УДК 517.991:519.246

В. Г. Задорожний

О разложении характеристического функционала линейной стохастической системы в степенной ряд

1. Введение. Рассмотрим задачу Коши для линейной однородной стохастической системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x, \ \ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где t — время, x — конечномерный вектор, A — случайная матричная функция, x_0 — случайный вектор. В настоящей статье по этой задаче строится детерминированное дифференциальное уравнение с вариационными производными для характеристического функционала [1] матричной функции A и решения x. Для подобных уравнений рассматриваются либо формальные решения [1], либо обобщенные [2]. В данной работе получены условия существования и единственности классических решений и разложение характеристического функционала в равномерно сходящийся степенной ряд.

2. Две леммы. Пусть $V(T)$ — банахово пространство комплексных функций $v: T \to C$, определенных на отрезке T вещественной оси, C — множество комплексных чисел, $|T|$ — длина отрезка T. Норма в пространстве $V(T)$ обозначается $\|\cdot\|_T$ или, если это не ведет к недоразумению, просто $\|\cdot\|$. Через $V_n(T)$ обозначается множество векторных функций $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$, $u(r, 0) = \{v \in V(T) \mid \|v\| < r\}$ соответственно, $u_n(r, 0) = \underbrace{u(r, 0) \times \ldots \times u(r, 0)}_{n}$, C^n — пространство n-мерных комплексных векторов с нормой $\|\|z\|\| = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$.

Напомним, что если дифференциал Фреше dy отображения $y: V_n(T) \to C$ записывается в виде $dy = \sum_{i=1}^{n} \int_T \varphi_i(v, t)\,\delta v_i(t)\,dt$, то $\varphi_i(v, t)$ называется частной вариационной производной по переменной v_i и обозначается $\delta y(v)/\delta v_i(t)$. Вторая частная вариационная производная по переменным v_i и v_j в точке (t_1, t_2) обозначается $\delta^2 y(v)/\delta v_i(t_1)\,\delta v_j(t_2)$. Аналогичные обозначения применяются для старших производных. Наряду с этими полными обозначениями используется более компактная форма записи. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n-мерный мультииндекс из n целых неотрицательных чисел. Его порядком называется число $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и используется обозначение $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. Пусть $\tau = (t_1, \ldots, t_{|\alpha|})$, тогда $\delta_\tau^\alpha y(v) = \delta^{|\alpha|} y(v)/\delta v_1 (t_1)\,\delta v_1(t_2) \ldots \delta v_1(t_{\alpha_1})\,\delta v_2(t_{\alpha_1+1}) \ldots \delta v_n(t_{|\alpha|})$.

Лемма 1. *Пусть* $v(t) \equiv 1$ *принадлежит* $V(T)$, функционал $y: V_n(T) \to C$ *аналитичен* [3, с. 126] *при* $\|v_i\| \leqslant r$, $i = 1, \ldots, n$, *имеет вариацион-*

ную производную порядка α и удовлетворяет неравенству $|y(v)| \leqslant M$. Тогда при $\|v_i\| \leqslant r_0 < r$, $i = 1, \dots, n$ справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_T \cdots \int\limits_T \delta_\tau^\alpha y(v) d\tau\Big| \leqslant \frac{\alpha! M \|1\|^{|\alpha|}}{(r - r_0)^{|\alpha|}}. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $v = (v_1, \dots, v_n)$ и $\|v_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим функцию $\varphi(z_1, \dots, z_n) = y(z_1 v_1, \dots, z_n v_n)$ от n комплексных переменных $z_1, \dots, z_n$. Функция φ является аналитической при $\||z\|| \leqslant r$. Произведя обычную оценку производной порядка α [4], получим

$$\Big|\int\limits_T \cdots \int\limits_T \frac{\delta^\alpha y(z_1 v_1, \dots, z_n v_n)}{\delta(z_1 v_1)(s_1) \dots \delta(z_n v_n)(s_{|\alpha|})} v_1(s_1) \dots v_n(s_{|\alpha|}) ds_1 \dots ds_{|\alpha|}\Big| =$$

$$= |\varphi^\alpha(z_1, \dots, z_n)| \leqslant \alpha!\, M (r - r_0)^{|\alpha|}$$

