УДК 517.521.8

Н. Н. Билоцкий

Сходимость по отрезкам и теоремы о выпуклости

1. Пусть $A = (a_{mn})$ — регулярная нормальная положительная матрица [1, 2]. Говорят, что последовательность комплексных чисел $S = \{S_n\}$ A-ограничивается (пишут $S_n = O(1)(A)$, $n \to \infty$), если $\sup\limits_{0 \leqslant m < +\infty} |t_m| < +\infty$ и A-сходится к числу L (пишут $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(A)$), если $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = L$, где

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} a_{mn} S_n, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

В последнем случае матрица A задает метод суммирования рядов [1, 2]. Множества A_m и A_c соответственно всех A-ограниченных и всех A-сходящихся последовательностей являются банаховыми пространствами последовательностей $S = \{S_n\}$ с нормой $\| S \|_A \equiv \sup\limits_{0 \leqslant m < +\infty} |t_m|$, в которых сходимость по норме влечет сходимость по координатам.

Для матрицы $A = (a_{mn})$ приняты обозначения:

B_A — множество всех последовательностей $S = \{S_n\} \in A_m$, ограниченных по отрезкам в пространстве A_m, т. е. таких, для которых последовательность $\| \overset{r}{S} \|_A$ ограничена, где $\overset{r}{S} = \{S_0, S_1, \ldots, S_r, 0, 0, \ldots\}$, $r = 0, 1, \ldots$;

S_A — множество всех последовательностей $S = \{S_n\} \in A_c$ со сходимостью по отрезкам в пространстве A_c, т. е. таких, что $\lim\limits_{r\to\infty} \| \overset{r}{S}_c - S \|_A = 0$, где $\overset{r}{S}_c = \{S_0, S_1, \ldots, S_r, L, L, \ldots\}$, $r = 0, 1, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(A)$.

Эти множества рассматривались в работе [3]. Очевидно, что $S_A \subset B_A \subset A_m$ и $S_A \subset A_c \subset A_m$.

Пусть Δ — класс регулярных нормальных положительных матриц. Введем следующие классы матриц:

Δ_s — класс матриц $A = (a_{mn}) \in \Delta$ таких, что а) $A_m = B_A$, $A_c = S_A$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nn} = 0$, в) $0 \leqslant a_{mk} \leqslant a_{nk}$ при $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$, $m, n, k = 0, 1, 2, \ldots$;

δ_s — класс матриц $A = (a_{mn}) \in \Delta$ таких, что а) $0 < a_{mk} \leqslant a_{nk}$, б) $a_{mk+1} \times (a_{nk+1})^{-1} \leqslant a_{mk}(a_{nk})^{-1}$, в) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{mk} \leqslant a_{mn}(a_{nn})^{-1} + \alpha_{mn}$ при $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$, $m, n, k = 0, 1, 2, \ldots$, где $0 \leqslant \alpha_{mn} \to 0$, $n \to \infty$, г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nn} = 0$.

Следует отметить, что $\delta_s \subset \Delta_s$ [4].

Известна теорема о выпуклости для методов суммирования рядов Чезаро (C, k), где $k > -1$ [1] (теорема 70), [2] (теорема 15.8). Для более широкого класса методов суммирования эта теорема была доказана в работах [5, 6]. В данной работе предлагается обобщение теоремы о выпуклости на итерации матричных методов суммирования, принадлежащих классу Δ_s либо более узкому классу δ_s.

2. Для последовательности $S = \{S_n\}$ и последовательности нормальных матриц $A_\alpha = (a_{mn}^{(\alpha)})$ определим средние

$$t_m^{(0)} = S_m,\ t_m = \sum_{k=0}^{m} a_{mk}^{(\alpha)} t_k^{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots,\ m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Если $\lim\limits_{m\to\infty} t_m^{(\alpha)} = L$ (или $t_m^{(\alpha)} = O(1)$, $m \to \infty$) для некоторого α, то будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(A_\alpha)$ (соответственно $S_n = O(1)(A_\alpha)$, $n \to \infty$).

