УДК 513.83

С. В. Матвеев

Аддитивность сложности и метод Хакена в топологии трехмерных многообразий

Пусть $\mathscr{M}$ обозначает множество всех компактных трехмерных многообразий (гомеоморфные многообразия считаются одинаковыми). Цель работы состоит в построении отображения $d : \mathscr{M} \to Z_+$ множества $\mathscr{M}$ в полугруппу неотрицательных целых чисел с операцией сложения, обладающего следующими свойствами:

а) для любого $k \in Z_+$ множество $d^{-1}(k)$ содержит только конечное число замкнутых неприводимых многообразий (свойство конечности);

б) $d(M_1 \# M_2) = d(M_1) + d(M_2)$, где $M_1 \# M_2$ обозначает связную сумму многообразий M_1, M_2 (свойство аддитивности).

Число $d(M)$ можно трактовать как сложность многообразия M. Следует отметить, что отображения сложности, обладающие свойствами конечности и аддитивности по отдельности, были известны ранее. Например, число вершин минимальной триангуляции трехмерного многообразия задает отображение сложности со свойством конечности, но без свойства аддитивности, а род Хегора — со свойством аддитивности, но без свойства конечности. Отображение сложности, совмещающее эти два свойства, рассматривается впервые.

Идея построения отображения d основана на теории специальных и почти специальных спайнов трехмерных многообразий [1—3]: в качестве $d(M)$ берется число вершин минимального почти специального спайна многообразия M. При таком определении свойство конечности выполняется почти автоматически. Доказательство свойства аддитивности нетривиально и основано на теории Хакена [4] поверхностей, нормальных по отношению к данному разбиению многообразия на ручки. При этом видоизменяем и обобщаем теорию Хакена, рассматривая вместо ручек индекса 2 произвольные косые произведения поверхности на отрезок. С другой стороны, рассмотрение разбиения на ручки, индуцированного почти специальным спайном, позволяет за счет замены неизвестных существенно упростить алгоритм Хакена нахождения фундаментальной системы поверхностей. Это упрощение делает чисто теоретический алгоритм практически реализуемым, по крайней мере, в простых случаях.

1. Почти специальные полиэдры. Пусть Δ обозначает тело одномерного остова стандартного трехмерного симплекса, т. е. полиэдр, гомеоморфный окружности с тремя радиусами.

Определение. *Компактный полиэдр P называется почти специальным, если линк каждой его точки вкладывается в Δ.*

Точки, линки которых гомеоморфны полиэдру Δ, называются вершинами почти специального полиэдра; компоненты связности множества точек, линки которых гомеоморфны окружности,— его 2-компонентами. Каждая 2-компонента почти специального полиэдра гомеоморфна поверхности без края. Из определения непосредственно вытекает, что свойство полиэдра быть почти специальным наследственно: любой компактный подполиэдр почти специального полиэдра почти специален. Этим свойством почти специальные полиэдры выгодно отличаются от специальных, введенных в [1].

Напомним, что спайн компактного трехмерного многообразия M определяется как такой подполиэдр $P \subset M$, что многообразие $M - P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1]$, если $\partial M \neq \varnothing$, или открытой трехмерной клетке, если $\partial M = \varnothing$. Спайн почти специален или специален, если он является почти специальным или специальным полиэдром. Известно, что любое компактное трехмерное многообразие имеет почти специальный или специальный спайн [1, 2].

Определение. *Сложность $d(M)$ компактного трехмерного многообразия M равна k, если M имеет почти специальный спайн с k вершинами и не имеет почти специального спайна с меньшим числом вершин.*

Теорема 1. *Для любого целого числа $k \geqslant 0$ существует только конечное число различных замкнутых неприводимых трехмерных многообразий сложности k.*

Доказательство. Конечность числа замкнутых неприводимых ориентируемых многообразий сложности k вытекает из теоремы 4 работы [3]. Неориентируемый случай отличается от ориентируемого тем, что 2-компоненты минимального почти специального спайна замкнутого неприводимого неориентируемого многообразия могут быть гомеоморфны не только клетке, но и кольцу. Однако это обстоятельство не влияет на конечность.

