УДК 531/534.01

Р. П. ГАЙДА, д-р фіз.-мат. наук,
Ю. Б. КЛЮЧКОВСЬКИЙ, **В. І. ТРЕТЯК**, кандидати фіз.-мат. наук
(Ін-т фізики конденсов. систем АН України, Львів)

Теоретико-груповий підхід до побудови релятивістської лагранжевої механіки системи частинок

Рассматриваются математические аспекты лагранжева формализма релятивистской механики системы взаимодействующих частиц. Вводится геометрическое определение формы релятивистской динамики, связанное с пространственноподобным или изотропным слоением пространства Минковского. Построена реализация алгебры Ли группы Пуанкаре векторными полями Ли — Бэклунда на общем джет-продолжении конфигурационного пространства. Сформулированы и исследованы условия инвариантности лагранжевой релятивистской механики; описаны характерные особенности этого формализма, возникающие вследствие условий пуанкаре-инвариантности.

Розглядаються математичні аспекти лагранжевого формалізму релятивістської механіки системи взаємодіючих частинок. Вводиться геометричне означення форми релятивістської динаміки з просторовоподібним або ізотропним шаруванням простору Мінковського. Побудовано реалізацію алгебри Лі групи Пуанкаре векторними полями Лі — Беклунда на загальному джет-продовженні конфігураційного простору. Сформульовано та досліджено умови інваріантності лагранжевої релятивістської механіки; описано характерні особливості цього формалізму, що виникають внаслідок вимог пуанкаре-інваріантності.

Релятивістська механіка (на відміну від теорії поля) — це опис системи частинок, що використовує ідеологію та апарат, близький до нерелятивістської механіки, але відрізняється від останньої групою симетрії — (власною ортохронною) групою Пуанкаре $\mathcal{P}(1, 3)$ замість групи Галілея. Теоретико-груповий підхід до такого опису в різних формалізмах аналітичної механіки полягає у побудові різних типів реалізацій алгебри Лі $\mathcal{AP}(1, 3)$ групи Пуанкаре на відповідних просторах (конфігураційному, фазовому і т. п.). Ідея такого підходу, запропонована вперше Діраком [1] у рамках гамільтонового формалізму, лежить у загальному руслі застосування апарату теорії груп у теоретичній фізиці* [2—4]. Природним є узагальнення ідеї Дірака на тривимірний одночасовий лагранжів формалізм релятивістської механіки, що дозволяє виявити ряд нетривіальних особливостей такого опису [5—10]. Звернемо увагу на математичні аспекти цього підходу.

1. Конфігураційний простір і форми динаміки [8, 9]. Система N точкових частинок у просторі Мінковського $\mathbf{M}_4$ з координатами $x^\mu (\mu = \overline{0, 3})$ і метрикою $\|\eta_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ описується набором світових ліній $\gamma_a (a = \overline{1, N})$ — часоподібних кривих

$$\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbf{M}_4, \quad \tau \mapsto x_a^\mu(\tau); \quad \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0.$$

Для переходу до тривимірного опису треба визначити відношення одночасності між точками (подіями) різних світових ліній як відношення еквівалентності, що задовільняє певним фізичним вимогам [11].

Нехай $\sigma : \mathbf{M}_4 \to I \subset \mathbb{R}$ — непостійне ($d\sigma \neq 0$) сюр'ективне відображення. Розглянемо шарування [12] $\Sigma = \{\Sigma_t \mid t \in I\}$ корозмірності 1 простору Мінковського гіперповерхнями $\Sigma_t = \{x \in \mathbf{M}_4 \mid \sigma(x) = t \in I\}$, де

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma \geqslant 0, \quad \partial_\mu := \partial/\partial x^\mu. \tag{1}$$

Внаслідок умови (1) Σ_t трансверсальна до світових ліній, тобто перетинає кожну γ_a в одній і тільки одній точці $x_a(t)$; співвідношення $x_a(t) \in \Sigma_t$ дозволяє виразити часову координату $x_a^0(t)$ через просторові x_a^i $(i = 1, 2, 3)$ і параметр еволюції t співвідношенням $x_a^0 = \varphi(t, x_a^i)$.

