УДК 519.31:530.182

М. С. ГОНЧАР, д-р фіз.-мат. наук,
В. Г. КОЗИРСЬКИЙ, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т теорет. фізики АН України, Київ)

Прихована симетрія та малі галуження в анізотропних гратчастих моделях

Дан метод теоретического описания несоизмеримых фаз и найдена однопараметрическая группа их симметрии. Получено представление для свободной энергии непериодических конфигураций. Найдены условия существования решения, экстремализующего удельную свободную энергию, и доказана теорема о малых ветвлениях Получено глобальное решение в элементарных функциях для экстремальной конфигурации. Доказано существование фазового перехода из несоизмеримой фазы в иные в зависимости от обменных взаимодействий.

Подано метод теоретичного опису неспіввимірних фаз і знайдено однопараметричну групу їхньої симетрії. Одержано представлення для вільної енергії неперіодичних конфігурацій Знайдено умови існування розв'язку, що екстремалізує вільну енергію, і доведено теорему про малі галуження. Здобуто глобальний розв'язок в елементарних функціях для екстремальної конфігурації. Доведено наявність фазового переходу з неспільномірної фази до інших в залежності від обмінних взаємодій.

В даній роботі розвинуто метод опису неспіввимірних фаз у модельних системах магнетизму в білякритичній області. Труднощі опису фазової діаграми у таких системах обумовлено, по-перше, необхідністю продовження питомої вільної енергії (на один вузол гратки) з множини періодичних конфігурацій на неперіодичні, а по-друге, побудовою екстремальних конфігурацій. Останнє не є тривіальним через те, що нижче критичної області існує ціла низка розв'язків. Тому застосувати теорему про нерухому точку до отриманої системи рівнянь для екстремальних конфігурацій не можливо. Істотним для доведення теореми про малі галуження виявилось те, що було знайдено приховану симетрію вільної енергії неперіодичних конфігурацій. На фазовому просторі досліджуваних систем група цієї симетрії діє ергодично. Ергодичні властивості гороциклів вивчав О. С. Парасюк в [1, 2]. В даній роботі знайдено умови, за яких справедлива теорема про малі галуження. Екстремальні конфігурації, що описують неспіввимірні фази, інваріантні відносно дії знайденої групи перетворень. Доведено наявність фазового переходу з неспіввимірної фази до інших фаз в анізотропних моделях Ізінга зі зниженням температури. Фазовий перехід є переходом 1-го роду.

Побудова теоретичного опису структури фазової діаграми модельних гратчастих систем є ділянкою багаторічного зосередження дослідницьких вусиль [3]. Найцікавіші результати у цьому напрямку було одержано, в основному, методами комп'ютерного експерименту [4]. Послідовний аналітичний підхід започатковано і розвинуто в работах [5—9].

Детальний аналіз поведінки вільної енергії вимагає введення множини векторів $X = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ ($i \in Z_1$, x_i набувають значень у множині дійсних чисел зі скалярним добутком

$$\langle x_1, x_2\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|i| x_i^{(1)} x_i^{(2)}}}{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|i|}},$$

$x \in X$, якщо $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle < \infty$. Вектор зветься періодичним періоду N, якщо $x_{i+N} = x_i \ \forall\ i \in Z_1$. Нехай N_1 — деяке ціле число таке, що $N = [N_1/2]$, а $q = n/N_1$ — деякий нескорочуваний дріб. Вектори виду $\{e,\ e_1(q), \ldots, e_1(Nq),\ e_2(q), \ldots, e_2(Nq)\}$, де $e = \{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, $a_i = 1, \forall i$, $e_1(q) =$

