УДК 513.88+517.927

С. Н. Дементьев, Л. П. Яновский

Двусторонние оценки решений операторных уравнений

Начиная с основополагающей работы С. А. Чаплыгина [1], вопросам исследования и приложений двусторонних методов оценки решений различных классов уравнений уделялось большое внимание (см., например, работы [2—4] и имеющуюся там библиографию). Значительные усилия в последние годы были направлены на снятие ограничений типа монотонной или вогнутой нелинейности исследуемых уравнений по переменным решения. В настоящей работе предлагается схема исследования операторных неравенств в банаховом пространстве E с конусом K, приводящая в приложениях к новым теоремам сравнения для решений системы дифференциальных уравнений с немонотонными нелинейностями и нелинейной эллиптической задачи. В понятиях и обозначениях теории полуупорядоченных пространств будем следовать работе [5].

1. Теорема сравнения положительных решений операторных неравенств в полуупорядоченном банаховом пространстве. Рассмотрим в банаховом пространстве E с конусом K уравнение

$$Lx = Tx, \ x \in K, \tag{1}$$

с линейным положительно обратимым на K оператором L ($L^{-1}x \geqslant 0$, $x \in K$) и нелинейным положительным оператором T. Далее будем предполагать, что решение уравнения (1) существует и единственное.

Систему неравенств

$$\begin{aligned} Lv &\leqslant T_1(v, w), \\ Lw &\geqslant T_2(v, w), \ v, w \in K, \end{aligned} \tag{2}$$

назовем системой сравнения для уравнения (1), если существуют удовлетворяющие (2) v, w такие, что $v \leqslant w$ и $x \in \langle v, w\rangle$, где x — решение уравнения (1), а $\langle v, w\rangle$ — конусный отрезок ($\langle v, w\rangle = \{y \mid v \leqslant y \leqslant w\}$).

Через $K(u_0)$ обозначим множество u_0-ограниченных элементов $x \in K$, т. е. элементов, для которых $\alpha(x) u_0 \leqslant x \leqslant \beta(x) u_0$, где α, β — некоторые положительные постоянные.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *система* (2) *разрешима в* $K(u_0)$, *т. е. существуют* $v, w \in K(u_0)$, *удовлетворяющие* (2);

2) *оператор* L *положительно обратим на* K, *а оператор* $L^{-1}T$ *действует из* K *в* $K(u_0)$;

3) $T_2(v, w) \geqslant T_1(v, w)$ *при* $v, w \in K$;

4) $Tx \in \langle T_1(v, w), T_2(v, w)\rangle$ *при* $v \leqslant x \leqslant w$;

5) *операторы* $T_1(v, w)$, $T_2(v, w)$ *вогнуты соответственно по переменным* v, w, *т. е. при* $0 < \alpha < 1$, $v, w \in K(u_0)$ *и некоторых* $\varepsilon_1(\alpha, v) > 0$, $\varepsilon_2(\alpha, w) > 0$ *справедливы неравенства* $T_1(\alpha v, w) \geqslant (\alpha + \varepsilon_1(\alpha, v)) T_1(v, w)$, $T_2(v, \alpha w) \geqslant (\alpha + \varepsilon_2(\alpha, w)) T_2(v, w)$.

Тогда система неравенств (2) *является системой сравнения для уравнения* (1).

Обсудим условия теоремы 1. Пусть K — миниедральный конус. Если существуют $\inf\limits_{x \in \langle z_1, z_2\rangle} Tx$ и $\sup\limits_{x \in \langle z_1, z_2\rangle} Tx$, то можно положить

$$T_1(v, w) = \inf Tx, \ \inf(v, w) \leqslant x \leqslant \sup(v, w), \tag{3}$$

$$T_2(v, w) = \sup Tx, \ \inf(v, w) \leqslant x \leqslant \sup(v, w). \tag{4}$$

Далее, если существует диагональное представление для T, т. е. определен нелинейный оператор $\tilde{T}(v, w) : E \times E \to E$ такой, что $\tilde{T}(x, x) = Tx$, то можно определить

$$T_1(v, w) = \inf \tilde{T}(x, y), \ \inf(v, w) \leqslant x, y \leqslant \sup(v, w), \tag{5}$$

$$T_2(v, w) = \sup \tilde{T}(x, y), \ \inf(v, w) \leqslant x, y \leqslant \sup(v, w). \tag{6}$$