Означення 1. *Одночасність подій x, $x' \in \mathbf{M}_4$ — це відношення еквівалентності*

$$x \sim x' \Leftrightarrow \exists t \in I : x, x' \in \Sigma_t.$$

Фактор-простір $\mathbf{M}_4/\sim$ ізоморфний до $I \subset \mathbb{R}$. Завдяки умові (1) усі Σ_t дифеоморфні між собою. Тим самим на $\mathbf{M}_4$ виникає структура (тривіальної) волокнистої в'язки (fiber bundle) [12] $\tau : \mathbf{M}_4 \to I$ з типовим волокном $\mathbf{E}^3 \simeq \tau^{-1}(t) = \Sigma_t$, аналогічна до галілеєвої структури простору-часу нерелятивістської механіки [13]. Гладкий многовид $\mathbf{E}^3$ служить конфігураційним простором однієї (безспінової) частинки.

Для системи N частинок конфігураційний простір $\mathbf{E} = \mathbf{E}^3 \times \ldots \times \mathbf{E}^3$ (N разів) параметризований координатами x_a^i $(a = \overline{1, N};\ i = 1, 2, 3)$; довільний рух системи описується перетином $\gamma \in \Gamma(\pi)$ (тривіальної) в'язки $\pi : \mathbf{F} \to I$ з волокном $\mathbf{E}$. Локальними координатами на $\mathbf{F}$ є (t, x_a^i), а перетини $\gamma : t \mapsto (t, x_a^i(t))$ визначаються набором $3N$ функцій $x_a^i(t)$.

* О. С. Парасюк у 1968 р. звернув увагу авторів на проблему побудови релятивістської механіки системи частинок саме у цьому плані.

Означення 2. *Формою релятивістської динаміки у геометричному підході називається тривимірний опис системи, пов'язаний з означенням одночасності за допомогою шарування* Σ*.

Вказані Діраком [1] часткові приклади таких форм — це миттєва, $\sigma(x) = x^0$, $I = \mathbb{R}$, фронтальна, $\sigma(x) = x^0 - x^3$, $I = \mathbb{R}$, і точкова, $\sigma(x) = x^\nu x_\nu$, $I = \mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$. Перші дві є найбільш зручними і вживаються найчастіше в застосуваннях.

2. Тривимірне одночасове лагранжеве формулювання динаміки [6—9]. Систему частинок моделюємо функціоналом дії

$$S = \int\limits_I L dt, \quad L : J\pi \to \mathbb{R}, \tag{2}$$

де функція Лагранжа L, взагалі кажучи, означена на загальному струменевому (jet) продовженні $J^\infty\pi := J\pi$ в'язки $\pi : \mathbf{F} \to I$ [14, 15]. Локально $L = L(t, \overset{s}{x}{}_a^i)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, де $\overset{s}{x}{}_a^i := d^s x_a^i / dt^s$; обмеження згори на s не накладаємо.

Рух системи описується критичними перетинами [16] в'язки π, які забезпечують стаціонарність функціоналу (2). Множина $\Gamma_0 \subset \Gamma(\pi)$ критичних перетинів визначається рівняннями Ейлера — Лагранжа

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-D)^s \frac{\partial L}{\partial \overset{s}{x}{}_a^i} = 0, \tag{3}$$

де

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{a=1}^{N} \overset{s+1}{x}{}_a^i \frac{\partial}{\partial \overset{s}{x}{}_a^i}$$

— оператор повної похідної по t на $J\pi$.