$= \{\cos i2\pi q\}_{i=-\infty}^{\infty}$, $e_2(q) = \{\sin i2\pi q\}_{i=-\infty}^{\infty}$ належать множині X, утворюють ортогональну систему і періодичні з періодом N_1.
Питому вільну енергію моделі $ANNNI$ (анізотропна модель Ізінга зі взаємодією других сусідів) у випадку N_1-періодичних конфігурацій

$$F_n = \frac{1}{2N_1} \sum_{i=1}^{N_1} f(m_i)$$

можна записати у вигляді $F_h = \frac{1}{2} \langle \varepsilon, f(m) \rangle$, де

$$f(m) = \{f(m_i)\}_{i=-\infty}^{\infty},\ f(m_i) = m_i [J_1(m_{i+1} + m_{i-1}) + J_2(m_{i+2} + m_{i-2}) + 4J_0 m_i + 2h] + T[(1 + m_i)\ln(1 + m_i) + (1 - m_i)\ln(1 - m_i)].$$

(позначення очевидні, детально пояснені у [5 — 7]). Нехай

$$m = \sum_{l=1}^{N} [a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0 \varepsilon, \quad N = [N_1/2],$$

$[n]$ — ціла частина n. Тоді

$$F_h = -\frac{1}{2} \langle m, Am \rangle + h \langle \varepsilon, m \rangle + \frac{T}{2} \langle \varepsilon, g(m) \rangle =$$

$$= -\frac{1}{2} \langle \sum_{l=1}^{N} [a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0 \varepsilon, \sum_{l=1}^{N} \Phi(lq) [a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0 \Phi_0 \varepsilon \rangle + h \langle \varepsilon, \sum_{l=1}^{N} [a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0 \varepsilon \rangle +$$

$$+ \frac{T}{2} \langle \varepsilon, g\left(\sum_{l=1}^{N} [a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0 \varepsilon \right\rangle, \tag{1}$$

$$g(x) = (1 + x)\ln(1 + x) + (1 - x)\ln(1 - x).$$

Через A позначено оператор

$$(Am)_i = -[J_1(m_{i+1} + m_{i-1}) + J_2(m_{i+2} + m_{i-2}) + 4J_0 m_i].$$

Оскільки $Ae_1(lq) = \Phi(lq) e_1(lq)$, $Ae_2(lq) = \Phi(lq) e_2(lq)$, то

$$F_h = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} (\alpha_l^2 + b_l^2) \Phi(lq) + a_0^2 \Phi_0 \right] + h a_0 +$$

$$+ \frac{T}{2} \langle \varepsilon, g \sum_{l=1}^{N} [a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0 \varepsilon \rangle,$$

де $\Phi(q) = -2(J_1 \cos 2\pi q + J_2 \cos 4\pi q + 2J_0)$ у моделі $ANNNI$ і $\Phi(q) = 2\left(\sum_{i=1}^{\infty} J_i \cos 2\pi i q + 2J_0\right)$ у випадку взаємодії з усіма сусідами.

Лема. *Для ірраціонального q існує термодинамічна границя вільної енергії на множині неперіодичних конфігурацій* $m = \sum_{l=1}^{\infty} [\alpha_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0 \varepsilon$ *за умови* $|a_0| + \sum_{l=1}^{\infty} (|a_l| + |b_l|) < 1$.

Дослідимо питання існування неперіодичних конфігурацій, що мінімізують вільну енергію. У випадку ірраціональних q вільна енергія на конфігурації $x = \sum_{l=1}^{N} [a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0 \epsilon$ має вигляд (1), де N незалежне від N_1, а середні обчислюються за формулою

$$\langle e_1(i_1 q) \ldots e_1(i_s q) e_2(j_1 q) \ldots e_2(j_m q)\rangle =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad m = 2M+1, \quad M = 0, 1, 2, \ldots, \\ (-1)^M \dfrac{1}{2^{s+2m}} \sum\limits_{\substack{t_{k'} = \pm i_{k'}, \\ \tau_l = \pm j_l}} \delta_{t_1 + \ldots + t_s + \tau_1 + \ldots + \tau_m 0} (-1)^k, \quad m = 2M, \end{cases} \tag{2}$$

k — число від'ємних τ_l.