Теорема. *Пусть последовательность нормальных положительных матриц $A_\alpha = (a_{mn}^{(\alpha)})$ такова, что для каждого $\alpha = 1, 2, \ldots$*

$$0 < \sum_{k=n+1}^{m} a_{mk}^{(\alpha)} \to 0,\ n \to \infty,\ \textit{когда}\ 0 < \sum_{k=n}^{m-1} a_{m-1k}^{(\alpha+1)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

1. *Если $A_\alpha = (a_{mn}^{(\alpha)}) \in \Delta_s$ для всех $\alpha = 1, 2, \ldots$, $S_n = O(1)(A_{\alpha_0})$, $n \to \infty$, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(A_{\alpha_1})$ для некоторых $\alpha_0 \geqslant 0$ и $\alpha_1 > \alpha_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(A_\alpha)$ для любого $\alpha > \alpha_0$.*

2. *Если $A_\alpha = (a_{mn}^{(\alpha)}) \in \delta_s$ для всех $\alpha = 1, 2, \ldots$, а последовательность $S = \{S_n\}$ такая, что $t_m^{(\alpha_0)} \geqslant 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, для некоторого $\alpha_0 > 0$, то*

$S_n = O(1)(A_{\alpha_1})$, $n \to \infty$, для какого-то $\alpha_1 > \alpha_0$ влечет $S_n = O(1)(A_\alpha)$, $n \to \infty$, для любого $\alpha > \alpha_0$;

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(A_{\alpha_1})$ для какого-то $\alpha_1 > \alpha_0$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(A_\alpha)$ для любого $\alpha > \alpha_0$.

Доказательство. 1. Если $S_n = O(1)(A_{\alpha_0})$, $n \to \infty$, т. е. $t_m^{(\alpha_0)} = O(1)$, $m \to \infty$, то из равенств (1) и условий теоремы следует, что $t_m^{(\alpha)} = O(1)$, $m \to \infty$, при $\alpha = \alpha_0, \alpha_0 + 1, \ldots, \alpha_1 - 1$ и $t_m^{(\alpha)} \to L$, $m \to \infty$, при $\alpha \geqslant \alpha_1$. Если $\alpha_1 = \alpha_0 + 1$, то первая часть теоремы доказана. Если же $\alpha_1 > \alpha_0 + 1$, то $t_m^{(\alpha_1-2)} = O(1)$, $m \to \infty$, и тогда из условий б) и в) определения класса Δ_s нетрудно вывести, что $\lim\limits_{n\to\infty} (t_m^{(\alpha_1-1)} - t_n^{(\alpha_1-1)}) = 0$, если

$$0 < \sum_{k=n+1}^{m} a_{mk}^{(\alpha_1-1)} \to 0,$$ $n \to \infty$, и, стало быть, в силу условий (2) и $A_\alpha \in \Delta_s$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} (t_m^{(\alpha_1-1)} - t_n^{(\alpha_1-1)}) = 0$, если $0 < \sum\limits_{k=n}^{m-1} a_{m-1\,k}^{(\alpha_1)} \to 0$, $n \to \infty$. Тогда

из теоремы 3 и теоремы B работы [7] следует, что $t_m^{(\alpha_1-1)} \to L,\ m \to \infty$. Продолжив подобные рассуждения, можем заключить $t_m^{(\alpha)} \to L,\ m \to \infty$, при $\alpha = \alpha_0 + 1,\ \alpha_0 + 2, \ldots,\ \alpha_1 - 1$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L\ (A_\alpha)$ при всех $\alpha = \alpha_0 + 1, \alpha_0 + 2, \ldots$.

