тогда и только тогда является собственной спектральной функцией некоторого J-с. с. оператора, когда $t\tilde{f}(t)\in\tilde{L}^2_\sigma$, как только $\tilde{f}(t)\in\tilde{L}^2_\sigma$.*

3. Обобщим некоторые результаты, установленные в [6] для индивидуального π-с. с. оператора, на операторы из $\mathfrak{Q}$. Выполнение условия $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$ для $A\in\mathfrak{Q}$ здесь не предполагается, поэтому в общем случае J-спектральная функция E_λ существует по теореме 1 только для семейства $\mathfrak{Q}|_{\mathfrak{H}_r}$. Если $\mathfrak{H}_r\neq\mathfrak{H}$, то распространим область определения оператора E_λ на все $\mathfrak{H}$, сохранив за ним то же обозначение и полагая $E_\lambda|\mathfrak{H}_c=0$ $\forall\lambda\in(-1;1)\setminus\Lambda$. При этом свойства (1) для E_λ, очевидно, остаются выполненными.

Обозначим $\tilde{\mathfrak{H}}_\Lambda$ замыкание линейной оболочки всех подпространств вида $E(\Delta)\mathfrak{H}$, где Δ — произвольный отрезок, для которого $\Delta\subset(-1;1)\setminus\Lambda$, $\mathfrak{H}_\Lambda=\tilde{\mathfrak{H}}_\Lambda\cap\tilde{\mathfrak{H}}_\Lambda^{[\perp]}$. Далее, множество $(-1;1)\setminus\Lambda$ можно представить в виде $\bigcup X_j$ — конечного объединения непересекающихся интервалов. Пусть $\sigma(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ — скалярные функции, заданные соответственно на множествах $[-1;1]$ и $\bigcup X_j$, так что функция $\sigma(\lambda)$ непрерывна слева и не убывает на отрезке $[-1;1]$, а $\nu(\lambda)$ — на каждом из интервалов X_j, μ_σ и μ_ν — порождаемые этими функциями меры Лебега — Стильтьеса, причем для любого отрезка $\Delta\subset\bigcup X_j$ системы его измеримых подмножеств, индуцированные соответственно мерами μ_σ, μ_ν и J-спектральной функцией E_λ, совпадают, функция $\sigma(\lambda)$ непрерывна во всех точках из Λ, $\lim\limits_{m\to\infty}\mu_\nu Y_m=\infty$ в том и только том случае, когда $\lim\limits_{m\to\infty}\|E(Y_m)\|=\infty$ и, если $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_\nu Y_m=\infty$, то $\mu_\nu Y_m=O(\|E(Y_m)|_{\tilde{\mathfrak{H}}_\Lambda}\|^2)$ и, наоборот, $\|E(Y_m)|_{\tilde{\mathfrak{H}}_\Lambda}\|^2=O(\mu_\nu Y_m)$. Укажем, что в [6] функция $\nu(\lambda)$ вводилась сходным образом, но в ее определении есть неточность.

Слабое замыкание множества операторов вида $\int \varphi(\lambda)\,dE_\lambda$, где несобственный интеграл по промежутку $(-1;1)$ трактуется также в слабом смысле, а $\varphi(\lambda)$ — произвольная непрерывная функция с носителем, не пересекающимся с Λ (Λ — финитная функция [6]) обозначим $\mathfrak{F}_0(E_\lambda)$. Укажем также, что теперь в равенстве (2) $\Delta \subset \bigcup X_j$.

Лемма 1. *Для того чтобы с данной функцией $\varphi(t)$ ассоциировал некоторый оператор $B \in \mathfrak{F}_0(E_\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t) \in \in L^2_\nu \cap L^\infty_\sigma$.*

Лемма 2. *Если оператор $B \in \mathfrak{D}$ ассоциирует с некоторой функцией $\varphi(t)$ и $B|_{\mathfrak{H}_\Lambda} = 0$, то $\varphi(t) \in L^2_\nu \cap L^\infty_\sigma$.*

Следствие. *Существует лишь конечное число линейно независимых по модулю $L^2_\nu \cap L^\infty_\sigma$ функций, с которыми могут ассоциировать операторы из $\mathfrak{D}$.*

Теорема 4. *Существует такой конечный набор попарно коммутирующих и коммутирующих с $\mathfrak{Q}$ J-с. с. операторов $C_1, C_2, \ldots, C_k$, связанных с E_λ условиями (2), $\Delta \subset \bigcup X_j$, что для любого оператора $A \in \mathfrak{Q}$ имеет место представление $A = S + Q(C_1, C_2, \ldots, C_k) + B$, где $B \in \mathfrak{F}_0(E_\lambda)$, $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ — некоторый многочлен, степень которого не превышает константу M, не зависящую от A, S — J-с. с. нильпотентный оператор, $S|_{\mathfrak{H}_\Lambda^{[\perp]}[+]\mathfrak{H}_c} = 0$.*

Как известно, коммутативное семейство самосопряженных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве, моногенно, т. е. порождается одним оператором. Простые примеры показывают, что $\mathfrak{Q}$ может быть немоногенным даже для конечномерного $\mathfrak{H}$, однако в этом случае семейство $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ из теоремы 4 может быть сведено к одному оператору. В общем случае вопрос о минимальном значении k сводится согласно лемме 2 к анализу числа порождающих элементов конечномерного семейства $\mathfrak{Q}|_{\mathfrak{H}_\Lambda}$.

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.— М. : Наука, 1986.— 352 с.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы.— М. : Мир, 1974.— 662 с.
3. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: В 2-х т.— Харьков : Вища шк., 1977.— Т. 1.— 316 с.
4. *Штраус В. А.* Некоторые особенности спектральной функции π-самосопряженного оператора // Функцион. анализ. Линейные операторы.— Ульяновск : Ульян. пед. ин-т, 1983.— С. 135—146.
5. *Штраус В. А.* Модельное представление простейшего π-самосопряженного оператора // Функцион. анализ. Спектральная теория.— Ульяновск: Ульян. пед. ин-т, 1984.— С. 123—133.
6. *Штраус В. А.* Функциональное представление алгебры, порожденной самосопряженным оператором в пространстве Понтрягина // Функцион. анализ и его прил.— 1986.— **20**, вып. 1.— С. 91—92.

Челябин. политехн. ин-т

Получено 14.01.87