Необхідною умовою мінімуму є рівняння

$$\frac{\partial F_h}{\partial a_i} = -\frac{a_i}{2}\Phi_i + \frac{T}{2}\langle e_1(iq), g'\left(\sum_{l=1}^{N}[a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0\epsilon\right)\rangle = 0,$$

$$\frac{\partial F_h}{\partial b_i} = -\frac{b_i}{2}\Phi_i + \frac{T}{2}\langle e_2(iq), g'\left(\sum_{l=1}^{N}[a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0\epsilon\right]\rangle = 0,$$

$$\frac{\partial F_h}{\partial a_0} = -a_0\Phi_0 + h + \frac{T}{2}\langle \epsilon, g'\left(\sum_{l=1}^{N}[a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0\epsilon\right)\rangle = 0,$$

які за відсутності зовнішнього поля і з урахуванням

$$g'(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \varphi(x),$$

$$T = T_0(1 - t^2), \quad T_0 = \Phi(q) = \Phi_1$$

набувають вигляду

$$a_1 = \frac{1-t^2}{t^2}\langle \frac{2}{3}u + v, e_1(iq)\rangle, \ b_1 = \frac{1-t^2}{t^2}\langle \frac{2}{3}u + v, e_2(q)\rangle,$$

$$a_i = \frac{(1-t^2)\Phi_1}{\Phi_i - (1-t^2)\Phi_1}\langle \frac{2}{3}u + v, e_1(iq)\rangle,$$

$$b_i = \frac{(1-t^2)\Phi_1}{\Phi_i - (1-t^2)\Phi_1}\langle \frac{2}{3}u + v, e_2(iq)\rangle,$$

$$a_0 = \frac{(1-t^2)\Phi_1}{2[\Phi_0 - (1-t^2)\Phi_1]}\langle \frac{2}{3}u + v, \epsilon\rangle, \tag{3}$$

$$u = \left(\sum_{l=1}^{N}[a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0\epsilon\right)^3,$$

$$v = \varphi\left(\sum_{l=1}^{N}[a_l e_1(lq) + b_l e_2(lq)] + a_0\epsilon\right).$$

З'ясуємо симетрію вільної енергії у випадку ірраціонального q. Встановимо для цього ще одне представлення для вільної енергії. Коефіцієнти поліномів вигляду $\langle \epsilon, \left(\sum_{i=1}^{N}[a_i e_1(iq) + b_i e_2(iq)] + a_0\epsilon\right)^p\rangle$ обчислюються в такому разі за формулою (2). Безпосередня перевірка дає $\langle e_1(i_1 q) \ldots e_1(i_s q) e_2(j_1 q) \ldots$ $\ldots e_2(j_m q)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos i_1\varphi \ldots \cos i_s\varphi \sin j_1\varphi \ldots \sin j_m\varphi d\varphi$, звідки

$$I_p(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N) = \langle e, \left(\sum_{i=1}^{N} [a_1 e_1(iq) + b_i e_2(iq)] + a_0 e\right)^p\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{N} [a_1 \cos i\varphi + b_i \sin i\varphi] + a_0\right)^p d\varphi.$$

Інтегранд є 2π-періодичною функцією φ, тому $I_p(a_1', b_1', \ldots, a_N', b_N', a_0) = I_p(a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N, a_0)$, де

$$a_i' = a_i \cos i\varphi_0 + b_i \sin i\varphi_0,$$

$$b_i' = -a_i \sin i\varphi_0 + b_i \cos i\varphi_0, \qquad 0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Дійсно,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sum_{i=1}^{N} [a_i \cos i(\varphi + \varphi_0) + b_i \sin i(\varphi + \varphi^0)] + a_0\right)^p =$$

$$= \int_0^{2\pi+\varphi_0} d\varphi \left(\sum_{i=1}^{N} [a_i \cos i\varphi + b_i \sin i\varphi] + a_0\right)^p =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sum_{i=1}^{N} [a_i \cos i\varphi + b_i \sin i\varphi] + a_0\right)^p.$$

Отже, I_p — інваріант щодо перетворень (4) групи G, яка діє у $2N$-вимірному просторі. Завдяки довільності φ і збіжності ряду для вільної енергії у випадку досить малих a_i, b_i вільна енергія є інваріантом групи перетворень G.