2. Теория Хакена. Пусть P — произвольный спайн трехмерного многообразия M с краем. Граф (одномерный полиэдр) $\Gamma \subset P$ назовем разрезающим, если $P - \Gamma$ состоит из нескольких связных открытых двумерных многообразий, которые, в свою очередь, будем называть 2-компонентами полиэдра P. Отождествим M с регулярной окрестностью спайна P и разобьем его на регулярные окрестности вершин графа Γ (шары), относительные регулярные окрестности оставшихся частей ребер (цилиндры) и на относительные регулярные окрестности оставшихся частей 2-компонент (плитки). Каждый цилиндр имеет структуру прямого произведения диска на отрезок. Плитки представляют собой косые произведения поверхностей на отрезок, а не только ручки индекса 2, как в случае Хакена [4]. Пересечения краев шаров с цилиндрами, следуя Шуберту [5], будем называть островами, с плитками — мостами. Полученное разбиение обозначим через $\beta(M, P, \Gamma)$.

Замкнутая поверхность $F \subset M$ называется нормальной по отношению к разбиению $\beta(M, P, \Gamma)$, если: 1) пересечение поверхности F с каждой плиткой представляется в виде косого произведения базы плитки на конечное множество точек, лежащее в отрезке; 2) пересечение поверхности F с каждым цилиндром $D^2 \times I$ имеет вид $L \times I$, где L — конечное множество дуг в D^2 с концами на ∂D^2; 3) пересечение поверхности F с шарами состоит из дисков (эти диски называются элементарными); 4) пересечение каждого элементарного диска с каждым мостом либо пусто, либо состоит из ровно одной дуги с концами на тех островах, которые соединяет рассматриваемый мост.

Рассмотрим в трехмерном многообразии M трехмерный шар V и замкнутую поверхность F, трансверсально пересекающую V по некоторому (может быть, пустому) множеству простых замкнутых кривых. Будем говорить, что замкнутая поверхность $F_1 \subset M$ получается из поверхности F с помощью ξ-операции, если $F - V = F_1 - V$. Поверхности F, F_1 называются ξ-эквивалентными, если от одной можно перейти к другой с помощью конечной последовательности ξ-операций.

Теорема 2. *Любая замкнутая поверхность в трехмерном многообразии M ξ-эквивалентна поверхности, нормальной по отношению к данному разбиению $\beta(M, P, \Gamma)$.*

Доказательство. Если все плитки разбиения $\beta = \beta(M, P, \Gamma)$

представляют собой ручки индекса 2, то утверждение теоремы совпадает с утверждением теоремы Хакена о нормальных поверхностях [4] (теорема 1). Для доказательства теоремы в общем случае добавим к графу Γ новые ребра так, чтобы получился новый разрезающий граф $\Gamma_1 \subset P$, дополнение $P - \Gamma_1$ которого состоит из клеток. Все плитки разбиения $\beta_1 = \beta(M, P, \Gamma_1)$ являются ручками индекса 2, поэтому по теореме Хакена любая поверхность ξ-эквивалентна поверхности F, нормальной по отношению к разбиению β_1. Докажем, что F с помощью несущественной (сохраняющей разбиение β_1) изотопии можно перевести в поверхность, нормальную по отношению к разбиению β. Действительно, F удовлетворяет условиям 2—4 определения нормальной поверхности, так как каждый шар и каждый цилиндр разбиения β_1 входит в разбиение β. Можно считать, что структура косого произведения каждой плитки α разбиения β согласована со структурами прямых произведений всех лежащих в ней плиток разбиения β_1. Оставшаяся часть плитки α состоит из цилиндров разбиения β_1, причем каждый цилиндр пересекается с плитками по двум полоскам. Это означает, что с помощью неподвижной вне этих цилиндров изотопии поверхность F переводится в поверхность, пересечение которой с плиткой α представляется в виде косого произведения ее базы на конечное множество точек в ее слое. Применение этого рассуждения ко всем плиткам разбиения β завершает доказательство теоремы.

Следствие. *Пусть $\beta = \beta(M, P, \Gamma)$ — разбиение многообразия $M = M_1 \# M_2$, где $M_1, M_2 \neq S^3$. Тогда в M найдется нетривиальная разбивающая сфера, нормальная по отношению к разбиению β.*

Доказательство. По теореме 2 сфера, разбивающая многообразие M в связную сумму, ξ-эквивалентна некоторой нормальной по отношению к β поверхности F. Так как свойство поверхности содержать нетривиальную разбивающую сферу сохраняется при ξ-эквивалентности [5], то одна из компонент поверхности F является искомой нетривиальной разбивающей сферой.

