УДК 517.986

С. В. Онипчук

Идемпотентные меры на компактных полугипергруппах

1. В настоящей работе изучается строение идемпотентных мер, заданных на компактной полугипергруппе. Полугипергруппой называем то, что в [1] есть гипергруппа без инволюции или в [2] «semiconvo».

Показано, что (при дополнительных условиях) идемпотентная мера будет инвариантной на своем носителе (теорема 1). Это свойство идемпотентных мер было существенно использовано в [3] при изучении поведения последовательностей $\{\alpha^{k*}\}$ — k-кратных сверток меры α с собой. В качестве следствия установлено существование инвариантной меры — аналога меры Хаара для групп.

Отметим, что в [2] аналогичные утверждения доказаны в предположении существования инволюции, в [1] — для коммутативной полугипергруппы.

2. Будем придерживаться следующих обозначений: G — компактное хаусдорфово пространство; $C(G)$ — множество ограниченных непрерывных функций на G; $M(G)$ — множество регулярных борелевских мер на G; $M_p(G)$ — подмножество $M(G)$ вероятностных мер; ε_x — вероятностная мера, сосредоточенная в $x \in G$; $\operatorname{supp} \alpha$ — носитель меры α.

Определение 1. *Пара $(G, *)$ называется полугипергруппой, если выполнены следующие условия:* 1) *G — непустое компактное хаусдорфово пространство*; 2) *на $M(G)$ задана бинарная операция «$*$» с помощью формулы* $(\alpha*\beta)(A) = \int\limits_G \int\limits_G \gamma(x, y; A)\, \alpha(dx)\, \beta(dy)$, *$A$ — произвольное борелевское подмножество G*; 3) *операция свертки ассоциативна*; 4) $\forall\, x, y \in G$ $\gamma(x, y) = \varepsilon_x * \varepsilon_y \in M_p(G)$; 5) *операция свертки раздельно непрерывна в топологии* $\sigma(M(G), C(G))$; 6) *если μ — идемпотентная мера из $M_p(G)$, то* $\mu*\varepsilon_x = \varepsilon_x*\mu$ $\forall\, x \in \operatorname{supp} \mu$.

Замечание. Всюду ниже сходимость, замыкание и т. д. означает сходимость, замыкание и т. д. в топологии $\sigma(M(G), C(G))$.

Отметим, что множество полугипергрупп, удовлетворяющих условию 6, содержит все коммутативные полугипергруппы и все гипергруппы, рассматривавшиеся в [2] (теоремы 7.2А и 10.2Е).

Пусть D — множество носителей всех мер из $M_p(G)$. Для произвольных $S_1 = \operatorname{supp} \alpha_1$, $S_2 = \operatorname{supp} \alpha_2$ определим операцию $S_1 * S_2$ соотношением $S_1 * S_2 = S = \operatorname{supp}(\alpha_1 * \alpha_2)$. Поскольку [2] (лемма 3.2) $\operatorname{supp}(\alpha_1*\alpha_2) = \bigcup\limits_{x \in \operatorname{supp} \alpha_1} \bigcup\limits_{y \in \operatorname{supp} \alpha_2} \operatorname{supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$, то $S_1 * S_2$ не зависит от α_i с $\operatorname{supp} \alpha_i = S_i$, $i = 1, 2$.

Пара $(H, *)$ называется подполугипергруппой, если H — непустое замкнутое подмножество G и $H*H \subseteq H$.

Теорема 1. *Мера μ из $M_p(G)$ идемпотентна тогда и только тогда, когда для любых $x \in \operatorname{supp} \mu = H$ $\mu * \varepsilon_x = \mu$.*

Доказательство. Необходимость. Поскольку $H * H = H$, то $(H, *)$ — подполугипергруппа. Пусть

$$P_\mu = \{\alpha \in M_p(G) : \alpha*\mu = \mu*\alpha\}, \quad Q_\mu = \{\beta \in P_\mu : \mu*\beta = \beta\}.$$

Множество Q_μ непусто, поскольку $\mu \in Q_\mu$. Покажем, что Q_μ замкнуто. Действительно, в силу условия 6 определения 1 $\varepsilon_x \in P_\mu$. Тогда, поскольку операция свертки непрерывна и множество мер с конечными носителями плотно в $M_p(H)$ [2] (лемма 2.2), $P_\mu = M_p(H)$. Теперь предположим, что есть $\{\alpha_m\}$ мер из Q_μ сходится к некоторой мере α, $\alpha \in P_\mu$. Тогда в силу непрерывности операции свертки $\alpha*\mu = \alpha$.

Покажем, что Q_μ выпукло и является двусторонним идеалом в P_μ Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_\mu$ и $0 \leqslant a \leqslant 1$ Тогда $\mu*(a\alpha_1 + (1-a)\alpha_2) = a(\mu*\alpha_1) + (1-a)(\mu*\alpha_2) = a\alpha_1 + (1-a)\alpha_2$. Если $\alpha \in Q_\mu$ и $\beta \in P_\mu$, то $\mu*(\alpha*\beta) = (\mu*\alpha)*\beta = \alpha*\beta$, $\mu*(\beta*\alpha) = \mu*\beta*\alpha = \beta*\mu*\alpha = \beta*\alpha$.