Для інваріантів групи G вигляду $\Phi(a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N, a_0)$ справджується тотожність

$$\sum_{l=1}^{N} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a_l} l b_l - \frac{\partial \Phi}{\partial b_l} l a_l\right] \equiv 0. \tag{5}$$

Питання про існування екстремальних конфігурацій не просте. У цій статті воно досліджується у випадку невеликих відхилень від критичної температури. Наявність групи інваріантності вільної енергії не дозволяє скористатись стандартними способами (типу теорії збурень) для побудови екстремальної конфігурації.

Якщо зробити певні припущення щодо характеру розв'язків рівнянь (3), а саме:

$$a_1 = t\overline{a}_1(t) = t\overline{a}_1, \quad a_i(t) = t^2\overline{a}_i(t) = t^2\overline{a}_i, \quad a_0 = t^2\overline{a}_0(t) = t^2\overline{a}_0,$$

$$b_1 = t\overline{b}_1(t) = t\overline{b}_1, \quad b_i(t) = t^2\overline{b}_i(t) = t^2\overline{b}_i,$$

то система рівнянь для конфігурацій, що екстремалізують вільну енергію, набуває вигляду

$$\overline{a}_1 = \frac{1-t^2}{t^3}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\cdot)\cos\varphi_0 d\varphi_0, \qquad \overline{b}_1 = \frac{1-t^2}{t^3}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\cdot)\sin\varphi_0 d\varphi_0,$$

$$\overline{a}_i = \frac{A_i}{t^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\cdot)\cos i\varphi_0 d\varphi_0, \quad \overline{b}_i = \frac{A_i}{t^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\cdot)\sin i\varphi_0 d\varphi_0, \tag{6}$$

$$\overline{a}_0 = \frac{A_0}{t^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\cdot)\, d\varphi_0, \quad A_i = \frac{(1-t^2)\Phi_1}{\Phi_i - (1-t^2)\Phi_1}, \quad i \geqslant 2,$$

$$A_0 = \frac{(1-t^2)\Phi_1}{2[\Phi_0 - (1-t^2)\Phi_1]},$$

де

$$g_1(\cdot) = g_1\Big(t^2 \sum_{l=2}^{N} [\overline{a}_l \cos l\varphi_0 + \overline{b}_l \sin l\varphi_0] + \overline{a}_0 t^2 + t(\overline{a}_1 \cos \varphi_0 + \overline{b}_1 \sin \varphi_0)\Big),$$

$$g_1(x) \leqslant 2x^3(1 + x^2 + x^4 + \ldots)/3 = \frac{2}{3}\frac{x^3}{1-x^2},$$

$$g_1'(x) = 2x^2(1 + x^2 + x^4 + \ldots) = \frac{2x^2}{1-x^2}.$$

Введемо у $2N-1$-вимірному просторі норму $|\{\overline{a}, \overline{b}\}| = \max\limits_i (\{|\overline{a}_i|, |\overline{b}_i|\}, |\overline{a}_0|)$. Нехай $|\{\overline{a}, \overline{b}\}| \leqslant A$, де A — деяке число, що буде вибрано далі, а також нехай $\max\{|\overline{a}_1|, |\overline{b}_1|\} \leqslant A$. В операторному вигляді (6) може бути подано як $\{\overline{a}, \overline{b}\} = F(t, \{\overline{a}, \overline{b}\}, \overline{a}_1, \overline{b}_1\}$, де F — рядок, складений з правих частин (6). Покажемо, що F є оператором стиснення на деякій кулі радіуса A за умови, що t досить мале, а $\max\{|\overline{a}_1|, |\overline{b}_1|\} \leqslant A$. Оператор F переводить кулю в себе і є оператором стиснення, якщо виконуються такі нерівності:

$$t^2(2N-1)A + 2At < 1,$$

$$\frac{A_N(q)}{t^2}\frac{2}{3}\frac{[t^2(2N-1)A + 2At]^3}{1-[t^2(2N-1)A+2At]^2} < 1,$$

$$NA_N(q)\,2\,\frac{[t^2(2N-1)A + 2At]^2}{1-[t^2(2N-1)\cdot A+2At]^2} < 1,$$

$$A_N(q) = \max_i \{A_i, A_0\} < \infty.$$

Нехай q таке, що $\min\limits_{i\geqslant 2} |\Phi(iq) - \Phi(q)| = \delta > 0$. Тоді існує таке $t_4 > 0$, що $A_N(q) = \max\limits_i \sup\limits_{|t|<t_4} |\overline{A}_i| < \infty$. Позначимо через $\alpha = \min\limits_{i=1,\ldots,4} \{t_i\}$. Якщо $t < \alpha$, то виконуватимуться усі чотири нерівності, і отже, F — оператор стиснення.

Звідси випливає, що справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо* $\max\{|a_1|, |b_1|\} < A$, $A > \sqrt{2}$, *то* $\exists \alpha > 0$: $0 < t < \alpha$, *що система рівнянь* (3) *без перших двох розв'язна однозначно, і розв'язком є аналітична функція параметрів* t, a_1, b_1 *в області їхньої зміни.*

Теорема справедлива як для раціональних, так и для ірраціональних q.

Оскільки вільна енергія є інваріантом групи перетворень G, то (5) виконується і для F. Скористаємось цією обставиною для випадку, коли за F можна взяти частину вільної енергії $\langle e, g_2(\cdot)\rangle = \psi(\{\overline{a}_1, \overline{b}_1\}, \ldots \ldots, \{\overline{a}_N, \overline{b}_N\}, \overline{a}_0, t)$, де $g_2(x) = \int\limits_0^x g_1(t)\,dt$. Тоді система рівнянь (3) набуває вигляду

$$\frac{\overline{a}_1}{A_1} = \frac{1}{t_4}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{a}_1}, \quad \frac{\overline{b}_1}{A_1} = \frac{1}{t^4}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{b}_1}, \tag{7}$$

$$\frac{\overline{a}_1}{A_i} = \frac{1}{t^4}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{a}_i}, \quad \frac{\overline{b}_i}{A_i} = \frac{1}{t^4}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{b}_i}, \tag{8}$$

$$\frac{\overline{a}_0}{A_0} = \frac{1}{t^4}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{a}}, \qquad A_1 = 1 - t^2.$$

Розглянемо тотожність (5) на розв'язку $(\{\overline{a}_i^*, \overline{b}_i^*\}, \overline{a}_0^*)$. Врахування (8) дає t^4 і $A_i^{-1}(\overline{a}_i^*\overline{b}_i^* - \overline{a}_i^*\overline{b}_i^*) \equiv 0$. Отже,

$$\overline{b}_1 \frac{\partial\psi}{\partial\overline{a}} (\overline{a}_1, \overline{b}_1, \overline{a}_2^*, \overline{b}_2^*, \dots, \overline{a}_N^*, \overline{b}_N^*, \overline{a}_0^*, t) -$$

$$-\overline{a}_1 \frac{\partial\psi}{\partial\overline{b}_1} (\overline{a}_1, \overline{b}_1, \overline{a}_2^*, \overline{b}_2^*, \dots, \overline{a}_N^*, \overline{b}_N^*, \overline{a}_0^*, t) \equiv 0,$$

$$\forall \max\{|\overline{a}_1|, |\overline{b}_1|\} = A.$$

Інваріантність ψ породжує коваріантність вектора $\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\overline{a}_1}, \frac{\partial\psi}{\partial\overline{b}_1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial\overline{a}_N}, \frac{\partial\psi}{\partial\overline{b}_N}\right\}$, тобто перетвореннями групи G він трансформується за законом