В частном случае, когда T — монотонный оператор, а $v \leqslant w$, получаем $T_1(v, w) = Tv$, $T_2(v, w) = Tw$; если T — антимонотонный оператор и $v \leqslant w$, то $T_1(v, w) = Tw$, $T_2(v, w) = Tv$. Наконец если T имеет диагональное представление, а $\tilde{T}(v, w)$ — гетеротонный оператор, т. е. монотонен по v и антимонотонен по w, при $v \leqslant w$ полагаем

$$T_1(v, w) = \tilde{T}(v, w), \tag{7}$$

$$T_2(v, w) = \tilde{T}(w, v). \tag{8}$$

Представление (7), (8) широко использовалось ранее для исследования операторных уравнений и неравенств (см., например, [3], [6], [7]).

Будем говорить, что система сравнения

$$Lv \leqslant R_1(v, w), \tag{9}$$

$$Lw \geqslant R_2(v, w) \tag{10}$$

для уравнения (1) грубее системы (2), если существует решение v, w ($v \leqslant w$) системы (2), удовлетворяющее (9), (10), т. е. $R_1(v, w) \geqslant T_1(v, w)$, $R_2(v, w) \leqslant T_2(v, w)$. Очевидно, что система сравнения, определенная формулами (5), (6) (в частном случае формулами (7), (8)), грубее, чем система сравнения (3), (4).

Доказательство теоремы 1. Из неравенства $w - v \geqslant L^{-1}(T_2(v, w) - T_1(v, w))$, условия 3 и положительной обратимости оператора L следует $0 \leqslant v \leqslant w$. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$L\tilde{x} = \begin{cases} T\tilde{x}, & \text{при } 0 \leqslant v \leqslant \tilde{x}, \\ Tv, & \text{при } 0 \leqslant v \not\leqslant \tilde{x}. \end{cases}$$

Либо решение $\tilde{x}$ данного уравнения является решением уравнения (1), либо $\tilde{x} = L^{-1}Tv$. Для доказательства теоремы достаточно убедиться в выполнении неравенства $v \leqslant \tilde{x} \leqslant w$. Покажем сначала, что $\tilde{x} \leqslant w$. Если $\tilde{x} = L^{-1}Tv$, то в силу условия 4 имеем $w - \tilde{x} \geqslant L^{-1}(T_2(v, w) - Tv) \geqslant 0$. Если же $\tilde{x} \geqslant v$, то предположим, что $\tilde{x} \not\leqslant w$. Тогда $\inf\left\{\alpha : \hat{x} \leqslant \dfrac{1}{\alpha} w\right\} = \alpha_0 < 1$. Используя условие 5 вогнутости $T_2(v, w)$ по w, получаем

$$\frac{1}{\alpha_0 + \varepsilon_2(\alpha_0, w)} w - \tilde{x} \geqslant L^{-1}\left(\frac{1}{\alpha_0 + \varepsilon_2(\alpha_0, w)} T_2(v, w) - T\tilde{x}\right) \geqslant$$

$$\geqslant L^{-1}\left(T_2\left(v, \frac{1}{\alpha_0} w\right) - T\tilde{x}\right) \geqslant 0.$$

Последнее соотношение противоречит выбору числа α_0. Следовательно, $\alpha_0 = 1$ и $\tilde{x} \leqslant w$.