3. Реалізація групи та алгебри симетрії [6, 9]. Для формулювання умов інваріантності одночасового лагранжевого опису треба побудувати реалізацію групи симетрії на перетинах в'язки (або на її продовженні $J\pi$). Хоча нас цікавить група $\mathcal{P}(1, 3)$, розглянемо довільну групу $\mathbf{G}$, дія якої задана в просторі Мінковського:

$$\mathbf{G} \ni g : \mathbf{M}_4 \to \mathbf{M}_4, \quad x \mapsto gx = \Psi(x, g). \tag{4}$$

Введення (локальних) координат λ^α, $\alpha = \overline{1, r}$, де $r = \dim \mathbf{G}$, дозволяє перейти до відповідної алгебри Лі векторних полів на $\mathbf{M}_4$, породженої базисом

$$\mathcal{X}_\alpha = \zeta_\alpha^\mu(x)\,\partial_\mu, \qquad \zeta_\alpha^\mu := \left.\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda^\alpha}\right|_{\lambda=0}$$

з комутаційними співвідношеннями

$$[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, r},$$

де $c_{\alpha\beta}^\gamma$ — тензор структурних констант групи $\mathbf{G}$.

Дія (4) групи $\mathbf{G}$ в $\mathbf{M}_4$ індукує дію групи в множині світових ліній $g : \gamma \mapsto g\gamma = \{gx \mid x \in \gamma\}$. Якщо в деякій формі динаміки світові лінії γ_a частинок описуються функціями $x_a^i(t)$, а криві $\gamma'_a = g\gamma_a$ — функціями $x'^i_a(t)$, то відповідність $x_a^i(t) \mapsto x'^i_a(t)$ визначає шукану дію в $\Gamma(\pi)$ і в $J\pi$.

При $N > 1$ образи $g(x_a(t))$ одночасних точок $x_a(t) \in \Sigma_t$ можуть належати різним листам Σ_{t_a} шарування Σ, де $t_a = \sigma[g(x_a(t))]$; зокрема, це характерно для групи Пуанкаре $\mathcal{P}(1, 3)$. Навпаки, одночасні точки $x'_a(t)$ мають прообрази на різних гіперповерхнях $\Sigma_{t_a^*}$, де $t_a^* = \sigma[g^{-1}(x'_a(t))]$, так

* Символ Σ використовуватиметься далі як для шарування, так і для відповідної форми динаміки.

що

$$x'^{i}_{a}(t) = \Psi^{i}(x_{a}(t^{*}_{a}), g), \quad t^{*}_{a} = \sigma[\Psi(x'_{a}(t), g^{-1})]. \tag{5}$$

Співвідношення (5) складають систему функціональних рівнянь для знаходження $x'^{i}_{a}(t)$. В околі одиниці групи в першому порядку по групових параметрах λ^{α} ці рівняння мають розв'язок

$$x'^{i}_{a} = x^{i}_{a} + \lambda^{\alpha}\xi^{i}_{a\alpha}, \tag{6}$$

де

$$\xi^{i}_{a\alpha} := \zeta^{i}_{\alpha}(x^{i}_{a}, \varphi(t, x^{i}_{a})) - v^{i}_{a}\eta_{a\alpha}, \quad v^{i}_{a} := \overset{1}{x}{}^{i}_{a},$$

$$\eta_{a\alpha} := (\mathcal{X}_{\alpha}\sigma)(x^{i}_{a}, \varphi(t, x^{i}_{a})). \tag{7}$$

Співвідношення (6), (7) визначають дію групи $\mathbf{G}$ на $J\pi$ дотичними перетвореннями [17, 6, 9], що генеруються векторними полями Лі — Беклунда

$$X_{\alpha} = \sum_{a=1}^{N}\sum_{s=0}^{\infty}(D^{s}\xi^{i}_{a\alpha})\frac{\partial}{\partial \overset{s}{x}{}^{i}_{a}}, \qquad \alpha = \overline{1, r}. \tag{8}$$

Явний вигляд генераторів X_{α} групи G визначається формою динаміки Σ.

Т в е р д ж е н н я 1 [9]. *Векторні поля* (8) *у будь-якій формі динаміки задовольняють комутаційним співвідношенням*

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = c^{\gamma}_{\alpha\beta}X_{\gamma}.$$

Це твердження, що доводиться безпосередніми обчисленнями, показує, що поля X_{α} породжують реалізацію алгебри Лі групи $\mathbf{G}$ на $J\pi$.