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_i'} = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}\cos i\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial b_i}\sin i\varphi,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial b_i'} = -\frac{\partial\psi}{\partial a_i}\sin i\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial b_i}\cos i\varphi.$$

Звідси випливає, що якщо $a_2^*, b_2^*, \dots, a_N^*, b_N^*, a_0^*$ — розв'язок (8) за деяких $\overline{a}_1, \overline{b}_1$, то вектор

$$\{a_2^*\cos 2\varphi + b_2^*\sin 2\varphi, \ -a_2^*\sin 2\varphi + b_2^*\cos 2\varphi, \dots, a_N^*\cos N\varphi + b_N^*\sin N\varphi,$$
$$-a_N^*\sin N\varphi + b_N^*\cos N\varphi, \ a_0^*\}$$

є розв'язком (8) для значень параметрів $\overline{a}_1', \overline{b}_1'$, що дорівнюють $\{\overline{a}_1\cos\varphi + \overline{b}_1\sin\varphi, -\overline{a}_1\sin\varphi\, \overline{b}_1\cos\varphi\}$. З единості розв'язку (8) випливає, що $\{a_2^*(\overline{a}_1', \overline{b}_1'), b_2^*(\overline{a}_1', \overline{b}_1'), \dots, a_N^*(\overline{a}_1', \overline{b}_1'), b_N^*(\overline{a}_1', \overline{b}_1')\}$ перетворюється коваріантно, тобто

$$a_i^*(\overline{a}_1', \overline{b}_1') = a_i^*(\overline{a}_1, \overline{b}_1)\cos i\varphi + b_i^*(\overline{a}_1, \overline{b}_1)\sin i\varphi,$$

$$b_i^*(\overline{a}_1', \overline{b}_1') = -a_i^*(\overline{a}_1, \overline{b}_1)\sin i\varphi + b_i^*(\overline{a}_1, \overline{b}_1)\cos i\varphi.$$

Це означає, що вільна енергія $F(\overline{a}_1, \overline{b}_1, a_2^*, b_2^*, \dots, a_N^*, b_N^*, a_0^*) = \overline{F}(\overline{a}_1, \overline{b}_1)$ — інваріант щодо перетворень групи обертань. Тоді рівняння (7) можуть бути подані у вигляді

$$\frac{\overline{a}_1}{A_1} = \frac{1}{t^4}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{a}_1}, \quad \frac{\overline{b}_1}{A_1} = \frac{1}{t^4}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{b}_1}. \tag{9}$$

З інваріантності $\psi(\overline{a}_1, \overline{b}_1, a_2^*, b_2^*, \dots, a_N^*, b_N^*, a_0^*, t)$ щодо групи обертань випливає, що $\psi(\overline{a}_1, \overline{b}_1, a_2^*, b_2^*, \dots, a_N^*, b_N^*, a_0^*, t) = \psi(\overline{a}_1, \overline{b}_1, t) = f(\overline{a}_1^2 + \overline{b}_1^2, t)$. Оскільки $\frac{1}{\overline{a}_1}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{a}_1} \equiv \frac{1}{\overline{b}_1}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{b}_1}$, то $\frac{1}{\overline{a}_1}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{a}_1} = 2f'(\overline{a}_1^2 + \overline{b}_1^2, t)$, де похідну взято за аргументом $\overline{a}_1^2 + \overline{b}_1^2$. Отже, (9) перетворюється на одне рівняння щодо $\overline{a}_1^2 + \overline{b}_1^2$:

$$1 = \frac{2}{3}(1 - t^2)\left[\frac{3}{8}\overline{a}_1^2 + \frac{3}{8}\overline{b}_1^2 + t^2\varphi_1(t, \overline{a}_1^2 + \overline{b}_1^2)\right], \tag{10}$$