Теперь покажем, что $\tilde{x} \geqslant v$. Предположим, что $\tilde{x} \not\geqslant v$. Тогда $\tilde{x} = L^{-1}Tv \in K(u_0)$, и $\sup\{\alpha : \tilde{x} \geqslant \alpha v\} = \alpha_1 < 1$. Используя вогнутость $T_1(v, w)$ по v и очевидное неравенство $\alpha_1 v \leqslant v \leqslant w$, получаем $\tilde{x} - (\alpha_1 + \varepsilon_1(\alpha_1, v))\, v \geqslant L^{-1}(Tv - T_1(\alpha_1 v, w)) \geqslant 0$, что противоречит выбору α_1. Т. е. $\alpha_1 = 1$ и $\tilde{x} \geqslant v$. Теорема доказана

Условия 5 можно заменить на более слабые условия вогнутости

$$T_1(\alpha v, w) \geqslant \alpha T_1(v, w), \ \alpha \in (0, 1),$$

$$T_2(v, \alpha w) \geqslant \alpha T_2(v, w),$$

если элементы v, w удовлетворяют менее грубой системе сравнения $Lv \leqslant T_1(v, w) - \varepsilon Lv$, $Lw \geqslant T_2(v, w) + \varepsilon Lw$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим метод последовательного улучшения оценок решения уравнения (1).

Положим $v_1 = T_1(v, w)$, $w_1 = T_2(v, w)$. Тогда справедливы оценки $v \leqslant v_1 \leqslant x \leqslant w_1 \leqslant w$. Пусть, кроме того, выполнены условия теоремы 1, а v, w — элементы, удовлетворяющие системе неравенств (2). Рассмотрим итерационный процесс $LV_{k+1} = T_1(v_k, w_k)$, $v_0 = v$, $w_0 = w$, $Lw_{k+1} = T_2(v_k, w_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ Предположим, что выполнено условие обобщенной монотонности $\langle T_1(v, w), T_2(v, w)\rangle \subset \langle T_1(z_1, z_2); T_2(z_1, z_2)\rangle$ при $z_1 \leqslant w \leqslant z_2$. Тогда справедлива цепочка неравенств $v = v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v \leqslant v_k \leqslant \ldots \leqslant x \leqslant \ldots \leqslant w_k \leqslant \ldots \leqslant w_1 \leqslant w_0 = w$, где x — решение уравнения (1). Если же дополнительно предположить выполнение одного из условий: а) конус K правилен; б) конус K сильно миниедрален; в) значения оператора $L^{-1}T$ на конусных отрезках $\langle v, w\rangle$ относительно компактны, то последовательности $\{v_k\}$, $\{w_k\}$ сходятся к решениям v^*, w^* системы

$$Lv^* = T_1(v^*, w^*), \tag{11}$$

$$Lw^* = T_2(v^*, w^*), \tag{12}$$

дающим наименее грубую оценку решения уравнения (1).

Наконец, если $v^* = w^*$, то из существования и единственности решения системы (11), (12) следует существование и единственность решения x уравнения (1), причем $x = v^* = w^*$.

2. Дифференциальные неравенства в R^n_+. Пусть n-мерное пространство R полуупорядочено неотрицательным ортантом R^n_+. Обозначим внутренность ортанта R^n_+ через $\mathring{R}^n_+$ и отметим, что используемые далее знаки $\leqslant$, $\geqslant$ обозначают, там где это необходимо, покомпонентную полуупорядоченность в R^n_+.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(t, x), \ x(t) \in R^n, \ t \in [0, T], \tag{13}$$

где $f(t, x) = (f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$ — непрерывная по совокупности переменных вектор-функция. Будем считать, что решение уравнения (13) единственное и продолжимо на отрезок $[0, T]$. Изучим разрешимость дифференциальных неравенств в R^n, отказавшись от обычного предположения о внедиагональной монотонности правой части по переменным решения (условия Камке — Важевского).