4. У м о в и с и м е т р і ї л а г р а н ж е в о г о о п и с у [6, 9].

О з н а ч е н н я 3. *Лагранжів опис системи частинок симетричний (інваріантний) відносно групи* $\mathbf{G}$, *якщо множина* Γ_0 *критичних перетинів в'язки* π, *визначених рівняннями* (4), *інваріантна відносно дії групи* $\mathbf{G}$: $\gamma \in \Gamma_0 \Rightarrow (\forall g \in \mathbf{G})\ g\gamma \in \Gamma_0$.

Т в е р д ж е н н я 2 [6, 8, 9]. *Достатньою умовою інваріантності лагранжевого опису відносно групи* $\mathbf{G}$ *є існування* $r = \dim \mathbf{G}$ *таких функцій* $\Omega_{\alpha} : J\pi \to \mathbb{R}$, *що*

$$X_{\alpha}L = D\Omega_{\alpha}, \tag{9}$$

$$X_{\alpha}\Omega_{\beta} - X_{\beta}\Omega_{\alpha} = c^{\gamma}_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma}. \tag{10}$$

Співвідношення (9), (10) утворюють сумісну систему лінійних рівнянь першого порядку для $r + 1$ невідомих функцій L, Ω_{α}. Їх розв'язки для випадку $\mathbf{G} = \mathcal{P}(1, 3)$ визначають класичний релятивістський лагранжів опис системи частинок.

Довільність вибору сукупності функцій Ω_{α}, $\alpha = \overline{1, r}$, як розв'язку системи (10) несуттєва в силу такого твердження.

Т в е р д ж е н н я 3 [6, 18]. *Будь-якому розв'язку* L^1, Ω^1_{α} *системи* (9), (10) *відповідає розв'язок* L^2, Ω^2_{α} *цієї ж системи, де* $L^2 = L^1 + DV$, *а функція* $V : J\pi \to \mathbb{R}$ *задовольняє сумісну систему рівнянь* $X_{\alpha}V = \Omega^2_{\alpha} - \Omega^1_{\alpha}$.

5. К л а с и ф і к а ц і я ф о р м д и н а м і к и в г е о м е т р и ч н о м у п і д х о д і [9]. Формі динаміки, означеній шаруванням Σ, природньо ставляться у відповідність дві підгрупи групи $\mathbf{G}$.

О з н а ч е н н я 4. *Групою інваріантності форми динаміки (шарування)* Σ *називається підгрупа*

$$\mathbf{G}_{inv}(\Sigma) := \{g \in \mathbf{G} \mid (\forall t)\ g\Sigma_t \in \Sigma\}; \qquad \dim \mathbf{G}_{inv} = r_{inv} \leqslant r.$$

О з н а ч е н н я 5. *Групою стабільності форми динаміки* Σ *називається підгрупа*

$$\mathbf{G}_{st}(\Sigma) := \{g \in \mathbf{G} \mid (\forall t)\ g\Sigma_t = \Sigma_t\}; \qquad \dim \mathbf{G}_{st} = r_{st} \leqslant r_{inv}.$$

Очевидно, що $\mathbf{G}_{st}(\Sigma)$ є підгрупою групи $\mathbf{G}_{inv}(\Sigma)$. Надалі будемо вважати, що координати λ^α на $\mathbf{G}$ упорядковані таким чином, що перші r_{inv} індексів нумерують параметри підгрупи $\mathbf{G}_{inv}$, у тому числі перші r_{st} індексів — параметри підгрупи $\mathbf{G}_{st}$.

Означення 6. *Векторні поля Лі — Беклунда X та Y на $J\pi$ називаються еквівалентними, якщо $Y = X + \omega D$, де $\omega : J\pi \to \mathbb{R}$.*

Породжені такими полями перетворення теж називаемо еквівалентними.