при $\||z\|| \leqslant r_0$, $\|v_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$. Тогда норма стоящей слева $|\alpha|$-линейной по $v_1, \dots, v_n$ формы не превышает $\alpha!\, M/(r - r_0)^{|\alpha|}$ [3]. По условию $v = 1$ принадлежит $V(T)$ и из последнего неравенства получаем

$$\Big|\int\limits_T \cdots \int\limits_T \frac{\delta^\alpha y(z_1 v_1, \dots, z_n v_n)}{\delta(z_1 v_1)(s_1) \dots \delta(z_n v_n)(s_{|\alpha|})} ds_1 \dots ds_{|\alpha|}\Big| \leqslant \frac{\alpha!\, M \|1\|^{|\alpha|}}{(r - r_0)^{|\alpha|}}$$

при $\||z\|| \leqslant r_0$, $\|v_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$, что эквивалентно (2). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть для элементов $v \in V(T)$ выполняется условие*

$$\int\limits_T |v(s)| ds \leqslant \beta \|v\| \qquad (3)$$

для некоторой постоянной β. Пусть последовательность $y_k : u(r, 0) \to C$ при $k \to \infty$ равномерно на $u(r, 0)$ сходится к $y_0 : V(T) \to C$, $\delta y_k(v)/\delta v(t)$ непрерывны по каждой переменной, ограничены и равномерно на $u(r, 0) \times T$ сходятся к $\psi_0(v, t)$. Тогда $\delta y_0(v)/\delta v(t)$ существует и равно $\psi_0(v, t)$.

3. Уравнение для характеристического функционала. Пусть в уравнении (1) $A(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ — случайная матричная функция, векторы-столбцы которой обозначены через $a_1, \dots, a_n$. Обозначим через $v_1(t), \dots, v_n(t)$, $w(t)$ векторные функции со значениями в пространстве C^n, т. е. $v_j : T \to C^n$, $j = 1, \dots, n$, $w : T \to C^n$.

Характеристический функционал случайной матричной функции A и решения x имеет вид

$$\Phi(v_1, \dots, v_n, w) = \Big\langle \exp\Big\{i \int\limits_T \Big[\sum_{j=1}^n (a_j(s), v_j(s)) + (x(s), w(s))\Big] ds\Big\}\Big\rangle, \qquad (4)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение n-мерных векторов, $\langle \cdot \rangle$ — среднее значение по совместной функции распределения A и x_0.

Умножая уравнение (1) на $\exp\Big\{i \int\limits_T \Big[\sum_{j=1}^n (a_j(s), v_j(s)) + (x(s), w(s))\Big] ds\Big\}$ и усредняя, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \Phi}{\delta w(t)} = -i \sum_{j=1}^n \frac{\delta}{\delta v_j(t)} P_j \frac{\delta \Phi}{\delta w(t)}, \qquad (5)$$

где P_j — оператор проектирования, выделяющий j-ю координату n-мерного вектора. Считая A и x_0 независимыми, найдем граничные условия для уравнения (5)

$$\left.\frac{\delta^k \Phi(v_1, \dots, v_n, w)}{\delta w^k(t)}\right|_{w=0,\ t=t_0} w(s_1) \dots w(s_k) = i^k \langle (x_0, w(s_1)) \dots$$

$$\dots (x_0, w(s_k)) \rangle \Phi_0(v_1, \dots, v_n), \qquad (6)$$

где $\Phi_0(v_1, \ldots, v_n)$ — характеристический функционал случайной матричной функции A — предполагается известным.

Таким образом, по задаче (1) получено детерминированное дифференциальное уравнение (5) с вариационными производными и детерминированными граничными условиями (6) для характеристического функционала $\Phi(v_1, \ldots, v_n, w)$. В дальнейшем решение задачи (5), (6), если оно существует, по определению будем считать характеристическим функционалом для A и x.

Положим $Q(v_1, \ldots, v_n, w, t) = \delta\Phi(v_1, \ldots, v_n, w)/\delta w(t)$. Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -i \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(t)} P_j Q. \tag{7}$$

Будем искать решение Q в виде

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \int_T \cdots \int_T q_k(v_1, \ldots, v_n, t, s_1, \ldots, s_{k-1}) w(s_1) \ldots w(s_{k-1}) ds_1 \ldots ds_{k-1}, \tag{8}$$

где $q_k(v_1, \ldots, v_n, t, s_1, \ldots, s_{k-1})$ при фиксированных $v_1, \ldots, v_n, t, s_1, \ldots, s_{k-1}$ — $(k-1)$-линейные симметрические отображения из $\underbrace{C^n \times \ldots \times C^n}_{k-1}$ в C^n.