Предложение 1. *Пусть вектор-функция $x(t) = (x_1(t), \ldots$ $\ldots, x_n(t))$, $x(0) \in R^n_+$, $t \in [0, T]$, удовлетворяет системе строгих неравенств*

$$dx_1/dt > f_1(t, x_1, \ldots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dx_n/dt > f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \ t \in [0, T],$$

с непрерывными по совокупности переменных функциями $f_1, \ldots, f_n$, обладающими свойством внедиагональной положительности, т. е. при каждом t, $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, n$

$$f_i(t, x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), 0, x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t)) \geqslant 0, \ x_j(t) \geqslant 0,$$
$$j = 1, \ldots, n, \ j \neq i.$$

Тогда вектор-функция $x(t) \in R^n_+$.

Доказательство предложения 1 почти очевидно, так как в каждой точке пересечения траектории $x(t)$ с границей конуса R^n_+ строго возрастают координаты, равные нулю.

С вектор-функцией $f(t, x)$ свяжем пару вектор-функций $F_1(t, v, w)$, $F_2(t, v, w)$ таких, что

$$\begin{aligned} (F_1(t, v, w))_i &= \inf f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \min(v_i, w_i), x_{i+1}, \ldots, x_n), \\ &\min(v_j, w_j) \leqslant x_j \leqslant \max(v_j, w_j); \ i, j = 1, \ldots, n; \ i \neq j, \\ (F_2(t, v, w))_i &= \sup f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \max(v_i, w_i), x_{i+1}, \ldots, x_n), \\ &\min(v_j, w_j) \leqslant x_j \leqslant \max(v_j, w_j); \ i, j = 1, \ldots, n; \ i \neq j. \end{aligned} \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть существует пара вектор-функций $v^0(t)$, $w^0(t)$, $t \in [0, T]$, таких, что*

$$v^0(0) \leqslant x(0) \leqslant w^0(0), \ v_i^0(0) \leqslant w_i^0(0), \ i = 1, \ldots, n \tag{15}$$

и выполнены строгие оценки

$$\begin{aligned} &F_1(t, v^0(t), w^0(t)) - dv^0/dt \in \mathring{R}^n_+, \\ &dw^0/dt - F_2(t, v^0(t), w^0(t)) \in \mathring{R}^n_+. \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда для решения $x(t)$ уравнения (13) *справедлива двусторонняя оценка* $v^0(t) \leqslant x(t) \leqslant w^0(t)$, $t \in [0, T]$.

Доказательство теоремы 2 повторяет основные этапы доказательства теоремы 1 с соответствующими изменениями. Сначала показываем, что $v^0(t) \leqslant w^0(t)$, $t \in [0, T]$. Затем рассматриваем вспомогательную систему уравнений

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{f}(t, \tilde{x}), \ \tilde{x}(0) = x(0), \tag{17}$$

где $\tilde{f}_i(t, \tilde{x}) = f_i(t, s_1(t), \ldots, s_n(t))$,

$$s_i(t) = \begin{cases} v_i^0(t) \text{ при } \tilde{x}_i(t) < v_i^0(t), \\ \tilde{x}_i(t) \text{ при } v_i^0(t) \leqslant \tilde{x}_i(t) \leqslant w_i^0(t), \\ w_i^0(t) \text{ при } \tilde{x}_i(t) > w_i^0(t), \ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Для $\tilde{y}_i(t) = \tilde{x}_i(t) - v_i^0(t)$, $i = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство $d\tilde{y}_i/dt > > \tilde{f}_i(t, \tilde{x}) - (F_1(t, v^0, w^0))_i = \tilde{f}_i(t, v^0 + \tilde{y}) - (F_1(t, v^0, w^0))_i$. Учитывая неравенство $w^0(t) \geqslant v^0(t)$, убеждаемся, что выполнены условия предложения 1 и $\tilde{x}(t) \geqslant v^0(t)$. Далее, аналогично предыдущему, обосновываем применение предложения 1 к разности $\tilde{z}(t) = w^0(t) - \tilde{x}(t)$, откуда $\tilde{z}(t) \geqslant 0$. Итак, показано, что $v^0(t) \leqslant \tilde{x}(t) \leqslant w^0(t)$. Но в этом случае решение $\tilde{x}(t)$ системы (17) совпадает с решением $x(t)$ системы (13). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2 остается справедливой, если вместо вектор-функций F_1, F_2 из (14) взять вектор-функции $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$ такие, что $\tilde{F}_1 \leqslant \leqslant F_1$ и $\tilde{F}_2 \geqslant F_2$.