3. Аддитивность сложности. Лемма 1. *Пусть P — минимальный почти специальный спайн многообразия M с непустым краем, Γ — его минимальный по включению разрезающий граф и $S \subset M$ — сфера, нормальная по отношению к разбиению $\beta(M, P, \Gamma)$. Тогда $d(M) \geqslant d(N_1) + d(N_2)$, где многообразия N_1, N_2 получаются из многообразия M разрезанием по сфере S.*

Доказательство. Плитки разбиения $\beta = \beta(M, P, \Gamma)$ разрезаются сферой S на части, каждая из которых коллапсируется на поверхность с краем в крае плитки. Если цилиндр разбиения β пересекается со сферой S, то он разбивается ею на части, одна из которых коллапсируется на прямое произведение триода (букета из трех отрезков с общим концом) на отрезок, а остальные — на полоски с краями в крае цилиндра. Если цилиндр не пересекает поверхности S, то он коллапсируется на отрезок (свою ось). Рассмотрим части, на которые сфера S разбивает шар разбиения β. Возможны два случая: 1) одна из частей коллапсируется на конус над Δ, остальные — на диски с краями в крае шара; 2) две части коллапсируются на прямые произведения триодов на отрезок, остальные — на диски. Можно считать, что на пересечениях всех шаров, плиток и цилиндров коллапсирования согласованы. Объединение всех получившихся поверхностей, произведений триода на отрезок, полосок, отрезков, конусов над Δ и дисков распадается в объединение двух почти специальных полиэдров P_1, P_2, причем P_1 служит спайном многообразия N_1, P_2 — спайном многообразия N_2. Все вершины полиэдров P_1, P_2 лежат в шарах разбиения β, отвечающих вершинам полиэдра P. Так как в каждом шаре разбиения β лежит не более одной вершины полиэдров P_1, P_2, то $d(M) \geqslant d(N_1) + d(N_2)$.

Теорема 3. *Сложность связной суммы компактных трехмерных многообразий равна сумме их сложностей.*

Доказательство. Разложение трехмерного многообразия в связную сумму простых слагаемых единственно с точностью до замены прямого произведения $S^1 \times S^2$ на косое произведение $S^1 \tilde{\times} S^2$. Так как $d(S^1 \times S^2) = d(S^1 \tilde{\times} S^2)$, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что сложность любого многообразия M равна сумме сложностей его простых слагаемых. Пусть P — минимальный почти специальный спайн многообразия M, представимого в виде нетривиальной связной суммы. По следствию теоремы 2 в M найдется сфера S, нормальная по отношению к разбиению $\beta(M, P, \Gamma)$, где Γ — минимальный разрезающий граф в P. Эта сфера разбивает M на два многообразия N_1, N_2. Пусть многообразия N_1', N_2' получаются из N_1, N_2 заклеиванием шарами тех компонент их краев, которые возникают в результате разрезания по S. Так как заклеивание шаром не увеличивает сложности и $d(M) \geqslant d(N_1) + d(N_2)$ по лемме 1, то $d(M) \geqslant d(N_1') + d(N_2')$. Будем повторять это рассуждение до тех пор, пока не получим разложение многообразия M в связную сумму таких простых многообразий M_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $d(M) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} d(M_i)$. Неравенство $d(M) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} d(M_i)$ очевидно. Это завершает доказательство теоремы 3.

4. Упрощение алгоритма Хакена. Алгоритм Хакена позволяет по данному разбиению трехмерного многообразия M на ручки построить конечную систему нормальных поверхностей в M, которая называется фундаментальной и несет в себе много информации о топологической структуре данного многообразия. Напомним его основные моменты, ограничиваясь случаем замкнутых поверхностей. Будем говорить, что два элементарных диска в шаре разбиения относятся к одному типу, если они изотопны при сохраняющей острова и мосты изотопии. Первый шаг состоит в нахождении типов элементарных дисков. Второй шаг заключается в составлении системы линейных однородных уравнений, неизвестные x_i которой отвечают типам элементарных дисков, а уравнения — цилиндрам разбиения. Такая система имеет конечное множество базисных решений, т. е. целых неотрицательных решений, которые нельзя представить в виде нетривиальной суммы таких решений. Третий шаг состоит в их нахождении. Отбор базисных решений, реализуемых поверхностями,—заключительный шаг алгоритма.