котре, очевидно, має розв'язок при досить малих t, і котре можна отримати за допомогою ітерацій. Позначимо $x = \overline{a}_1^2 + \overline{b}_1^2$, тоді

$$x = \frac{4}{1 - t^2} - \frac{8}{3}t^2\varphi_1(t, x). \tag{11}$$

Оскільки $\varphi_1(t, x)$ — аналітична функція за сукупністю змінних в околі $|t| < \alpha$, $0 \leqslant x \leqslant 2A^2$, виберемо t, A такі, щоб виконувались нерівності

$$\sup_{x\leqslant 2A^2}\left|\frac{4}{1-t^2}-\frac{8}{3}t^2\varphi_1(t,x)\right|<2A^2, \qquad (12)$$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 2A^2}\frac{8}{3}t^2\left|\frac{\partial\varphi_1(t,x)}{\partial x}\right|<1.$$

Ці нерівності задовольняються вибором досить малих t, а також $2A^2 > > 4$. З (12) випливає, що (11) має розв'язок, який є аналітичною функцією t за досить малих $t < \alpha_1$. Отже, справджується така теорема.

Теорема 2 (теорема про малі галуження). *Існує таке $\alpha_1 > 0$, що для $0 < t < \alpha_1$ система рівнянь* (3) *розв'язна. Будь-який розв'язок з якогось довільного отримується дією групи* G (4). *Розв'язки є аналітичними функціями* t.

Для певності розглянемо модель *ANNNI*. У цьому випадку критична температура дорівнює $T_0 = \sup\limits_{0\leqslant q\leqslant 1}\Phi(q) = \sup\limits_q(-2J_1\cos 2\pi q - 2J_2\cos 4\pi q - 4J_0) > 0$. Подамо T_0 через J_1, J_2, J_0. З $\Phi'(q) = 0$ випливає, що 1) $\sin 2\pi q = 0$; 2) $2J_1 + 8J_2\cos 2\pi q = 0$.

1) Припустимо для певності, що $J_1 < 0$, $J_2 > 0$. Тоді $\Phi''(0) < 0$, якщо $J_2 < -J_1/4$. Оскільки $q = 0$, то для таких значень J_1 і J_2 галуження починається з феромагнітної фази: $T_0 = -2J_1 - 2J_2 - 4J_0$. У другому випадку:

$$\cos 2\pi q_0 = -J_1/4J_2, \quad |J_1/4J_2| < 1, \qquad (13)$$

$$\Phi''(q_0) = 8J_2(J_1^2/16J_2^2 - 1) < 0,$$

$$T_0 = J_1^2/4J_2 + 2J_2 - 4J_0. \qquad (14)$$

Розглянемо область параметрів, де $T_0' > T_0$. Це J_1 і J_2, що задовольняють нерівність $y^2 > 4(-2y-4)$, де $y = J_1/J_2$. Ця нерівність задовольняється для всіх дійсних y, крім $y = -4$. Але $y < 0$, і, щоб задовольнялась нерівність (13), має бути $-y/4 < 1$, тобто

$$-J_2/J_1 > 0{,}25. \qquad (15)$$

В області (15), якщо розв'язок рівняння (13) ірраціональний, галуження починається з неспіввимірної фази, якій відповідає критична температура, що задається формулою (14). Для такого ірраціонального q вільна енергія має вигляд [8]

$$F = -\frac{1}{4}(a_1^2 + b_1^2)\Phi(q) + \frac{T}{2}\sum_{n=0}\frac{(a_1^2+b_1^2)^{n+1}}{(n+1)(2n+1)}\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!},$$

$$\Phi(q) = T_0'.$$

Рівняння, яке задовольняється конфігурацією, що мінімізує вільну енергію, має вигляд

$$\Phi(q) - T = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_1^2+b_1^2)^n}{(2n+1)}\cdot\frac{(2n+1)!!}{2^n(n+1)!}. \qquad (16)$$