Подставляя (8) в (7) и приравнивая одинаковые степени по w, получаем

$$\frac{\partial q_k}{\partial t} w(s_1) \ldots w(s_{k-1}) = -i \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(t)} P_j q_k w(s_1) \ldots w(s_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

а условия (6) переходят в начальные условия

$$q_k(v_1, \ldots, v_n, t_0, \ldots, t_0) w(t_0) \ldots w(t_0) =$$
$$= i^k \langle (x_0, w(t_0)) \ldots (x_0, w(t_0)) (x_0, \cdot) \Phi_0(v_1, \ldots, v_n), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

В дальнейшем будет показана однозначная разрешимость задач (9), (10), т. е. будет получен ряд для Q и значит для производной Фреше от Φ. Использовав условие $\Phi(0, \ldots, 0) = 1$, найдем ряд для Φ и покажем равномерную сходимость этого ряда.

4. Существование и единственность решений. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial}{\partial t} y(v_1, \ldots, v_n, t) = a \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(t)} P_j y(v_1, \ldots, v_n, t), \tag{11}$$

$$y(v_1, \ldots, v_n, t_0) = y_0(v_1, \ldots, v_n), \tag{12}$$

где $t \in T$ — время, $v_j : T \to C^n$, $j = 1, \ldots, n$, $y_0 : V_{n^2}(T) \to C^n$, $y : V_{n^2}(T) \times T \to C^n$, y_0 задано, $t_0 \in T$, a — фиксированное число.

В дальнейшем через $v = (v_1, \ldots, v_n)$ обозначается вектор размерности n^2 и используется обозначение $\overline{\operatorname{div}}_t\, y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(t)} P_j y(v_1, \ldots, v_n, t)$, введенное в виду сходства с обычным определением дивергенции. Тогда задача (11), (12) принимает вид,

$$\frac{\partial}{\partial t} y(v, t) = a\, \overline{\operatorname{div}}_t\, y(v, t), \tag{13}$$

$$y(v, t_0) = y_0(v). \tag{14}$$

Определение. *Решением задачи* (13), (14) *называется отображение* $y : V_{n^2}(T) \times T \to C^n$, *если существуют окрестность* $u_{n^2}(r, 0)$ *и интер-*

вал $T_1 \ni t_0$ *такие, что в* $u_{n^2}(r, 0) \times T_1$ *существуют вариационные производные* $\delta y_j(v, t)/\delta v_j(s)$, $j = 1, \dots, n$, *определены* $\delta y_j(v, t)/\delta v_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, *и выполняется равенство*

$$y(v, t) = y_0(v) + \int_{t_0}^{t} \overline{\mathrm{div}}_s\, y(v, s)\, ds \tag{15}$$

при $(v, t) \in u_{n^2}(r, 0) \times T_1$.

Очевидно, всегда можно считать $T_1 \subset T$.

Теорема 1 (существование решения). *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Элементы пространства* $V(T)$ *удовлетворяют условию* (3) *и* $\| 1 \|_T \to 0$ при $|T| \to 0$;

2) $y_0(v)$ *непрерывно в замыкании окрестности* $u_{n^2}(r, 0)$ *и имеет вариационные производные любого порядка, непрерывные по каждой переменной;*

3) $|||y_0(v)||| \leqslant m_0$, $\left|\left|\left| \dfrac{\delta}{\delta v_k(t)} P_j y_0(v) \right|\right|\right| \leqslant m_1$ *при* $(v, t) \in u_{n^2}(r, 0) \times T$, $j, k = 1, \dots, n$;

4) *Отрезок* $T_1 \subset T$ *содержит* t_0 *и*

$$\| 1 \|_{T_1} < (r - r_0)/|a|\, n. \tag{16}$$

Тогда задача (13), (14) *имеет решение* $y(v, t)$, *которое является равномерным пределом по норме* $|||\cdot|||$ *на* $u_{n^2}(r_0, 0) \times T_1$ *последовательности элементов*

$$S_k(v, t) = y_0 + a \int_{t_0}^{t} \overline{\mathrm{div}}_s y_0 ds + \dots + a^k \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} d\tau_k\, \overline{\mathrm{div}}_{\tau_1} \dots \overline{\mathrm{div}}_{\tau_k} y_0.$$