2. Пусть выполняются условия второй части теоремы, в частности, $S_n = O(1)\ (A_{\alpha_1}),\ n \to \infty$, т. е. $t_m^{(\alpha_1)} = O(1),\ m \to \infty$, и $t_m^{(\alpha_0)} \geqslant 0,\ m = 0, 1, 2, \ldots$, при $\alpha_1 > \alpha_0 \geqslant 0$. Тогда $t_m^{(\alpha)} \geqslant 0,\ m = 0, 1, 2, \ldots$, при $\alpha > \alpha_0$ и, стало быть, при $\alpha = \alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_0$. Нетрудно показать, что при $A_{\alpha_1-1} = (a_{mn}^{\alpha_1-1)}) \in \delta_s$ из допущений $t_m^{(\alpha_1-2)} \geqslant 0,\ \ m = 0, 1, 2, \ldots$, и $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, t_m^{(\alpha_1-1)} = +\infty$ следует существование числа $\delta > 0$, последовательностей $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ натуральных чисел и последовательности замкнутых выпуклых множеств G_k таких, что $t_n^{(\alpha_1-1)} \in G_k$ при $n_k \leqslant n \leqslant m_k \leqslant n_{k+1},\ \sum\limits_{\nu=n_k}^{m_k} a_{m_k\nu}^{(\alpha_1-1)} \geqslant \delta > 0,\quad k = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(0, G_k) = +\infty$, где $\rho(0, G_k)$ — расстояние множеств $G_k,\ k = 1, 2, \ldots$, до начала координат. Доказательство этого факта проводится по схеме доказательства леммы 1 работы [6]. Условие (2) приводит к тому, что бесконечно удаленная точка комплексной плоскости будет бесконечно удаленной (α)-точкой последовательности $\{t_m^{(\alpha_1-1)}\}$ относительно матрицы A_{α_1}, т. е. существует число $\delta_1 > 0$, последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ натуральных чисел и последовательность замкнутых выпуклых множеств G_k такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(0, G_k) = +\infty$ и $t_n^{(\alpha_1-1)} \in G_k$ при $n_k \leqslant n \leqslant m_k \leqslant n_{k+1}$, $\sum\limits_{\nu=n_k}^{m_k} a_{m_k\nu}^{(\alpha_1)} \geqslant \delta_1,\quad k = 1, 2, \ldots$. Но последнее, с учетом второй части теоремы B работы [7] противоречит условию $t_m^{(\alpha_1)} = O(1),\ m \to \infty$. Поэтому остается утверждать, что $t_m^{(\alpha_1-1)} = O(1),\ m \to \infty$. Продолжив аналогичные рассуждения, получим $t_m^{(\alpha)} = O(1),\ m \to \infty$, при $\alpha = \alpha_0 + 1,\ \alpha_0 + 2, \ldots,\ \alpha_1$, т. е. $S_n = O(1)\ (A_\alpha),\ n \to \infty$, для любого $\alpha > \alpha_0$.

Если же $t_m^{(\alpha_0)} \geqslant 0,\ m = 0, 1, 2, \ldots$, для некоторого $\alpha_0 \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L\,(A_{\alpha_1})$ для какого-то $\alpha_1 > \alpha_0$, то при $A_{\alpha_1-1} \in \delta_s$ имеем

$$t_m^{(\alpha_1-1)} - t_n^{(\alpha_1-1)} = \sum_{k=0}^{m} a_{mk}^{(\alpha_1-1)} t_k^{(\alpha_1-2)} - \sum_{k=0}^{n} a_{nk}^{(\alpha_1-1)} t_k^{(\alpha_1-2)} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{mk}^{(\alpha_1-1)}}{a_{nk}^{(\alpha_1-1)}}\ a_{nk} t_k^{(\alpha_1-2)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} a_{nk}^{(\alpha_1-1)} t_k^{(\alpha_1-2)} \geqslant t_n^{(\alpha_1-1)} \left(\frac{a_{mn}^{(\alpha_1-1)}}{a_{mn}^{(\alpha_1-1)}} - 1 \right) \geqslant t_n^{(\alpha_1-1)} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{mk}^{(\alpha_1-1)} - \beta_{mn}^{(\alpha_1-1)} - 1 \right) =$$

$$= - t_n^{(\alpha_1-1)} \left(\sum_{k=n+1}^{m} a_{mk}^{(\alpha_1-1)} + \beta_{mn}^{(\alpha_1-1)} + \gamma_n^{(\alpha_1-1)} \right),\quad m > n,\ m, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $0 \leqslant \beta_{mn}^{(\alpha_1-1)} \to 0,\ n \to \infty,\ \gamma_n^{(\alpha_1-1)} \to 0,\ n \to \infty$. Таким образом, учитывая условия (2) и $A_\alpha \in \delta_s,\quad \alpha = 1, 2, \ldots$, можем утверждать, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (t_m^{(\alpha_1-1)} - t_n^{(\alpha_1-1)}) \geqslant 0$, если $0 < \sum\limits_{k=n}^{m-1} a_{m-1k}^{(\alpha_1)} \to 0,\ n \to \infty$. Последнее в силу теоремы 4 и теоремы B работы [7] означает, что $t_m^{(\alpha_1-1)} \to L,\ m \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L\ (A_{\alpha_1-1})$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L\,(A_\alpha)$ для любого $\alpha > \alpha_0$. Теорема доказана.