Твердження 4 [6, 9]. *У реалізації (6) — (8) векторні поля X_α, $\alpha = \overline{1, r_{inv}}$, породжують дію $\mathbf{G}_{inv}(\Sigma)$ дотичними перетвореннями многовиду $J\pi$, еквівалентними продовженим точковим, тобто автоморфізмам в'язки π. Зокрема, поля X_β, $\beta = \overline{1, r_{st}}$, породжують дію $\mathbf{G}_{st}(\Sigma)$ продовженими автоморфізмами π.*

Дійсно, у співвідношеннях (7) при $\alpha = \overline{1, r_{inv}}$ функції $\eta_{a\alpha}$ залежать тільки від t; зокрема, для $\mathbf{G}_{st}(\Sigma)$ маемо $\eta_\beta = 0$, $\beta = \overline{1, r_{st}}$.

Означення 7. *Генератори (8) перетворень $J\pi$, що не належать до реалізації $\mathbf{G}_{inv}(\Sigma)$, назвемо неточковими полями.*

Твердження 5 [9]. *Існує розв'язок системи (15), (16), у якому*

$$\Omega_\beta = \eta_\beta(t) L, \quad \beta = \overline{1, r_{inv}}. \tag{11}$$

Підстановка (11) дозволяе зменшити число шуканих функцій у системі (9), (10) до $r - r_{inv} + 1$. Тому з точки зору лагранжевого опису зручними є форми динаміки з якнайбільшою розмірністю групи $\mathbf{G}_{inv}$.

Твердження 6 [9]. *Необхідною умовою того, щоб форма динаміки Σ мала підгрупу $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ своєю групою інваріантності, є співвідношення*

$$(\mathcal{X}_\alpha \sigma)|_{\sigma(x)=t} = \eta_\alpha(t), \tag{12}$$

де $\mathcal{X}_\alpha$ — генератори групи $\mathbf{H}$.

Зауважимо, що ця умова не є достатньою: група інваріантності $\mathbf{G}_{inv}'(\Sigma)$ може містити $\mathbf{H}$ як підгрупу.

Повна класифікація геометричних форм релятивістської динаміки отримана в [9] на основі інтегрування системи (12) для всіх нееквівалентних (щодо спряження внутрішніми автоморфізмами) підалгебр алгебри Лі $\mathcal{AP}(1, 3)$ [19] розмірності більшої від 3. Слід підкреслити, що внаслідок транзитивності дії $\mathcal{P}(1, 3)$ в $\mathbf{M}_4$ не існує форма динаміки (у сенсі означення 2), для якої $\mathbf{G}_{inv}(\Sigma) = \mathcal{P}(1, 3)$. Максимальні розмірності групи $\mathbf{G}_{inv}(\Sigma) \subset \subset \mathcal{P}(1, 3)$ відповідають згаданим у п.1 діраківським формам — фронтальній ($r_{inv} = 8$), миттєвій ($r_{inv} = 7$) і точковій ($r_{inv} = 6$).

6. Теорема про невзаємодію в лагранжевому описі. Якщо група інваріантності $\mathbf{G}_{inv}(\Sigma) \neq \mathbf{G}$, то в реалізації (8) необхідно містяться неточкові поля.

Твердження 7 (теорема про невзаємодію) [18]. *Нехай реалізація (8) алгебри симетрії містить неточкове поле X, для якого в (7) $\eta_a \neq \eta_b$ ($a, b = \overline{1, N}$, $a \neq b$). Тоді система (9), (10) допускає у класі функцій, заданих на скінченному струменевому продовженні $J^s\pi$, $s < \infty$ (тобто залежних від скінченого числа похідних $\overset{s}{x}{}^i_a$), тільки розв'язки вигляду*

$$L = \sum_{a=1}^{N} L_a + DV, \qquad L_a = L_a(t, x_a^i, \ldots, \overset{s}{x}{}^i_a),$$

$$\Omega_\alpha = \sum_{a=1}^{N} \Omega_{a\alpha} + X_\alpha V, \qquad \Omega_{a\alpha} = \Omega_{a\alpha}(t, x_a^i, \ldots, \overset{s}{x}{}^i_a).$$

Таким чином, лагранжіан і функції Ω_α розпадаються на суму доданків, кожен з яких залежить від змінних тільки однієї частинки.