При этом справедлива оценка

$$|||y(v, t) - S_k(v, t)||| \leqslant \frac{m_0 (|a|\, n\, \| 1 \|)^{k+1}}{(r - r_0)^k (r - r_0 - |a|\, n\, \| 1 \|)}. \tag{17}$$

Доказательство. Введем обозначение $(By(v, s))(v, t) = y_0(v) + a \int_{t_0}^{t} \overline{\mathrm{div}}_s\, y(v, s)\, ds$. Покажем, что ряд

$$y_0(v) + \sum_{j=1}^{\infty} (B^j y_0 - B^{j-1} y_0)(v, t), \tag{18}$$

частичная сумма которого $S_k(v, t)$ равна $B^k y_0(v)$, является равномерно сходящимся. Отметим, что выражение $\overline{\mathrm{div}}_\tau \overline{\mathrm{div}}_s y_0$ симметрично по переменным τ, s. Действительно,

$$\overline{\mathrm{div}}_\tau \overline{\mathrm{div}}_s\, y_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(\tau)} P_j \sum_{r=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_r(s)} P_r y_0 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(\tau)} \times$$

$$\times P_j \frac{\delta}{\delta v_r(s)} P_r y_0 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(s)} P_j \frac{\delta}{\delta v_r(\tau)} P_r y_0 = \overline{\mathrm{div}}_s\, \overline{\mathrm{div}}_\tau y_0.$$

Оценим члены ряда (18)

$$|||(B^j_{y_0} - B^{j-1} y_0)(v, t)||| = \left|\left|\left| a^j \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{j-1}} d\tau_j \overline{\mathrm{div}}_{\tau_1} \dots \overline{\mathrm{div}}_{\tau_j} y_0(v) \right|\right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant |a|^j n^j m_0 \| 1 \|^j_{T_1}/(r - r_0)^j.$$

Здесь использованы специальный вид области интегрирования, симметричность подынтегрального выражения по $\tau_1, \ldots, \tau_j$ и оценка (2). Если T_1 удовлетворяет условию (16), то при $(v, t) \in u_{n^2}(r_0, 0) \times T_1$ ряд (18) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{j=0}^{\infty} (|a|n\|1\|_{T_1})^j m_0/(r-r_0)^j = m_0(r-r_0)/(r-r_0-|a|n\|1\|_{T_1}). \qquad (19)$$

Тогда ряд (18) равномерно на $u_{n^2}(r_0, 0)\times T_1$ сходится по норме $|||\cdot|||$, и для его суммы $y(v,t)$ справедлива оценка (17).

Рассмотрим ряд

$$\frac{\delta}{\delta v_i(\sigma)} P_i y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{\delta v_i(\sigma)} P_i (B^j y_0 - B^{j-1} y_0)(v, t). \qquad (20)$$

Оценим члены этого ряда, считая σ параметром, учитывая условие 3 теоремы и тот факт, что вариационные производные можно вычислять в любом порядке

$$\left|\left|\left| \frac{\delta}{\delta v_i(\sigma)} P_i (B^j y_0 - B^{j-1} y_0)(v, t) \right|\right|\right| = \left|\left|\left| a^j \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{j-1}} d\tau_j \times \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \times \frac{\delta}{\delta v_i(\sigma)} P_i \overline{\mathrm{div}}_{\tau_1} \ldots \overline{\mathrm{div}}_{\tau_j} y_0(v) \right|\right|\right| \leqslant \frac{|a|^j n^j m_1 \|1\|_{T_1}^j}{(r-r_0)^j}$$

при $(v, t) \in u_{n^2}(r_0, 0) \times T_1$. Отсюда следует, что ряд (20) равномерно сходится на $u_{n^2}(r_0, 0) \times T_1 \times T_1$ по норме $|||\cdot|||$. Частичные суммы ряда (20) $S_k(v, t, \sigma)$ равны $\frac{\delta}{\delta v_i(\sigma)} P_i S_k(v, t)$, где $S_k(v, t)$ — частичная сумма ряда (18). Из непрерывности вариационных производных от $y_0(v)$ и равенства

$$\frac{\delta}{\delta v_i(\sigma)} P_i (B^j y_0 - B^{j-1} y_0) = a^j \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{j-1}} d\tau_j \frac{\delta}{\delta v_i(\sigma)} \times$$
$$\times P_i \overline{\mathrm{div}}_{\tau_1} \ldots \overline{\mathrm{div}}_{\tau_j} y_0(v)$$

следует непрерывность $S_k(v, t, \sigma)$ по каждой переменной. В силу равномерной сходимости ряда (20) и леммы 2 сумма ряда (20) $S(v, t, \sigma)$ непрерывна по каждой переменной и $S(v, t, \sigma) = \frac{\delta}{\delta v_i(\sigma)} P_i y(v, t)$. Тогда определено и $S(v, t, t)$.