3. Отметим некоторые приложения доказанной теоремы. Классу δ_s принадлежат матрицы $A_\alpha \equiv H = (h_{mn}),\ \ \alpha = 1, 2, \ldots$, у которых $h_{mn} =$

$= p_n (\mathcal{P}_m)^{-1}$ при $0 \leqslant n \leqslant m$, $h_{mn} = 0$ при $n > m$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, где

$$p_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \ \mathcal{P}_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty, \ n \to \infty, \ p_n (\mathcal{P}_n)^{-1} \to 0, \ n \to \infty. \tag{3}$$

Эти матрицы посредством равенств (1) задают методы суммирования (H, p_n, α), т. е. итерации методов взвешенных средних арифметических Риса $(\bar{R}, p_n)$ [2, с. 185]. При $p_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, они превращаются в обычные метода Гельдера (H, α), $\alpha = 1, 2, \ldots$ [1, с. 123—125]. Для методов (H, p_n, α) первая и вторая части теоремы были доказаны соответственно в [5] (теорема 1) и [6] (теорема 1). Классу δ_s также принадлежат регулярные матрицы методов суммирования Вороного—Нерлунда (WN, p_n) [1, с. 88—96], где последовательность $p = \{p_n\}$ удовлетворяет условиям

$$p_n > 0, \ \frac{p_{n+m}}{p_n} \leqslant \frac{p_{n+1+m}}{p_{n+1}} \leqslant 1, \ m, n = 0, 1, 2, \ldots, \ \mathcal{P}_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty, \ n \to \infty. \tag{4}$$

Частным случаем таких матриц являются матрицы средних Чезаро (C, α) при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, средних $(WN, (n+1)^{-\alpha})$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и для итераций этих методов суммирования верна вторая часть теоремы.

Далее, определим последовательности матриц $W_\alpha = (w_{mn}^{(\alpha)})$ и $C_\alpha = (c_{mn}^{(\alpha)})$, у которых $w_{mn}^{(0)} = c_{mn}^{(0)} = 1$ при $m = n$, $w_{mn}^{(0)} = c_{mn}^{(0)} = 0$ при $m \neq n$ и

$$w_{mn}^{(\alpha)} = \begin{cases} \dfrac{p_{m-n} \mathcal{P}_n^{(\alpha-1)}}{\mathcal{P}_m^{(\alpha)}} & \text{при } 0 \leqslant n \leqslant m, \\ 0 & \text{при } n > m, \end{cases} \qquad c_{mn}^{(\alpha)} = \begin{cases} \dfrac{p_n \overline{\mathcal{P}}_n^{(\alpha-1)}}{\overline{\mathcal{P}}_m^{(\alpha)}} & \text{при } 0 \leqslant n \leqslant m, \\ 0 & \text{при } n > m, \end{cases}$$

где $p_n > 0$, $\mathcal{P}_n^{(0)} = \overline{\mathcal{P}}_n^{(0)} = 1$, $\mathcal{P}_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \mathcal{P}_k^{(\alpha-1)}$, $\overline{\mathcal{P}}_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{\mathcal{P}}_k^{(\alpha-1)}$ для всех m, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $\alpha = 1, 2, \ldots$. Последовательности матриц C_α и W_α, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, посредством равенств (1) определяют параметрические семейства методов суммирования (C, p_n, α) [6, с. 73] и (WN, p_n, α). При $p_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, эти методы превращаются в обычные методы Чезаро (C, α) [1, с. 124—125].

