УДК 517.52

В. М. Чевский

О распределении нулей некоторых мероморфных функций

В настоящей работе на основании полученных ранее результатов [1] доказаны неравенства для производных полинома любого порядка в областях более общего вида, чем в работе [2]. При этом будем пользоваться обозначениями, принятыми в [1].

Пусть E — произвольное множество точек комплексной плоскости. Замыкание множества E обозначим через $\overline{E}$; границу множества E — через $L(E)$, дополнение E до расширенной плоскости — через $\overline{E}^1$. Множеством типа K будем называть замкнутое непустое множество $\overline{B}$ точек расширенной плоскости, обладающее тем свойством, что B^1 не пусто и является односвязной областью. Пусть, далее, $\overline{B}$ — множество типа K; $z_0 \in \overline{B}^1$, $z_0 \neq \infty$, функция $\varphi(z)$ конечна и не обращается в нуль в $\overline{B}^1$; $G(z_0)$ — образ множества $\overline{B}$ при отображении функций $w = \dfrac{n\varphi(z_0)}{(z_0 - z)^m}$; $\overline{G}_*(z_0)$ — выпуклая оболочка множества $G(z_0)$; $\overline{B}_*(z_0)$ — прообраз $\overline{G}_*(z_0)$ при отображении функцией $w = n\varphi(z_0)/(z_0 - z)^m$.

Будем называть $\overline{B}_*(z_0)$ выпуклой оболочкой множества $\overline{B}$ относительно точки z_0. Пусть $l(z_0) = L(B) \cap L(B_*)$ — общая часть границ $\overline{B}$ и

$B_*(z_0)$; $L(z_0)$ — образ $l(z_0)$ при данном отображении;

$$H_m(P, z) = P_n^m(z)\,[\varphi(z)\, d^m \ln P_n(z)/dz^m + (m-1)!\,w] \tag{1}$$

Применяя обычные правила дифференцирования, получаем формулу

$$d^m \ln P_n(z)/dz^m = (-1)^{m-1}(m-1)! \sum_{k=1}^{n} (z - z_k)^{-m}.$$

Лемма 1. *Пусть* $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ — *многочлен степени* $n \geqslant 1$, *все нули которого принадлежат* $\overline{B}$; *точка* $w \in \overline{G}_*^1(z_0)$, $w \neq \infty$, *и* $z_0 \in \overline{B}^1$. *Тогда* $H_m(P, z_0) = 0$ *лишь в следующих случаях*:

1) z_0 *является нулем многочлена кратности не менее единицы и* $z_0 \in L(B)$;

2) $z_k \in L(B)$, $z_k \neq z_0$ *и выполняется одно из условий*:

а) $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = a$ *и* $w = n\varphi(z_0)/(z_0 - a)^m$;

б) *не все* z_k *равны между собой, но все точки* $w_k = n\varphi(z_0)/(z_0 - z_k)^m$ *лежат на одном прямолинейном отрезке* $\lambda \in \in L[G_*(z_0)]$ *и* $w = \sum_{k=1}^{n} w_k/n$.

Доказательство. Рассмотрим два случая. 1) $P_n(z_0) = 0$. Тогда, так как, с одной стороны, $z_0 \in \overline{B}$, а с другой — $z_0 \in \overline{B}^1$, то $z_0 \in L(B)$. При этом из равенства $H_m(P, z_0) = 0$ следует, что $P_n'(z_0) = 0$, так как $\varphi(z_0) \neq 0$. 2) $P_n(z_0) \neq 0$. Тогда $z_k \neq z_0$ и из равенства $H_m(P, z_0) = 0$ и формулы (1) получаем $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n\varphi(z_0)/(z_0 - z_k)^m - w = 0$.

