УДК 517.948

С. В. Переверзев

Оценка сложности приближенного решения уравнений Фредгольма второго рода с дифференцируемыми ядрами

В настоящей работе исследуется задача оптимизации по сложности алгоритмов приближенного решения уравнений Фредгольма II рода. Постановка этой задачи, а также терминология, факты и обозначения, используемые по ходу изложения, приведены в [1, 2].

Пусть

$$\theta_m = (2^{2m-1} - 1,\ 2^{2m} - 1] \bigcup_{k=1}^{m} [0, 2^{2m-k} - 1] \times (2^{k-1} - 1,\ 2^k - 1],$$

а $\Gamma^m = \{(t, \tau) : (|t|, |\tau|) \in \theta_m\}$. Рассмотрим способ задания информации T^m об уравнениях

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \equiv \int_0^{2\pi} H(t, \tau)\, z(\tau)\, d\tau + f(t) \tag{1}$$

из класса Ψ_C^r, определяемый набором функционалов

$$T^m(H, f) = \left(\int\limits_Q H(t, \tau) \cos\left(kt - \frac{\pi i}{2}\right) \cos\left(n\tau - \frac{\pi j}{2}\right) dt d\tau, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos\left(lt - \frac{\pi i}{2}\right) dt, \quad i, j = 0, 1;\ k, n, l = 0, 1, \ldots;$$

$$l \in [0, 4^m - 1];\ (k. n) \in \theta_m).$$

В набор T^m входят коэффициенты Фурье ядер $H(t, \tau)$ с гармониками из «ступенчатого гиперболического креста» [3, с. 7], в качестве которого в данном случае используется множество Γ^m. Легко видеть, что

$$\operatorname{card}(T^m) \asymp m2^{2m}. \tag{3}$$

Поставим в соответствие каждому оператору $H \in \mathcal{H}_C^r$ оператор

$$H^m = \sum_{k=1}^{m} V_{2^{2m-k}} H(S_{2^k} - S_{2^{k-1}}) + V_{2^{2m}} H S_1,$$

где

$$S_n f(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t - \tau) \right] f(\tau)\, d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$V_{2n} f(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{n}\right) \cos k(t - \tau) f(\tau)\, d\tau + S_{n+1} f(t)$$

— операторы Фурье и Валле Пуссена. Для построения оператора H^m достаточно знать коэффициенты Фурье ядра оператора H с гармониками из гиперболического креста Γ^m.

Лемма 1. *При $r = 1, 2, \ldots$ для оператора $H \in \mathcal{H}_C^r$*

$$\| H - H^m \|_{C \to C} \ll m 2^{-mr}, \tag{4}$$

$$\| H - H^m \|_{C^r \to C} \ll m 2^{-2mr}. \tag{5}$$

Запись $a_m \ll b_m$ означает, что существует независимая от m постоянная c такая, что начиная с некоторого m_0 $a_m \leqslant c b_m$.

Доказательство. Докажем неравенство (5). Неравенство (4) доказывается аналогично. В силу соотношения (25) из [1] для $H \in \mathcal{H}_C^r$ и $f \in C^r$ имеем

$$\|(H - HS_{2^m}) f \|_C \ll 2^{-2mr} \| f^{(r)} \|_C. \tag{6}$$

Учитывая представление

$$HS_{2^m} = \sum_{k=1}^{m} H(S_{2^k} - S_{2^{k-1}}) + HS_1$$

и вид оператора H^m, находим для любой функции $f \in C^r$

$$\| (H - H^m) f \|_C \leqslant \|(H - HS_{2^m}) f \|_C + \|(HS_{2^m} - H^m) f \|_C \leqslant \|(H - HS_{2^m}) f \|_C +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \|(H - V_{2^{2m-k}} H)(S_{2^k} - S_{2^{k-1}}) f \|_C + \|(H - V_{2^{2m}} H) S_1 f \|_C. \tag{7}$$

Воспользовавшись известными оценками погрешности приближения дифференцируемых функций суммами Фурье и Валле Пуссена, получим

$$\|(H - V_{2^{2m-k}} H)(S_{2^k} - S_{2^{k-1}}) f \|_C \ll 2^{-(2m-k)r} \|(S_{2^k} - S_{2^{k-1}}) f \|_{L_2} \ll$$

$$\ll 2^{-(2m-k)r} (\| f - S_{2^k} f \|_{L_2} + \| f - S_{2^{k-1}} f \|_{L_2}) \ll$$

$$\ll 2^{-(2m-k)r} \| f^{(r)} \|_{L_2} (2^{-kr} + 2^{-(k-1)r}) \ll 2^{-2mr} \| f^{(r)} \|_C,$$

$$\|(H - V_{2^{2m}} H) S_1 f \|_C \ll 2^{-2mr} \| f \|_C. \tag{8}$$

Неравенство (5) следует теперь из (6)—(8). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $g(t)$ — произвольный тригонометрический многочлен порядка не выше $2^{2m} - 1$. Тогда для представления тригонометрического многочлена $H^m g(t)$ в стандартном виде*

$$a_0 + \sum_{l=1}^{2^{2m}-1} a_l \cos lt + b_l \sin lt \tag{9}$$

требуется выполнить $p \ll m 2^{2m}$ арифметических операций над коэффициентами многочлена $g(t)$ и коэффициентами Фурье ядра $H(t, \tau)$ с гармониками из креста Γ^m.