Известно [4, п. 1.1.4], что $M_p(H)$ — компактное множество. Таким образом, Q_μ — компактное выпуклое подмножество множества $M_p(H)$.

Пусть K — множество крайних точек множества Q_μ и k — произвольная точка из K. Покажем, что для любого $x \in H$ $\varepsilon_x * k = k$. Пусть $\varepsilon_x * k = k_x$. Поскольку k — крайняя точка Q_μ и $k_x \in Q_\mu$ $\forall x \in H$, то из соотношения $\int\limits_H (\varepsilon_x*k)\, \mu(dx) = \mu*k = k$ получаем, что равенство $k_x = k$ может не выполняться лишь при $x \in A$ таком, что $\mu(A) = 0$.

Множество A не содержит изолированных в H точек, поскольку $\operatorname{supp} \mu$ — наименьшее замкнутое множество H такое, что $\mu(G \setminus H) = 0$. Внутренность A° множества A — пустое множество, поскольку, если $A^\circ \neq \varnothing$, то соотношение $\mu(A^0) = 0$ противоречит определению носителя меры [4, с. 33].

Таким образом, A состоит только из точек, предельных для множества $H \setminus A$. Поэтому для любой точки $y \in A$ существует сеть $\{\varepsilon_x\}$ мер с $x \in H \setminus A$

такая, что $\{\varepsilon_x\}$ сходится к ε_y. И, поскольку операция свертки непрерывна, то $\varepsilon_y * k = k \ \forall\, y \in A$.

Согласно теореме Крейна — Мильмана Q_μ совпадает с замыканием выпуклой линейной оболочки множества K. Поэтому (поскольку операция свертки непрерывна) для любого $x \in H$ $\varepsilon_x * \mu = \mu$. Теорема доказана.

Как отмечалось выше, множество вероятностных мер на H с конечным носителем плотно в $M_p(H)$ и так как операция свертки непрерывна, справедливы следствия.

С л е д с т в и е 1. *Пусть α — произвольная мера из $M_p(H)$. Тогда $\alpha * \mu = \mu$.*

С л е д с т в и е 2. *Если μ, ν — идемпотентные меры и* $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\nu$, *то $\mu = \nu$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

С л е д с т в и е 3. *Множество $K \subset G$ тогда и только тогда является носителем некоторой идемпотентной меры $\mu \in M_p(G)$, когда для любого $x \in K$ $\{x\} * K = K$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, если $\{x\}*K = K$ для любого $x \in K$, то и $K*K = K$. Пусть $\alpha \in M_p(G)$ с $\operatorname{supp}\alpha = K$. Известно [5], что последовательность $\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\alpha^{k*}\right\}$ сходится к идемпотентной мере μ из $M_p(G)$ такой, что

$$\alpha*\mu = \mu*\alpha = \mu. \tag{1}$$

Понятно, что $\operatorname{supp}\mu \subset K$. Тогда из (1) получаем $K*\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\mu$. Следовательно, $\operatorname{supp}\mu = K$. Следствие 3 доказано.

Если $(H, *)$ — подполугипергруппа полугипергруппы $(G, *)$, то мера $\varkappa \in M_p(H)$ называется левой (правой) H-инвариантной, если $\varepsilon_x * \varkappa = \varkappa$, $\varkappa * \varepsilon_x = \varkappa$, $\forall\, x \in H$, H-инвариантной, если она одновременно и левая и правая H-инвариантная мера (аналог нормированной меры Хаара для групп). Понятно, что каждая идемпотентная мера μ с $\operatorname{supp}\mu = H$ является H-инвариантной.

С л е д с т в и е 4. *В $M_p(G)$ существует единственная G-инвариантная мера $\varkappa$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α — некоторая мера из $M_p(G)$ с $\operatorname{supp}\alpha = G$. Как уже отмечалось выше, последовательность $\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\alpha^{k*}\right\}$ сходится к идемпотентной мере $\varkappa$ такой, что $\alpha*\varkappa = \varkappa*\alpha = \varkappa$.

Покажем, что $\varkappa$ не зависит от выбора α с $\operatorname{supp}\alpha = G$. Действительно, пусть $\beta \neq \alpha$, $\operatorname{supp}\beta = G$ и последовательность $\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\beta^{k*}\right\}$ сходится к идемпотентной мере $\mu \neq \varkappa$. Но, поскольку $\operatorname{supp}\beta = G = \operatorname{supp}\alpha$ и $G*\operatorname{supp}\varkappa = \operatorname{supp}\varkappa$ и $G*\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\mu$, то $\operatorname{supp}\varkappa = \operatorname{supp}\mu$, что противоречит следствию 2.

