УДК 517.925

О. В. Шпакович

О гладкости по параметру экспоненциально дихотомичного инвариантного тора квазилинейной системы дифференциальных уравнений

В работе [1] была изучена задача гладкости инвариантного тора квазилинейной системы дифференциальных уравнений в предположении, что линейная часть уравнения постоянна. Настоящая работа посвящена распространению этого результата на случай, когда линейная часть уравнения является переменной функцией.

Итак, будем рассматривать систему дифференциальных уравнений вида

$$d\psi/dt = \omega + \varepsilon\Delta + \varepsilon f_1(h) + \varepsilon^2 F_1(\psi, h, \Delta, \varepsilon), \qquad (1)$$
$$dh/dt = \varepsilon P(\psi) h + \varepsilon f_2(h) + \varepsilon^2 F_2(\psi, h, \Delta, \varepsilon),$$

правая часть которой определена в области

$$\psi \in \mathcal{T}_m,\ \|h\| \leqslant \delta,\ \|\Delta\| \leqslant \sigma_0,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \qquad (2)$$

при достаточно малых положительных δ, ε_0, периодическая по $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ с периодом 2π, l раз непрерывно дифференцируема по ψ, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_{n_0})$, ε и удовлетворяет условиям

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0, \quad \partial f_2(0)/\partial h = 0. \qquad (3)$$

Здесь $P(\psi)$ — периодическая по ψ матрица периода 2π.

Предположим, что существует невырожденная симметрическая матрица $S(\psi) \in C'(\mathcal{T}_m)$ такая, что матрица

$$\widehat{S(\psi)} = \dot{S}(\psi) + S(\psi) P(\psi) + P^*(\psi) S(\psi) \qquad (4)$$

является отрицательно определенной при $\psi \in \mathcal{T}_m$. При сделанных предположениях, согласно работам [1, 2], система дифференциальных уравнений (1) имеет экспоненциально дихотомичный тор

$$h = u(\psi, \Delta, \varepsilon), \qquad (5)$$

где $U(\psi, \Delta, \varepsilon)$ — периодическая по ψ_j, $j = \overline{1, m}$, с периодом 2π функция, определенная в области

$$\psi \in \mathcal{T}_m, \quad \|\Delta\| \leqslant \sigma_0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \qquad (6)$$

Переходя к выяснению вопроса о гладкости по параметру ε функции $U(\psi, \Delta, \varepsilon)$, совершим в системе (1) переход к «медленному» времени $\tau = \varepsilon t$. В результате система (1) примет вид

$$d\psi/d\tau = \omega/\varepsilon + \Delta + f_1(h) + \varepsilon F_1(\psi, h, \Delta, \varepsilon), \qquad (7)$$
$$dh/d\tau = P(\psi) h + f_2(h) + \varepsilon F_2(\psi, h, \Delta, \varepsilon).$$

Инвариантную поверхность (5) системы (7) будем искать методом простой итерации как предел последовательности поверхностей

$$h = u_j(\psi, \Delta, \varepsilon), \quad \psi \in \mathcal{T}_m, \quad j = 1, 2, \dots, \qquad (8)$$

каждая из которых является инвариантной поверхностью системы

$$d\psi/d\tau = \omega/\varepsilon + \Delta + f_1(u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_1(\psi, u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon), \qquad (9)$$
$$dh/d\tau = P(\psi) h + f_2(u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_2(\psi, u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon).$$

При этом $u_0(\psi, \Delta, \varepsilon) \equiv 0$ при $\psi \in \mathcal{T}_m$, $\|\Delta\| \leqslant \sigma_0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

При сделанных предположениях и при условии отрицательной определенности матрицы $\widehat{S}(\psi)$ по матрице $P(\psi)$ можно записать функцию Грина $G_0^j(\tau, \psi, \Delta, \varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots$, задачи об экспоненциально дихотомичном торе системы (9), которая допускает оценку

$$\|G_0^j(\tau, \psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant K e^{-\gamma|\tau|}, \quad \tau \in R, \quad j = 1, 2, \dots \qquad (10)$$

Для любого значения $\psi \in \mathcal{T}_m$, где K и γ — положительные постоянные не зависящие от j, τ, ψ, Δ и ε. Тогда интегральная поверхность (8) системы (9) определяется интегралом вида

$$u_j(\psi, \Delta, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^j(\tau, \psi, \Delta, \varepsilon) [f_2(u_{j-1}(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)) +$$
$$+ \varepsilon F_2(\psi_\tau, u_{j-1}(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)] \, d\tau$$

где $\psi_\tau = \psi_\tau(\psi, \Delta, \varepsilon)$ — решение первого из уравнений системы (9), принимающее при $\tau = 0$ значение $\psi_0(\psi, \Delta, \varepsilon) = \psi$, $u_0(\psi, \Delta, \varepsilon) \equiv 0$.