Умови теореми про невзаємодію виконуються для $\mathbf{G} = \mathcal{P}(1, 3)$; це означає, що лагранжіан, залежний від скінченного числа похідних, не може описувати релятивістські взаємодії частинок.

Точні розв'язки умов інваріантності (9), (10) у випадку групи Пуанкаре, які описують взаємодію частинок, можна одержати, використовуючи багаточасовий формалізм інтегралів дії типу Фоккера [20]. Зведення їх до одночасової форми дає лагранжіани взаємодії, що задовольняють умовам інваріантності і залежать від нескінченного числа похідних.

1. *Dirac P*. Forms of relativistic dynamics // Rev. Mod. Phys.— 1949.— **21** N 3.— P. 392—399.
2. *Wigner E*. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Ann. Math.— 1939.— **40**, N 1.— P. 149—204.
3. *Широков Ю. М*. Релятивистская инвариантность в квантовой теории // Физ. элементар. частиц и атом. ядра.— 1972.— **3**, № 3 — С. 606—649.
4. *Фущич В. И., Никитин А. Г*. Симметрия уравнений Максвелла.— Киев : Наук. думка · 1983.— 199 с.
5. *Гайда Р. П*. Квазирелятивистские системы взаимодействующих частиц // Физ. элементар. частиц и атом. ядра.— 1982.— **13**, № 2.— С. 427—493.
6. *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И*. Лагранжева классическая релятивистская механика системы прямо взаимодействующих частиц. I // Теорет. мат. физика.— 1980.— **44**, № 2.— С. 194—208.
7. *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И*. Лагранжева классическая релятивистская механика системы прямо взаимодействующих частиц. II // Там же.—**45**, № 2.— С. 180—198.
8. *Гайда Р. П., Ключковський Ю. Б., Третяк В. І*. Форми релятивістської динаміки в лагранжевому описі системи частинок // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1982.— № 5.— С. 7—10.
9. *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И*. Формы релятивистской динамики в классическом лагранжевом описании системы частиц // Теорет. мат. физика.— 1983.— **55**, № 1.— С. 88—105.
10. *Gaida R., Kluchkovsky Yu., Tretyak V*. Three-dimensional Lagrangian approach to the classical relativistic dynamics of directly interacting particles // Constraint's Theory and Relativistic Dynamics.— Singapore : World Sci. Publ. 1987.— P. 210—241.
11. *Reichenbach H*. The Philosophy of Space and Time.— New York : Dover, 1938.
12. *Lawson H. B. (jr)*. Foliations // Bull. AMS.— 1974.— **80**, N 3.— P. 369—418.
13. *Trautman A*. Fibre bundles associated with space-time // Repts. Math. Phys.— 1970.— **1**, N 1.— P. 29—62.
14. *Ver Eeke P*. Connexions d'ordre infini // Cah. Topol. Geom. Diff.— 1969.— **11**, N 3.— P. 281—321.
15. *Krupka D*. Some geometric aspects of variational problems in fibered manifolds // Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Purkine Brun. Phys.— 1973.— **14**, N 10.— P. 1—65.
16. *Krupka D*. A geometric theory of ordinary first order variational problems in fibered manifolds. I. Critical sections // J. Math. Anal. Appl.— 1975.— **49**, N 1.— P. 180—206.
17. *Ибрагимов Н. Х*. Группы преобразований в математической физике.— М. : Наука 1983.— 280 с.
18. *Ключковский Ю. Б., Третяк В. И*. Касательные преобразования Ли-Бэклунда и структура квазиинвариантных лагранжианов // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов.— Киев : Наук. думка, 1989.— С. 91—97.
19. *Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H*. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincare group // J. Math. Phys.— 1975.— **16**, N 8.— P. 1597—1614.
20. *Gaida R. P., Tretyak V. I*. Single-time form of the Fokker-type relativistic dynamics// Acta Phys. Pol,— 1980,— B11, N 7.— P, 509—536,

Получено 10,06,91