УДК 517.926.4

Л. К. Орлик

Об экспоненциальной характеристике линейного дифференциального уравнения 1-го порядка в банаховом пространстве

Рассмотрим начальную задачу

$$dy/dt - A(t)\,y = f(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \qquad y(0) = 0, \tag{1}$$

где $y(t)$ и $f(t)$ — непрерывные вектор-функции со значениями в некотором (действительном или комплексном) банаховом пространстве X; $A(t)$ — семейство линейных операторов, действующих в этом пространстве, равномерно ограниченных по норме: $\| A(t) \| \leqslant M\ (<\infty)$.

Пусть $f(t)$ — правая часть уравнения (1) — пробегает линейное пространство $E_\alpha = \{f(t) \mid \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln \| f(t) \|_X \leqslant \alpha\}$. Очевидно, для $f(t)$ из E_α:

$$\| f(t) \|_X \leqslant G_\varepsilon \exp(\alpha + \varepsilon)\, t. \tag{2}$$

Обозначим через $\varkappa(\alpha)$ нижнюю грань тех β, при которых пространство E_β содержит все решения $y(t)$ начальной задачи (1). Назовем $\varkappa(\alpha)$ экспоненциальной характеристикой этой задачи.

Теорема. *Пусть операторный коэффициент $A(t)$ в уравнении (1) является периодической функцией*

$$A(t + \omega) = A(t). \tag{3}$$

Если α_0 — генеральный показатель однородного уравнения

$$dy/dt = A(t)\, y, \tag{4}$$

то $\varkappa(\alpha) = \alpha_0$ при $\alpha \leqslant \alpha_0$; $\varkappa(\alpha) = \alpha$ при $\alpha > \alpha_0$.

Требование периодичности операторного коэффициента $A(t)$ нельзя опустить. Это показано на примере, приведенном в [1].

Доказательство теоремы опирается на исследование интегрального оператора

$$y(t) = (Kf)(t) = \int_0^t K(t, s)\, f(s)\, ds, \tag{5}$$

задающего решение (1). Рассматривается поведение этого оператора в линейном пространстве E_α и банаховом пространстве $B_\alpha = \{f(t) \mid \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \| f(t) \|_X \times \exp(-\alpha t) < \infty\}$ с нормой $\| f \|_{B_\alpha} = \sup\limits_{0 \leqslant t < \infty} \| f(t) \|_X \exp(-\alpha t)$. Используется классическая теорема Банаха о замкнутом операторе [2, с. 59].

Приведем «узловые» моменты доказательства. Известно [3, с. 170], что оператор Коши $U(t)$ уравнения (4) — функция экспоненциального типа $\| U(t) \| \leqslant N_\varepsilon \exp(\alpha_0 + \varepsilon)\, t$ с показателем экспоненциального роста α_0, равным старшему показателю этого уравнения. Из (3) следует [3, с. 283], что он совпадает с генеральным показателем.

Для эволюционного оператора $K(t, s)$ уравнения (4) имеет место соотношение

$$\| K(t, s) \| \leqslant C_\varepsilon \exp(\alpha_0 + \varepsilon)(t - s). \tag{6}$$

Из (5), (6) и (2) вытекает оценка «сверху»:

$$\| y(t) \|_X \leqslant C_\varepsilon G_\varepsilon \exp(\alpha_0 + \varepsilon)\, t \cdot \frac{\exp(\alpha - \alpha_0)\, t - 1}{\alpha - \alpha_0} =$$

$$= \begin{cases} C'_\varepsilon \exp(\alpha+\varepsilon)\,t \text{ при } \alpha>\alpha_0; \\ C'_\varepsilon \exp(\alpha_0+\varepsilon)\,t \text{ при } \alpha\leqslant\alpha_0. \end{cases}$$

Значит, $\varkappa(\alpha)\leqslant\max(\alpha, \alpha_0)$.

Для получения оценки «снизу» заметим, что существуют s_0 и последовательности $t_n\to\infty$, $M_n\to\infty$, для которых

$$\| K(t_n, s_0)\| = M_n \exp(\alpha_0-\varepsilon)(t_n-s_0). \tag{7}$$

Рассматривается последовательность начальных задач

$$dy_n/dt - A(t)\,y_n = f_n(t), \quad y_n(0)=0,$$

где правые части $f_n(t)$ строятся следующим образом.

При $\alpha\leqslant\alpha_0$ берем последовательность векторов f_n из X, $\|f_n\|_X=1$ такую, что $\|K(t_n, s_0)\|\geqslant\|K(t_n, s_0)f_n\|_X\geqslant\|K(t_n, s_0)\|(1-\varepsilon)$, ($(t_n, s_0)$—из (7), $\varepsilon>0$ фиксировано) и полагаем

$$f_n(t) = \begin{cases} f_n \exp\alpha t, & t\in[s_0, s_0+\delta_n], \\ 0, & t\,\overline{\in}\,[s_0, s_0+\delta_n], \end{cases}$$

где $\delta_n=\exp(-2\varepsilon t_n)$, $n=1, 2, \ldots$

При $\alpha>\alpha_0$ берем произвольный вектор f_0 из X, $\|f_0\|_X=1$. Ясно, что

$$\|K(t_0, s)f_0\|_X = \|[K(t_0, s)-K(t_0, t_0)+K(t_0, t_0)]f_0\|_X\geqslant\|K(t_0, t_0)f_0\|_X - \\ - \|[K(t_0, s)-K(t_0, t_0)]f_0\|_X\geqslant 1-\varepsilon,$$

если $t-s_0<\Delta$ и Δ достаточно мало. Полагаем

$$f_n(t) = \begin{cases} f_0\exp\alpha t, & t\in[t_0+n\omega-\Delta, \quad t_0+n\omega], \\ 0, & t\,\overline{\in}\,[t_0+n\omega-\Delta, \quad t_0+n\omega], \quad n=1, 2, \ldots \end{cases}$$

Доказательство ведется от противного. С одной стороны, из замкнутости оператора (5) имеем

$$\|y\|_{B_{\beta_0}}\leqslant M_1\|f\|_{B_\alpha}, \quad \varkappa(\alpha)<\beta_0<\max(\alpha, \alpha_0). \tag{8}$$

С другой стороны показывается, что $\|y_n\|_{B_{\beta_0}}\to\infty$. Это противоречит (8), поскольку $\|f_n\|_{B_\alpha}=1$. Таким образом, доказано, что $\varkappa(\alpha)=\max(\alpha, \alpha_0)$, что и требуется.

З а м е ч а н и е. Ясно, что теорема справедлива и для начальной задачи с ненулевым начальным условием.

1. *Орлик Л. К., Рутман М. А.* Об экспоненциальных показателях решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Изв. вузов. Математика.— 1982.— № 6.— С. 80—81.
2. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.

Одес. гидрометеорол. ин-т

Получено 01.12.86