Для систем дифференциальных уравнений вида (1) имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть правая часть системы уравнений (1) удовлетворяет приведенным выше условиям* и $l \geqslant 2$. *Тогда можно указать такие достаточно большие постоянные* $M_0, \ldots, M_l$ *и достаточно малую постоянную* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_l) > 0$, *что функция* $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ *непрерывно дифференцируема по* $\psi, \Delta, \varepsilon$ *в области (6) с* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_l) > 0$ *и удовлетворяет в этой области неравенству*

$$\| D^\rho u^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant M_\nu/\varepsilon^{2\nu-1}, \quad \rho + \nu \leqslant l, \quad \nu = \overline{0, l}, \tag{11}$$

где D^ρ *— любая производная по* ψ, Δ, *порядка* ρ, u^ν *— производная по* ε *функции* $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$.

Доказательство теоремы основано на применении леммы, аналогичной лемме [3].

Свяжем показатель γ экспоненциального затухания функции Грина $G_0(\tau, \psi, \Delta, \varepsilon)$ экспоненциально дихотомичной системы (1) с параметрами матриц $S(\psi)$ и $S(\widehat{\psi})$, обеспечивающих экспоненциальную дихотомию системы.

Теорема 2. *Пусть правая часть системы (1) удовлетворяет приведенным выше условиям гладкости. Тогда если невырожденная симметрическая матрица* $S(\psi) \in C'(\mathcal{T}_m)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\max_{\|h\|=1} |\langle S(\psi) h, h\rangle| \leqslant \mu, \tag{12}$$

$$\max_{\|h\|=1} \left\langle \left[\frac{1}{2}\dot{S}(\psi) + S(\psi) P(\psi)\right] h, h\right\rangle \leqslant -\beta$$

с положительными постоянными μ *и* β, *то функция Грина* $G_0(\tau, \psi, \Delta, \varepsilon)$ *системы* (1) *удовлетворяет неравенству* (10) *с показателем*

$$\gamma = \beta/\mu. \tag{13}$$

Отметим, что условие теоремы 2 гарантирует экспоненциальную дихотомию системы (1).

Рассмотрим два частных случая матрицы $S(\psi)$.

1. Пусть матрица $P(\psi)$ имеет блочно-диагональный вид

$$P(\psi) = \begin{pmatrix} P_1(\psi) & 0 \\ 0 & P_2(\psi) \end{pmatrix}$$

и матрицы $P_1(\psi)$ и $P_2(\psi)$ удовлетворяют неравенствам

$$\max_{\|\eta\|=1} \langle P_1(\psi)\eta, \eta\rangle \leqslant \beta_1(\psi) < -\gamma_1,$$

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle P_2(\psi)\xi, \xi\rangle \geqslant \beta_2(\psi) > \gamma_2 > 0,$$

где γ_1, γ_2 — положительные постоянные, не зависящие от ψ.

Определим матрицу $G_0(\tau, \psi, \Delta, \varepsilon)$, положив

$$G_0(\tau, \psi, \Delta, \varepsilon) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(P_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_\tau^0(P_2) \end{pmatrix}, & \tau > 0. \end{cases}$$

Матрица $G_0(\tau, \psi, \Delta, \varepsilon)$ является, очевидно, функцией Грина задачи об инвариантном торе системы (9). Неравенство (10) легко проверяется с помощью неравенства Важевского [4].

Таким образом, мы имеем частный случай выполнения условий (12), когда матрица $S(\psi) = S$ — постоянная матрица вида

$$S = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}.$$

2. Положим $S(\psi) = C + \varepsilon S_1(\psi)$, где C — постоянная матрица $S_1(\psi)$, $S(\psi)$ — невырожденные симметрические матрицы, $S_1(\psi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, $S(\psi) \in \in C'(\mathcal{T}_m)$. Тогда неравенства (12) примут вид

$$\max_{\|\eta\|=1} |\langle (C + \varepsilon S_1(\psi))\,\eta, \eta\rangle| \leqslant \max_{\|\eta\|=1} |\langle C\eta, \eta\rangle| \leqslant \mu,$$

$$\max_{\|\xi\|=1} \left\langle \left[\frac{\varepsilon}{2}\dot{S}_1(\psi) + CP(\psi) + \varepsilon S_1(\psi)\,P(\psi)\right]\xi, \xi\right\rangle \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant \max_{\|\xi\|=1} \left\langle \left[\frac{\omega}{2}\frac{\partial S_1(\psi)}{\partial\psi} + CP(\psi)\right]\xi, \xi\right\rangle \leqslant -\beta.$$

Отметим, что в этом случае легко можно подобрать матрицы C и $S_1(\psi)$ так, чтобы неравенства (14) выполнялись, причем добавка $\varepsilon S_1(\psi)$ улучшала второе из неравенств (14).

1. *Самойленко А. М.* О гладкости по параметру инвариантного тора квазилинейной системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 6.— С. 605—618
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М. : Наука, 1987.— 302 с.
3. *Шпакович О. В.* К теории инвариантных торов квазилинейных систем дифференциальных уравнений.— Киев, 1989.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.16).
4. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 6.— С. 1219—1241.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 07.06.89