Легко проверить, что $S_k(v, t) = y_0(v) + a \int_{t_0}^{t} \overline{\mathrm{div}}_s S_{k-1}(v, s)\, ds$.

Поскольку ряд (20) равномерно сходится при каждом $i = 1, \ldots, n$, то в последнем равенстве можно перейти к пределу при $k \to \infty$ под знаком интеграла и получить (15). Теорема доказана.

Теорема 2 (единственность решения). *Пусть выполняется условие* (3) *и* $\|1\|_T \to 0$ *при* $|T| \to 0$. *Тогда во множестве ограниченных аналитических по* v *в некоторой окрестности точки* $v = 0$ *отображений* $y(v, t)$ *задача* (13), (14) *имеет единственное решение.*

Доказательство. В силу линейности уравнения (13) достаточно показать, что оно имеет только нулевое решение при $y_0(v) = 0$. Пусть $y(v, t)$ — соответствующее решение и $|||y(v, t)||| \leqslant M$ при $(v, t) \in u_{n^2}(r, 0) \times T_1$. Без ограничения общности можно считать, что $y(v, t)$ отлично от нуля при $t > t_0$, иначе в качестве t_0 можно взять точку, обладающую этим свойством. Выберем отрезок $T_1 = [t_0, t_1]$, чтобы выполнялось условие

$$\| 1 \|_{T_1} < r/2 |a| n. \tag{21}$$

Решение $y(v, t)$ удовлетворяет уравнению

$$y(v, t) = a \int_{t_0}^{t} \overline{\operatorname{div}}_s \, y(v, s) \, ds. \tag{22}$$

Пусть $r_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) r$. Воспользовавшись леммой 1, из соотношения (22) получим $||| y(v, t) ||| \leqslant |a| n M \| 1 \|_{T_1} / (r - r_1)$ при $(v, t) \in u_{n^2}(r_1, 0) \times T_1$. Используя последнее неравенство, из (22) получаем $||| y(v, t) ||| \leqslant$ $\leqslant M (|a| n \| 1 \|_{T_1})^2 / (r - r_1)(r - r_2)$ при $(v, t) \in u_{n^2}(r_2, 0) \times T_1$. Продолжая этот процесс далее, для любого целого числа $k > 0$ получаем оценку $||| y(v, t) ||| \leqslant M (|a| n \| 1 \|_{T_1})^k / (r - r_1) \ldots (r - r_k) \leqslant \frac{M (|a| n \| 1 \|_{T_1})^k}{(0{,}5r)^k}$ при $\| v \| < 0{,}5r$.

Поскольку выполняется (21), то, переходя к пределу при $k \to \infty$, из последнего неравенства получаем $||| y(v, t) ||| \leqslant 0$. Следовательно, $y(v, t) = 0$. Теорема доказана.

Следующее замечание показывает, что условия существования решения не являются слишком жесткими, во всяком случае гауссовские случайные матрицы с непрерывными средним значением и корреляционной функцией этим условиям удовлетворяют.

З а м е ч а н и е 1. Если начальное условие (14) имеет вид $y(v, t_0) = q_0 \Phi_0(v)$, где $q_0 \in C^n$, Φ_0 — характеристический функционал гауссовской случайной матрицы,

$$\Phi_0(v) = \exp\left\{i \int_T \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j(s), v_j(s)) \, ds - 0{,}5 \int_T \int_T (\beta(s_1, s_2) v(s_1), v(s_2)) \, ds_1 ds_2\right\},$$

где $\alpha_j(s)$ — векторы-столбцы средних значений и $\beta(s_1, s_2)$ — ковариационная матрица размера $n^2 \times n^2$, причем $\alpha_j(s)$ и $\beta(s_1, s_2)$ непрерывны соответственно на T и $T \times T$ и, кроме того, в качестве пространства $V(T)$ рассматривается пространство $L_p(T)$, $2 \leqslant p < \infty$, то условия теоремы выполнены и задача (13), (14) имеет единственное решение на множестве $u_{n^2}(r_0, 0) \times T$, где r_0 — любое заданное число.