Доказательство. Пусть $g(t) = c_0 + \sum_{l=1}^{2^{2m}-1} c_l \cos lt + d_l \sin lt$. Из определения оператора H^m следует, что для $l \in (2^{k-1} - 1, 2^k - 1]$ $H^m(d_l \sin lt) = d_l V_{2^{2m-k}} H \sin lt$. Отметим, что $V_{2^{2m-k}} H \sin lt$ является тригонометрическим многочленом порядка не выше $2^{2m-k} - 1$, коэффициенты которого с точностью до постоянных множителей совпадают с коэффициентами Фурье ядра $H(t, \tau)$ с гармониками из множества $\Gamma^m \cap \{(t, \tau) : \tau = -l\}$. Поэтому для представления $H^m(d_l \sin lt)$ в виде (9) нужно выполнить не более $4(2^{2m-k} - 1) + 2 < \frac{2^{2m+2}}{2^k} \leqslant \frac{2^{2m+2}}{l+1}$ операций умножения. Аналогично для представления $H^m(c_l \cos lt)$ в виде (9) нужно выполнить не более $2^{2m+2}/(l+1)$ операций. Это означает, что число арифметических операций, которые нужно выполнить для представления всех многочленов $H^m(d_l \sin lt)$, $H^m(c_l \cos lt)$, $l = 0, 1, \ldots, 2^{2m} - 1$, в виде (9), не превышает величину

$$q = \sum_{l=0}^{2^{2m}-1} \frac{2^{2m+3}}{l+1} \ll 2^{2m} \sum_{l=0}^{2^{2m}-1} \frac{1}{l+1} \ll m 2^{2m}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что после представления всех многочленов $H^m(d_l \sin lt)$, $H^m(c_l \cos lt)$ в виде (9) для перехода от представления

$$H^m g(t) = \sum_{l=0}^{2^{2m}-1} H^m(c_l \cos lt) + H^m(d_l \sin lt)$$

к представлению (9) (т. е. для приведения подобных членов) нужно выполнить не более $p_1 \ll m 2^{2m}$ арифметических операций.

Рассмотрим алгоритм $A^m \in \mathcal{A}(T^m)$, при котором каждому уравнению (1) из класса Ψ_C^r в качестве приближенного решения сопоставляется функция

$$z(A^m) = z_n + (I - H^m S_{2^n})^{-1} (V_{2^{2m}} f + H^m z_n - z_n),$$

где z_n — решение уравнения $z_n = H^m S_{2^n} z_n + V_{2^{2m}} f$, $n = \left[\frac{2m}{3}\right]$, $[p]$ — целая часть числа p. Используя леммы 1 и 2 и повторяя без изменений ход рассуждений при доказательстве предложения 1 из [2], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *При алгоритме $A^m \in \mathcal{A}(T^m)$ для представления приближенного решения $z(A^m)$ любого уравнения из Ψ_C^r в стандартной фор-*

ме тригонометрического многочлена порядка не выше $2^{2m}-1$ (9) *требуется выполнить не более* $p \ll m2^{2m}$ *арифметических операций над значениями функционалов из* T^m. *При этом для погрешности* $e(\Psi_C^r, A^m)$ *алгоритма* A^m *на классе* Ψ_C^r *имеет место оценка* $e(\Psi_C^r, A^m) \ll m2^{-2mr}$.

Пусть, как и в [1, 2], $\mathrm{comp}_C(\Psi_C^r, \varepsilon)$ — сложность задачи приближенного решения уравнений из Ψ_C^r с точностью ε в метрике C. Тогда в силу теоремы 1, соотношения (3) и следствия 1 [1] получим такое утверждение.

Теорема 2. *При* $r = 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon^{-1/r} \ll \mathrm{comp}_C(\Psi_C^r, \varepsilon) \ll \varepsilon^{-1/r} \log^{1+1/r} \frac{1}{\varepsilon} .$$

Порядок $\mathrm{comp}_C(\Psi_C^r, \varepsilon)$ *в степенной шкале реализует способ задания информации* T^m *и алгоритм* A^m *при* $\varepsilon \asymp m2^{-2mr}$.

Замечание 1. В работе [4] исследовалась оптимизация алгоритмов приближенного решения, использующих в качестве информации об уравнениях Фредгольма II рода значение ядра и свободного члена в некоторой системе точек. При этом установлено, что сложность любого такого алгоритма, обеспечивающего приближенное решение уравнений из Ψ_C^r с точностью ε в метрике C, по порядку не меньше чем $\varepsilon^{-2/r}$. Сравнивая этот результат с теоремой 2, заключаем, что любой алгоритм, использующий в качестве информации об уравнениях из Ψ_C^r значения ядра и свободного члена в некоторых точках, не оптимален по сложности для этого класса.

Замечание 2. Когда работа была направлена в печать, автору стало известно, что в обзорной статье [5] поставлен вопрос об оценке сложности задачи приближенного решения уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами и свободными членами. Таким образом, настоящая статья содержит ответ на вопрос из [5] в случае класса уравнений Ψ_C^r.

1. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма второго рода с гладкими ядрами. I // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 84—91.
2. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма второго рода с гладкими ядрами. II // Там же.— 1989.— **41**, № 2.— С. 189—193.
3. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1986.— **178**.— С. 3—112.
4. *Емельянов К. В., Ильин А. М.* О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1967.— **7**, № 4.— С. 905—910.
5. *Wozniakowski H.* Information — Based Complexity // Ann. Rev. Comput. Sci.— 1986.— N 1.— P. 319—380.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 29.12.87