Следствие. *Пусть последовательность $p = \{p_n\}$ удовлетворяет условию (4) и $W_m^{(\alpha_0)} \geqslant 0$ (или последовательность $p = \{p_n\}$ удовлетворяет условию (3) и $C_m^{(\alpha_0)} \geqslant 0$) при $m = 0, 1, 2, \ldots$ для некоторого $\alpha_0 \geqslant 0$, где $W_m^{(\alpha)}$ и $C_m^{(\alpha)}$ — средние последовательности $S = \{S_n\}$, задаваемые равенствами (1) с помощью последовательности матриц W_α и C_α, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, соответственно.*

Если $S_n = O(1)\,(W_{\alpha_1})$, $n \to \infty$ (или $S_n = O(1)\,(C_{\alpha_1})$, $n \to \infty$) для какого-то $\alpha_1 > \alpha_0$, то $S_n = O(1)\,(W_\alpha)$, $n \to \infty$ (соответственно $S_n = O(1)\,(C_\alpha)$, $n \to \infty$) для любого $\alpha > \alpha_0$. Если же $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L\,(W_{\alpha_1})$ (или $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L\,(C_{\alpha_1})$) для какого-то $\alpha_1 > \alpha_0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L\,(W_\alpha)$ (соответственно $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L\,(C_\alpha)$) для любого $\alpha > \alpha_0$.

Для методов суммирования (C, p_n, α) утверждение следствия доказано в работе [6] (теорема 2).

4. Условие (2) теоремы существенно. Это показывает пример последовательности $U = \{U_n\}$, у которой $U_0 = 1$, $U_1 = 0$ и $U_n = 1$ при $n_{2k} < n \leqslant n_{2k+1}$, $U_n = 0$ при $n_{2k+1} < n \leqslant n_{2(k+1)}$, где $n_0 = 1$, $n_{2k+1} = 2n_k$, $n_{2(k+1)} = (n_{2k+1})^2 = 4n_{2k}^2$ и, таким образом, $n_{2k} = 4^{2^k - 1}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для последовательности $U = \{U_n\}$ точки 0 и 1 являются (c)-точками [8]. Поэтому эта последовательность не суммируется методом средних ариф-

метических $(C, 1)$ [4] (основная теорема). Но можно показать, что $t_m^{(2)} = \frac{1}{\ln(m+1)} \sum_{n=0}^{m} \frac{t_n^{(1)}}{n+1} \to 0,\ m \to \infty$, где $t_m^{(1)} = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} U_n$, $m = 1, 2, \ldots$, и $t_0^{(2)} = t_0^{(1)} = U_0$. При этом выполняются все условия доказанной выше теоремы, кроме условия (2).

С другой стороны, нетрудно проверить, что теорема применима к следующим средним последовательности $S = \{S_n\} : t_0^{(\alpha)} = S_0$, $\alpha = 0, 1, \ldots$, $t_m^{(0)} = S_m$, $m = 0, 1, \ldots$,

$$t_m^{(\alpha)} = \begin{cases} (\ln(m+1))^{-1} \sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{t_n^{(\alpha-1)}}{n+1} & \text{при } 1 \leqslant \alpha < \gamma_1, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \\ (m+1)^{-1} \sum\limits_{n=0}^{m} t_n^{(\alpha-1)} & \text{при } \gamma_1 \leqslant \alpha < \gamma_2, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \\ (\ln(m+1))^{-1} \sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{t_n^{(\alpha-1)}}{m-n+1} & \text{при } \gamma_2 \leqslant \alpha < +\infty, \ m = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

где γ_1, γ_2 — некоторые фиксированные натуральные числа и $\gamma_1 < \gamma_2$.

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
2. *Барон С. А.* Введение в теорию суммируемости рядов.— Таллинн: Валгус, 1977.— 280 с.
3. *Реймерс Э.* Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядов // Учен. зап. Тарт. ун-та.— 1961.— **102**.— С. 73—81.
4. *Jurkat W., Peyerimhoff A.* Mittelwersätze bei Matrix und Integral transformation // Math. Z.— 1951.— 55.— S. 91—108.
5. *Давыдов Н. А.* Теоремы тауберова типа для итераций методов взвешенных арифметических средних // Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, № 3.— С. 298—305.
6. *Михалин Г. А.* Теоремы типа Лительвуда для (H, p_n, α) и (C, p_n, α) методов суммирования // Приближенные методы мат. анализа.— Киев : Киев. пед. ин-т, 1977. — С 73—81.
7. *Билоцкий Н. Н.* Сходимость по отрезкам и теоремы тауберового типа // Там же.— Киев : 1978.— С. 3—11.

Киев. пед. ин-т

Получено 24.07.87