Действительно, при этом функционал Φ_0 аналитичен и ограничен при любом конечном v, и в условии (16) число r можно взять настолько большим, что (16) будет выполнено.

5. Э в о л ю ц и о н н ы й о п е р а т о р. В дальнейшем будем считать, что пространство $V(T)$ обладает свойством 1 из теоремы 1. Определим оператор $U(t, t_0)$ формулой

$$U(t, t_0) \, y(v, t) = \left[1 + a \int_{t_0}^{t} \overline{\operatorname{div}}_s \, ds + \ldots + a^k \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} d\tau_k \, \overline{\operatorname{div}}_{\tau_1} \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \overline{\operatorname{div}}_{\tau_k} + \ldots \right] y(v, t), \tag{23}$$

где сходимость ряда понимается на фиксированных элементах y по норме $||| \cdot |||$ при фиксированном (v, t). Из теоремы 1 следует, что если $y(v, t_0) = y_0(v)$ и выполнены условия этой теоремы, то решение задачи (13), (14) записывается в виде $y(v, t) = U(t, t_0) \, y_0(v)$. Поскольку сумма ряда (18) является решением, то из (19) следует оценка

$$||| U(t, t_0) \, y_0(v) ||| \leqslant m_0 (r - r_0) / (r - r_0 - |a| n \| 1 \|) \tag{24}$$

при $(v, t) \in u_{n^2}(r_0, 0) \times T_1$.

Обозначим через D множество функционалов $y(v)$, имеющих в некоторой окрестности точки $v = 0$ вариационные производные любого порядка, непрерывные по каждой переменной и удовлетворяющие условиям $|||\, y(v)\, ||| \leqslant m_0$, $|||\, \delta P_j y(v)/\delta v_k(t)\, ||| \leqslant m_1$, $j, k = 1, \ldots, n$ (m_0, m_1 могут зависеть от y). D является линейным многообразием.

Оператор $U(t, t_0)$ на D является эволюционным, т. е. справедливы следующие соотношения: $U(t, t) = 1$, $U(t, s)\, U(s, \tau) = U(t, \tau)$, $U(\tau, t) = [U(t, \tau)]^{-1}$.

Теорема 3. *Пусть существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\| 1 \|_T \leqslant \gamma |T|$. Тогда эволюционный оператор $U(t, \tau)$ на множестве D может быть вычислен по формулам*

$$U(t, \tau) = \lim_{m \to \infty} \prod_{k=0}^{m} \exp\left[a \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(t_k^{(m)})} P_j \frac{t - \tau}{m} \right], \tag{25}$$

$$U(t, \tau) = \lim_{m \to \infty} \prod_{k=0}^{m} \left(1 + a \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(t_k^{(m)})} P_j \frac{t - \tau}{m} \right], \tag{26}$$

где $t_k^{(m)} = \tau + k(t - \tau)/m$ и пределы понимаются в смысле сильной сходимости, т. е. на каждом фиксированном элементе $y \in D$ по норме $|||\cdot|||$.

Доказательство. По свойствам эволюционного оператора имеет место равенство $U(t, \tau)\, y = \lim\limits_{m \to \infty} \prod\limits_{k=0}^{m-1} U(t_{k+1}^{(m)}, t_k^{(m)})\, y$. Если $y \in D$ фиксировано, то ряд (23) равномерно сходится при $(v, t) \in u_{n^2}(r_0, 0) \times T_1$ по норме $|||\cdot|||$. Используя непрерывность $\delta y/\delta v_j(s)$ и оценку (17) при $k = 1$, получаем

$$|||\, U(t_{k+1}^{(m)}, t_k^{(m)})\, y\, ||| = \Bigg\| y + a \int_{t_k^{(m)}}^{t_{k+1}^{(m)}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(s)} P_j y ds + U(t_{k+1}^{(m)}, t_k^{(m)})\, y - y -$$

$$- a \int_{t_k^{(m)}}^{t_{k+1}^{(m)}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(s)} P_j y ds \Bigg\| \leqslant \Bigg\| \left(1 + a \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(t_k^{(m)})} P_j \frac{t - \tau}{m} \right) y \Bigg\| +$$

$$+ o(1/m) + \frac{m_0 (|a|\, n \,\| 1 \|)^2}{(r - r_0)(r - r_0 - |a|\, n \,\| 1 \|)},$$