Обозначим $w_k = n\varphi(z_0)/(z_0 - z_k)^m$, $\overline{w} = \sum_{k=1}^{n} w_k/n$. Так как $z_k \in \overline{B}$, то $w_k \in \overline{G}(z_0)$, $\overline{w} \in \overline{G}_*(z_0)$. Но $w \in \overline{G}_*^1(z_0)$ и имеет место равенство $w = \overline{w}$. Поэтому w и $\overline{w}$ должны принадлежать $\overline{G}_*(z_0) \cap \overline{G}_*^1(z_0) = L[\overline{G}_*(z_0)]$. Точка $\overline{w}$ может принадлежать границе множества $G_*(z_0)$ в том и только в том случае, если все точки z_k принадлежат $l(z_0)$.

Рассмотрим два случая: а) $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = a$. Тогда все w_k равны между собой. При этом $w_k = n\varphi(z_0)/(z_0 - a)^m$, $\overline{w} = \varphi(z_0)/(z_0 - a)^m$ и $w = \varphi(z_0)/(z_0 - a)^m$. б) Пусть не все z_k равны между собой, тогда и не все w_k равны между собой. Очевидно, что $\overline{w} \in L[G_*(z_0)]$ лишь в том случае, когда все точки w_k лежат на прямолинейном отрезке $\lambda \in L[G_*(z_0)]$. Отметим, что при этом и точка $\overline{w} \in \lambda$. Лемма доказана.

Пусть D — множество типа K, содержащее $\overline{B}$ ($\overline{D}$ может совпадать с $\overline{B}$). Положим $\overline{G}(\overline{D}^1) = \bigcup_{z \in \overline{D}^1} G(z)$. Обозначим через $\overline{G}_*(\overline{D}^1)$ выпуклую оболочку множества $\overline{G}(\overline{D}^1)$. Пусть $z_0 \in \overline{D}^1$, $L(\overline{D}^1, z_0) = L[\overline{G}_*(z_0)] \cap L(z_0)$, $l(D^1, z_0)$ — прообраз $L(\overline{D}^1, z_0)$ при отображении функцией $w = n\varphi(z_0)/(z_0 - z)^m$.

Лемма 2. *Пусть* $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ — *многочлен степени* $n \geqslant 1$, *все нули которого принадлежат* $\overline{B}$, $w \in \overline{G}_*^1(\overline{D}^1)$, $z_0 \in \overline{D}^1$. *Тогда* $H_m(P, z_0) = 0$ *лишь в следующих случаях*:

1) z_0 — *кратный нуль многочлена* $P_n(z)$, *при этом* $z_0 \in L(\overline{B}) \cap L(\overline{D}^1)$;

2) $z_k \in l(D^1, z_0)$, $z_k \neq z_0$ *и выполняется одно из условий*: а) $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = a$, $w = n\varphi(z_0)/(z_0 - a)^m$; б) *не все* z_k *равны между собой, но все точки* $w_k = n\varphi(z_0)/(z_0 - z_k)^m$ *лежат на одном прямолинейном отрезке* $\lambda \in L[G_*(\overline{D}^1)]$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.

Замечание. Утверждение леммы 2 остается в силе, если $w = w(z)$ — некоторая функция от переменной z. Пусть $\bar{B}$ — множество типа K и $P_n(z)$ — многочлен степени n, все нули которого принадлежат $\bar{B}$, $\mathcal{P}(B, P_n)$ — класс всех многочленов $p_n(z)$ степени не выше n, удовлетворяющих неравенству $|p_n(z)| \leqslant |P_n(z)|$. Ранее доказано [1], что это неравенство будет также выполняться и для всех $z \in \bar{B}^1$.