Замечание 2. В случае, когда $f(t, x)$ не убывает по внедиагоналным переменным и $v \leqslant w$, $F_1(t, v, w) = f(t, v)$, $F_2(t, v, w) = f(t, w)$ и из теоремы 2 следует известное утверждение о дифференциальных неравенствах (см., например, теорему 3.5 из [4]).

Замечание 3. Пусть существует вектор-функция $\hat{f}(t, u, v)$, u, $v \in R^n$, такая, что $\hat{f}(t, x, x) = f(t, x)$. Положим

$$(\hat{F}_1)_i = \inf_{a_j \leqslant x_j, y_j \leqslant b_j, j \neq i} \hat{f}_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots$$
$$\ldots, y_{i-1}, a_i, y_{i+1}, \ldots, y_n),$$
$$(\hat{F}_2)_i = \sup_{a_j \leqslant x_j, y_j \leqslant b_j, j \neq i} \hat{f}_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots$$
$$, \ldots y_{i-1}, b_i, y_{i+1}, \ldots, y_n),$$
$$a_i = \min(v_i, w_i), \ b_i = \max(v_i\, w_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, $\hat{F}_1 \leqslant F_1$, $\hat{F}_2 \geqslant F_2$, где F_1, F_2 определены формулами (14). Из замечания 1 следует, что теорема 2 справедлива и для функций $v^0(t)$, $w^0(t)$, удовлетворяющих условиям вида (16) с функциями F_1, F_2 и (15). Можно сформулировать аналогичное утверждение, если диагональному представлению удовлетворяют лишь некоторые координатные функции $f_i(t, x)$, $i = 1, \ldots, n$.

Замечание 4. Пусть выполнены условия, указанные в замечании 3. Пусть дополнительно известно, что $(\hat{f}(t, u, v))_i$ не убывают по $u_1, \ldots$ $\ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$ и не возрастают по $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$. Тогда при $v \leqslant w$ $(\hat{F}_1)_i = \hat{f}_i(t, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_{i-1}, v_i, w_{i+1}, \ldots, w_n)$, $(\hat{F}_2)_i = \hat{f}_i(t, w_1, \ldots$ $\ldots, w_n, v_1, \ldots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$. В этом случае теорема 2 усиливает результат В. И. Опойцева, Т. А. Хуродзе [7].

3. Теорема сравнения для эллиптических уравнений. Пусть Ω — ограниченная открытая область в R^m с достаточно гладкой границей Γ. Рассмотрим дифференциальный оператор $Lx(t) = -\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t_1, \ldots, t_m)\, \partial^2 x/\partial t_i \partial t_j + \sum_{i=1}^{m} a_i(t_1, \ldots, t_m)\, \partial x/\partial t_i + a(t_1, \ldots, t_m)\, x$, где $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \overline{\Omega}$ $(\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma)$.

Предположим, что функция $a(t) \geqslant 0$, $t \in \overline{\Omega}$, и при любых $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и $t \in \overline{\Omega}$ выполнено условие равномерной эллиптичности $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t)\, \xi_i \xi_j > \gamma \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2$, $\gamma > 0$. Известно [8], что решение первой краевой задачи $Lx(t) = y(t)$, $x(t)|_{t\in\Gamma} = 0$, при достаточно гладких функциях $a_{ij}(t)$, $a_i(t)$, $a(t)$, $y(t)$ существует и может быть представлено в виде

$$x(t) = Gy(t) = \int_{\Omega} G(t, s)\, y(s)\, ds. \tag{18}$$

Ядро $G(t, s)$ называется функцией Грина первой краевой задачи. Справедливы оценки $0 \leqslant G(t, s) \leqslant k_0 |t - s|^{-m+2}$, $m > 2$, $0 \leqslant G(t, s) \leqslant k_0 \ln |t - s|$, $m = 2$. Из этих оценок и теорем С. Л. Соболева [9] об операторах типа потенциала следует, что оператор G действует и вполне непрерывен из $L_p(\overline{\Omega})$ при $p > m/2$ в $G(\overline{\Omega})$ (в частности, G вполне непрерывен в $C(\overline{\Omega})$). Далее будем понимать под решением функцию, удовлетворяющую (18).

Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$Lx = f(t, x), \quad x(t)|_{t\in\Gamma} = 0, \tag{19}$$

с нелинейной неотрицательной функцией f, эквивалентную интегральному уравнению $x(t) = \int_{\Omega} G(t, s) f(s, x(s)) ds$. Пусть функция $f(t, x)$ в (19) непрерывна по совокупности переменных $(t \in \Omega,\ x \in (-\infty, \infty))$. Тогда оператор

$$L^{-1}Tx(t) = \int_{\Omega} G(t, s) f(s, x(s))\, ds$$

вполне непрерывен в $C(\overline{\Omega})$. Так как $f(t, x) \geqslant 0$ при $x \in K$, $G(t, s) \geqslant 0$, то из результатов [5] следует, что оператор $L^{-1}T$ действует из K в $K(u_0)$, а оператор $L^{-1} = G$ положителен на K, где K — конус неотрицательных функций в $C(\overline{\Omega})$, $u_0 = \int_{\Omega} G(t, s)\, ds$. Предположим, наконец, что решение задачи (19) существует и единственное.

Теорема 3. *Пусть существует пара функций $v(t)$, $w(t)$ из $K(u_0) \subset K$, удовлетворяющая системе неравенств*

$$\begin{aligned} &Lv \leqslant f_1(t, v, w),\ t \in \Omega,\ v(t)|_{t\in\Gamma} = 0, \\ &Lw \geqslant f_2(t, v, w),\ t \in \Omega,\ w(t)|_{t\in\Gamma} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Предположим, что $f_2(t, v, w) > f_1(t, v, w)$ при $v, w \in K$, $f_2(t, v, w) \geqslant f(t, x) \geqslant f_1(t, v, w)$ при $v \leqslant x \leqslant w$. Пусть выполнены условия вогнутости функций f_1 и f_2: $f_1(t, \alpha v, w) \geqslant (\alpha + \varepsilon_1(\alpha, t, v)) f_1(t, v, w)$, $f_2(t, v, \alpha w) \geqslant (\alpha + \varepsilon_2(\alpha, t, w)) f_2(t, v, w)$ при $0 < \alpha < 1$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$, и непрерывных по t, v, w $\varepsilon_1(\alpha, t, v) > 0$, $\varepsilon_2(\alpha, t, w) > 0$. Тогда система неравенств (20) *является системой сравнения для уравнения* (19).

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1.

1. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.— М. : Гостехиздат, 1950.— 102 с.
2. *Курпель Н. С., Курченко Т. С.* Двусторонние методы решения систем уравнений.— Киев : Наук. думка, 1975.— 184 с.
3. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их приложение.— Киев : Наук. думка, 1980.— 287 с

4. *Мамедов Я. Д., Аширов С., Атдаев С.* Теоремы о неравенствах.— Ашхабад : Ылым, 1980.— 232 с.
5. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.— М. : Физматгиз, 1962.— 386 с.
6. *Опойцев В. И.* Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1978.— **36**, — С. 237—273.
7. *Опойцев В. И., Хуродзе Т. А.* Некоторые теоремы о дифференциальных и интегральных неравенствах // Сообщ. АН ГССР.— 1977.— **87**,— № 3.— С. 565—568.
8. *Миранда К.* Уравнения с частичными производными эллиптического типа.— М. : Изд-во иностр. лит., 1957.— 252 с.
9. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. М. Пустыльник, П. Е. Соболевский.— М. : Наука, 1966.— 499 с.

Воронеж. с-х. ин-т Получено 15.06.87