где $o(1/m)$ — бесконечно малая более высокого порядка чем $1/m$. При этом, в силу условий теоремы $\| 1 \| \leqslant \gamma\, |t_{k+1}^{(m)} - t_k^{(m)}| = \gamma\, |t - \tau|/m$, так как $\| 1 \|$ вычисляется на промежутке $(t_k^{(m)}, t_{k+1}^{(m)})$. Тогда

$$|||\, U(t_{k+1}^{(m)}, t_k^{(m)})\, y\, ||| = \Bigg\| \left(1 + a \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(t_k^{(m)})} P_j \frac{t - \tau}{m} \right) y \Bigg\| + o(1/m) =$$

$$= \Bigg\| \exp\left(a \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta v_j(t_k^{(m)})} P_j \frac{t - \tau}{m} \right) y \Bigg\| + o\left(\frac{1}{m}\right).$$

Этого условия достаточно для проведения обычных для мультипликативного интеграла [5] оценок и доказательства того, что при предельном переходе при $m \to \infty$ справедливы формулы (25), (26). Теорема доказана.

6. Характеристический функционал линейной однородной стохастической системы уравнений. Перейдем к анализу задачи (9), (10). Уравнение (9) при фиксированных $w(s_1), \ldots, w(s_{k-1})$ и фиксированных $s_1, \ldots, s_{k-1}$ является уравнением

вида (13), а условие (10) имеет вид условия (14). При этом, согласно доказанному, решение q_k записывается в виде $q_k(v, t, t_0, \ldots, t_0) w(t_0) \ldots w(t_0) = U(t, t_0) i^k \langle (x_0, w(t_0)) \ldots (x_0, w(t_0))(x_0, \cdot)\rangle \Phi_0(v)$. Чтобы получить разложение для характеристического функционала $\Phi(v, w)$, нужно найти $q_k(v, t, s_1, \ldots s_{k-1})$.

Пусть $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(k))$ — перестановка чисел $1, \ldots, k$ и $Sf(s_1, \ldots, s_k) = [\Sigma f(s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(k)})]/k!$, где суммирование производится по всем перестановкам σ чисел $1, \ldots, k$, симметризация f — по переменным $s_1, \ldots, s_k$. Пусть $W(T)$ — пространство отображений $w: T \to C^n$ с нормой $\| w \|_W = \int\limits_T \left(\sum\limits_{i=1}^{n} | w_i(s)|^2\right)^{1/2} ds$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия:*

1) *для элементов пространства* $V(T)$ *выполнено условие* (3) *и* $\| 1 \|_T \to 0$ *при* $|T| \to 0$;

2) *отрезок* T *содержит точку* t_0 *и имеет такую длину, что* $\|1\|_T < (r - r_0)/n$;

3) $\Phi_0 : u_{n^2}(r, 0) \to C$ *непрерывно и имеет вариационные производные любого порядка, непрерывные по каждой переменной*;

4) *первые вариационные производные от* Φ_0 *ограничены*;

5) *с вероятностью, равной единице*, $\||x_0\|| < \infty$.

Тогда характеристический функционал задачи (1) *разлагается в равномерно сходящийся в* $W(T)$ *ряд*

$$\Phi(v, w) = \Phi_0(v) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int\limits_T \ldots \int\limits_T S \langle (U(\tau_1) x_0 (U(\tau_2) x_0 (\ldots (U(\tau_k) x_0 \Phi_0(v), w(\tau_k)), \ldots, w(\tau_2)), w(\tau_1)) \rangle \, d\tau_1 \ldots d\tau_k,$$

где S *означает симметризацию по переменным* $w(\tau_1), \ldots, w(\tau_k)$, *а* $U(\tau_j) = U(\tau_j, t_0)$ *может быть вычислено по формуле* (23) *при* $a = -i$, $\langle \cdot \rangle$ *обозначает усреднение по функции распределения* x_0, $(\cdot, \cdot)$ — *скалярное произведение* n*-мерных векторов*.

1. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.— М. : Наука, 1980.— 333 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 383 с.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
4. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ.— М. : Наука, 1976.— Ч. 2.— 400 с.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.

Воронеж. ун-т

Получено 10.02.87