Теорема 1. *Пусть $\bar{B}$ — множество типа K; $\bar{D}$ — множество типа K, содержащее $\bar{B}$; $P_n(z)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$, все нули которого принадлежат B; $\mathcal{P}(B, P_n)$ — класс многочленов $p_n(z)$ степени не выше n, удовлетворяющих неравенству $|p_n(z) \leqslant |P_n(z)|$ при $z \in L(B)$; $\varphi(z)$-функция конечная и не обращается в нуль в $\overline{B^1}$, $w \in \overline{D^1}$. Тогда выполняется неравенство*

$$|P_n^m(z)\|\varphi(z)d^m \ln p_n(z)/dz^m + (m-1)!\,w| \leqslant |P_n^m(z)\|\varphi(z)d^m \ln P_n(z)/dz^m + w|.$$

Доказательство. По условию теоремы все значения функции $\psi(z) = p_n(z)/P_n(z)$ принадлежат единичному кругу; $|\psi(z)| \leqslant 1$ при $z \in \bar{B}^1$, поэтому при λ таком, что $|\lambda| > 1$, все нули полинома $Q_n(z) = p_n(z) + \lambda P_n(z)$ принадлежат B. К полиному $Q_n(z)$ можно применить лемму 2. Согласно этой лемме все нули функции $H_m(Q, z) = Q_n^m(z)\,[\varphi(z)\,d^m \ln Q_n(z)/dz^m + (m-1)!\,w]$ принадлежат области D. Теперь рассмотрим функцию $H_m(Q, z)$ как многочлен степени m от λ. При $z \in \bar{D}^1$ все нули этого многочлена принадлежат единичному кругу $|\lambda| \leqslant 1$, поэтому отношение свободного члена $P_n^m(z)\,[\varphi(z)d^m \ln p_n(z)/dz^m + (m-1)!\,w]$ к старшему коэффициенту $P_n^m(z)\,[\varphi(z)\,d^m \ln P_n(z)/dz^m + (m-1)!\,w]$ по модулю не превышает единицу, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $R_s(z) = \prod_{i=1}^{s}(z - z_i^*)^{q_i}$; $\sum q_i = 1$ и $P_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)^{p_i}$; $\Sigma p_i = 1$ — случайные полиномы комплексной случайной величины z, причем $|R_s(z)| \leqslant |P_n(z)|$, $z \in L(B)$. Обозначим через N общий знаменатель дробей q_i и через M общий знаменатель дробей p_i.

Теорема 2. *Пусть $\bar{B}$ — множество типа K, $\bar{D}$ — множество типа K, содержащее $\bar{B}$, все значения случайной величины z принадлежат B; $R(B, P_n)$ — класс случайных полиномов $R_s(z)$, удовлетворяющих условиям $|R_s(z)| \leqslant |P_n(z)|$, $z \in L(B)$, $N\sum_{i=1}^{s} q_i^{-1} \leqslant M \sum_{i=1}^{n} p_i^{-1}$ при $z \in \bar{B}^1$, $\varphi(z)$ — функция конечная и не обращается в нуль при $z \in \overline{B^1}$, $w \in \overline{D^1}$, $w \neq \infty$. Тогда выполняется неравенство $|R_s^{Nm}(z)\|N\varphi(z)d^m \ln R_s(z)/dz^m + (m-1)!\,w| \leqslant |P_n^{mM}(z)\|M\varphi(z)d^m \ln P_n(z)/dz^m + (m-1)!\,w|$.*

Доказательство. Полином $R_s^N(z)$ является обыкновенным алгебраическим полиномом степени $N\sum_{i=1}^{s} q_i^{-1}$, не превышающим по модулю алгебраический полином $P_n^M(z)$ степени $M\sum_{i=1}^{n} P_i^{-1}$, причем по условию $N\sum_{i=1}^{s} q_i^{-1} \leqslant M\sum_{i=1}^{n} P_i^{-1}$. Следовательно, выполняются все условия теоремы 1.

1. *Андреева В. А., Чевский В. М.* Некоторые неравенства типа неравенств В. А. Маркова // Мат. заметки.— 1968.— 3, № 4.— С. 431—440.
2. *Чевский В. М.* Об оценках логарифмических производных алгебраических полиномов // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 5.— С. 653—656.

Киев. ин-т инженеров граждан. авиации Получено 17.12.86