Пусть $S = G \setminus \operatorname{supp}\varkappa$. Надо показать, что для произвольного $x \in S$ $\varepsilon_x*\varkappa = \varkappa*\varepsilon_x = \varkappa$. Пусть $\varepsilon_x*\varkappa = \beta_x$ для некоторого $x \in S$. Тогда $\operatorname{supp}\beta_x \subseteq \operatorname{supp}\varkappa$ и, поскольку $\varkappa$ — идемпотентная мера, то $\beta_x*\varkappa = \varkappa$. Следовательно, $\varepsilon_x*\varkappa = \varepsilon_x*\varkappa*\varkappa = \beta_x*\varkappa = \varkappa$, что и завершает доказательство.

Приведенное следствие обобщает аналогичный результат [1] (теорема 1.12) , доказанный для компактных коммутативных полугипергрупп.

Также укажем на связь полученного результата с теоремой Ю. М. Березанского и С. Г. Крейна о существовании мультипликативной меры для гиперкомплексных систем с компактным базисом [6].

Пусть $\varkappa$ — G-инвариантная мера и $\varkappa_A$ — сужение меры $\varkappa$ на A (A — произвольное борелевское подмножество G), т. е. $\varkappa_A(B) = \varkappa(A \cap B)$. Для произвольных борелевских A, B, D положим $C(A, B, D) = (\varkappa_A*\varkappa_B)(D)$. Поскольку

$$C(A, B, D) = \int_B\int_A \gamma(x, y; D)\,\varkappa(dx)\,\varkappa(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \int_B \int_G \gamma(x, y; G) \varkappa(dx) \varkappa(dy) = \varkappa(D) \varkappa(B),$$

то мера $C(A, B, D)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\varkappa$. Поэтому $C(A, B, t)$ такая, что

$$C(A, B, D) = \int_D C(A, B, t) \varkappa(dt)$$

будет структурной мерой некоторой, вообще говоря, некоммутативной гиперкомплексной системы с компактным базисом.

Соотношение

$$\int_G C(A, B, t) \varkappa(dt) = C(A, B, G) = \int_A \int_B \gamma(x, y; G) \varkappa(dx) \varkappa(dy) = \varkappa(A) \varkappa(B)$$

показывает, что G-инвариантная мера $\varkappa$ будет мультипликативной мерой полученной гиперкомплексной системы.

3. Примеры полугипергрупп. Покажем, что если опустить условие 6 определения 1, то идемпотентная мера μ с supp $\mu = H$ может не быть H-инвариантной.

Пример 1. Пусть G — конечная полугруппа левых нулей, т. е. $xy = y$ для любых $x, y \in G$. Легко проверить, что каждая вероятностная мера α на G с supp $\alpha = H$ является идемпотентной мерой, более того — левой G-инвариантной, но невырожденная мера α не является правой H-инвариантной.

Пример 2. Пусть $(G, *)$ — полугипергруппа, для которой выполнены условия 1—6 определения 1. Предположим дополнительно, что каждый идеал H в G вполне изолирован, т. е. если $x, y \in G \setminus H$, то $\{x\} * \{y\} \subset G \setminus H$.

Пусть $\varkappa_1$ — G-инвариантная мера с supp $\varkappa_1 = G_1$. Поскольку G_1 — вполне изолированный идеал, то $(G \setminus G_1, *)$ — полугипергруппа, удовлетворяющая условиям 1—6 определения 1. Тогда существует $G \setminus G_1$-инвариантная мера $\varkappa_2$ с supp $\varkappa_2 = G_2$. Продолжая эту процедуру, получаем множество мер $\{\varkappa_i\}$ с supp $\varkappa_i = G_i$ таких, что $G = \bigcup_{i \in \Omega} G_i$.

В этом случае, используя терминологию теории полугрупп [7, с. 46], будем говорить, что $(G, *)$ является объединением полуструктуры Ω полугипергрупп $(G_i, *)$.

Упорядоченность элементов множества Ω индуцирует частичный порядок в пространстве $M_p(G)$: для любых $\alpha, \beta \in M_p(G)$ $\alpha \leqslant \beta$, если supp $\alpha \subset G_i$, supp $\beta_i \subset G_j$ и $i \leqslant j$. Понятно, что в этом случае supp $(\alpha_* \beta) \subset G_i$.

1. *Dunkl C. F.* The measure algebra of a loccally compact hypergroup // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— **173**.— P. 331—348.
2. *Jewett R. J.* Spaces with an abstract convolution of measures // Adv. Math.— 1975.— **18**.— P. 1—101.
3. *Онипчук С. В.* Последовательности k-кратных сверток вероятностных мер, заданных на компактной гипергруппе.— Ужгород, 1984.— 20 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 1979.
4. *Хейер X.* Вероятностные меры на локально компактных группах.— М. : Мир, 1981.— 702 с.
5. *Schwarz S.* Probabilities on non-commutative semigroups // Czech. Math. J.— 1963.— 13, N 3.— P. 372—426.
6. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с компактным базисом // Укр. мат. журн.— 1951.— 3, № 2.— С. 184—204.
7. *Клиффорд А., Престон Т.* Алгебраическая теория полугрупп : В 2-х т.— М. : Мир, 1972.— Т. 1.— 285 с.

Ужгород. ун-т Получено 07.01.87