Напомним, что почти специальный полиэдр является специальным, если все его 2-компоненты гомеоморфны клетке и линк каждой его точки гомеоморфен окружности, окружности с 2 или 3 радиусами. Пусть $\beta = \beta(M, P, \Gamma)$ — разбиение трехмерного многообразия M, построенное по специальному спайну P и его особому графу Γ.

Лемма 2. *В каждом шаре разбиения* β *имеется 7 типов элементарных дисков. Из них 4 (называемые внешними) не пересекаются с остальными. Любые два из 3 оставшихся (называемых внутренними) пересекаются.*

Доказательство. На крае каждого шара разбиения β имеется 4 острова и 6 мостов, причем каждые два острова соединены мостом. Каждый из внешних типов характеризуется тем, что лежащие в нем диски не пересекают одного острова и проходят один раз по каждому из не примыкающих к нему мостов. Каждый внутренний тип задается парой противоположных (не примыкающих к одному острову) мостов и характеризуется тем, что лежащие в нем диски не проходят по мостам выбранной пары и проходят один раз по каждому из оставшихся мостов.

Из леммы 2 следует, что внутренние диски, по которым нормальная поверхность пересекает шар разбиения, принадлежат одному типу. Назовем разметкой разбиения β выбор в каждом шаре одного из 3 внутренних типов. Мосты, по которым проходят диски выбранных типов, будем называть отмеченными. Всего имеется 3^v различных разметок (v — число шаров), причем каждому из них отвечает свое семейство нормальных поверхностей. В дальнейшем будем считать, что одна конкретная разметка уже выбрана.

Обозначим число плиток разбиения β через p и введем набор y_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, целочисленных переменных. Каждой нормальной поверхности отвечает набор конкретных значений этих переменных (плиточных степеней поверхности), которые показывают, сколько раз поверхность проходит по каждой плитке. Пронумеруем все шары разбиения и выберем шар с номером

i, $1 \leqslant i \leqslant v$. Пронумеруем его мосты числами от 1 до 6 так, чтобы мосты с номерами 1, 2 и 3, 4 составляли пары противоположных помеченных мостов. Пусть $\alpha(i, k)$ обозначает номер плитки, примыкающей к мосту с номером k. Составим систему уравнений (1) и систему неравенств (2)

$$y_{\alpha(i,1)} + y_{\alpha(i,2)} = y_{\alpha(i,3)} + y_{\alpha(i,4)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant v, \tag{1}$$

$$y_{\alpha(i,1)} + y_{\alpha(i,2)} \geqslant y_{\alpha(i,5)} + y_{\alpha(i,6)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant v. \tag{2}$$

Пронумеруем цилиндры разбиения и выберем цилиндр с номером i, $1 \leqslant i \leqslant 2v$. Пусть $\gamma(i, k)$ обозначают номера примыкающих к нему плиток, где $k \in Z/3Z$. Составим систему неравенств (3) и ограничений (4)

$$y_{\gamma(i,k)} + y_{\gamma(i,k+1)} \geqslant y_{\gamma(i,k+2)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2v, \quad k \in Z/3Z, \tag{3}$$

$$y_{\gamma(i,k)} + y_{\gamma(i,k+1)} + y_{\gamma(i,k+2)} \text{ — четно}, \ 1 \leqslant i \leqslant 2v, \quad k \in Z/3Z. \tag{4}$$

Нормальные поверхности, которые можно перевести друг в друга с помощью несущественной (сохраняющей разбиение) изотопии, считаем одинаковыми.

Теорема 4. *Сопоставление нормальной поверхности ее плиточных степеней определяет биекцию множества нормальных поверхностей, отвечающих данной разметке, на множество неотрицательных решений системы* (1), *удовлетворяющих ограничениям* (2)—(4).

Доказательство. Докажем, что плиточные степени y_j, $1 \leqslant j \leqslant v$, нормальной поверхности F удовлетворяют системе (1) и ограничениям (2)—(4). Для шара V_i разбиения обозначим через $x_{m,i}$, $1 \leqslant m \leqslant 4$, число дисков из $F \cap V_i$ в каждом внешнем типе, через $x_{5,i}$ — число дисков из $F \cap V_i$ в отмеченном внутреннем типе. Так как каждый внешний диск проходит ровно по одному из двух противоположных мостов, а отмеченный внутренний диск проходит по отмеченным мостам и не проходит по неотмеченным, то $y_{\alpha(i,1)} + y_{\alpha(i,2)} = \sum_{m=1}^{4} x_{m,i} + 2x_{5,i} = y_{\alpha(i,3)} + y_{\alpha(i,4)}$ и $y_{\alpha(i,5)} + y_{\alpha(i,6)} = \sum_{m=1}^{4} x_{m,i}$. Отсюда следует справедливость (1) и (2). Для каждого цилиндра C_i, $1 \leqslant i \leqslant 2v$, обозначим через $a_{i,k}$ число полосок в $F \cap C_i$, не пересекающих плитку с номером $\gamma(i, k)$ и соединяющих две остальные плитки. Тогда $a_{i,k} + a_{i,k+1} = \gamma(i, k+2)$, где $k \in Z/3Z$, откуда сразу следует справедливость (3) и (4).

Докажем, что любое решение системы (1) с ограничениями (2)—(4) реализуется нормальной поверхностью. Для каждого i предполагаемые значения упомянутых выше неизвестных $x_{m,i}$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, связаны с числами $y_{\alpha(i,k)}$, $1 \leqslant k \leqslant 6$, системой из 6 линейных однородных уравнений, по одному уравнению для каждого моста. Соответствующее уравнение из (1) представляет собой условие совместности такой системы, при выполнении которого она имеет единственное решение. Таким образом, числа $x_{m,i}$ восстанавливаются по решению y_j однозначно. Неравенства (2), (3) гарантируют неотрицательность чисел $x_{m,i}$, ограничения (4) достаточны для того, чтобы они были целыми. Искомая поверхность получается теперь склеиванием элементарных дисков и сечений плиток с последующей приклейкой полосок в каждом цилиндре. Количество элементарных дисков каждого типа и количество сечений плиток задаются числами $x_{m,i}$ и y_j. Этим завершается доказательство теоремы 4.

Подводя итоги, изложим алгоритм нахождения системы фундаментальных поверхностей, нормальных по отношению к данному разбиению β. Для того чтобы найти эту систему, нужно:

1. Рассмотреть все возможные разметки разбиения β.
2. Для каждой разметки составить систему (1) с ограничениями (2)—(4).
3. Найти все базисные решения таких систем.

Поверхности, отвечающие базисным решениям, составляют искомую систему фундаментальных поверхностей.

Таким образом, первый и четвертый шаги оригинального алгоритма Хакена становятся не нужными, а второй и третий существенно упрощаются за счет простого вида уравнений и резкого уменьшения числа неизвестных. В простых случаях, когда сложность многообразия не очень велика, этот алгоритм допускает практическую реализацию. С его помощью нетрудно найти, например, систему фундаментальных поверхностей для дополнения к зацеплению Уайтхеда, сложность которого равна 4. Эта система состоит из двух торов, параллельных компонентам края, и одного кренделя рода 2 (их связной суммы). Так как в системе фундаментальных поверхностей нет сфер, то дополнение к зацеплению Уайтхеда неприводимо.

1. *Casler B. G.* An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary // Proc. Amer. Math. Soc.— 1965.— **16**, N 4.— P. 559—566.
2. *Матвеев С. В.* Специальные остовы кусочно линейных многообразий // Мат. сб.— 1973.— **92**, № 2.— С. 282—293.
3. *Матвеев С. В.* Один способ задания 3-многообразий // Вест. Моск. ун-та. Мат., мех.— 1975.— **30**, № 3.— С. 11—20.
4. *Haken W.* Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für den Kreisknoten // Acta math.— 1961.— **105**, N 3-4.— P. 245—375.
5. *Шуберт X.* Алгоритм для разложения зацеплений на простые слагаемые // Математика: сб. пер.— 1966.— **10**, № 4.— С. 45—78.

Челябин. ун-т Получено 27.01.87