Розв'язок (16) завжди існує для $T \geqslant T_0' = \Phi(q)$. Крім того,

$$T \leqslant T_q = \Phi(q)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+1)2^{n+1}(n+1)!}\right]^{-1} = \frac{\Phi(q)}{2}.$$

Вільна енергія для температури обриву розв'язку

$$F = -\Phi(q)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Знайдемо ті T, за яких можливий перехід з неспіввимірної фази до феромагнітної. Вільна енергія в точці обриву розв'язку, тобто при

$a_1^2+b_1^2=1$, дорівнює $\frac{2\pi-7}{8}\Phi(q)$ [8]. Покажемо, що вільна енергія неспіввимірної фази при температурі обриву розв'язку вища від вільної енергії феромагнітної конфігурації при $T=0$, що й означатиме наявність фазового переходу з неспіввимірної конфігурації до феромагнітної.

Вільна енергія феромагнітної конфігурації при $T=0$ дорівнює $-\Phi(0)/2$. Умовою фазового переходу з неспіввимірної конфігурації є

$$-\frac{\Phi(0)}{2}<\frac{2\pi-7}{8}\Phi(q), \tag{17}$$

тобто це ті q, що задовольняють нерівність $\Phi(q)<\frac{4\Phi(0)}{7-2\pi}$. Оскільки вільна енергія антифази (впорядкування типу два спіни догори, два донизу) при $T=0$ рівна [6—9] $-\Phi(\pi/4)/2$, то умовою фазового переходу з неспіввимірної до антифази є нерівність

$$\Phi(q)<\frac{4\Phi(\pi/4)}{7-2\pi}. \tag{18}$$

Теорема 3. *Для ірраціональних* q, *що задовольняють нерівність* (17), *відбувається фазовий перехід з неспіввимірної фази до феромагнітної, у випадку ж виконання нерівності* (18) *відбувається перехід з неспіввимірної фази до антифази.*

1. *Парасюк О. С.* Потоки гороциклов на поверхностях постоянной отрицательной кривизны // Успехи мат. наук.— 1953.— 8, вып. 3.— С. 125—126.
2. *Парасюк О. С.* Эргодичность геодезических потоков на некоторых трехмерных многообразиях переменной отрицательной кривизны // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1953.— № 6.— С. 387—388.
3. *Selke W.* The ANNNI model — theoretical analysis and experimental application // Phys. Rep.— 1988.— 170, N 4.— P. 213—264.
4. *HØgh Jensen M., Bak P.* Mean-field the oryof the three-dimensional anisotropic Ising model as a four-dimensional mapping // Phys. Rev.— 1983.— B27, N 11.— P. 6853—6868.
5. *Гончар М. С., Козирський В. Г.* Приклад надструктури у моделі з конструкцією обмінних взаємодій // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1987.— № 7.— С. 51—54.
6. *Gonchar N. S., Kozyrski W. H.* Equilibrium spatial structures in the ANNNI model.: Nonlinear and turbulent processes in physics.— Kiev : Nauk. dumka, 1988.— V. 1.— P. 256—259.
7. *Gonchar N. S.* Correlation functions of some continuous model systems and description of phase transitions // Phys. Rep.— 1989.— 172, N 5.— P. 291—298.
8. *Гончар Н. С., Козырский В. Г.* Несоизмеримые фазы.— Киев, 1990.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; 90-51Р).
9. *Гончар М. С., Козирський В. Г.* Неспіввимірні структури анізотропної моделі Ізінга // Докл. АН УРСР. Сер. А.— 1991.— № 4.— С. 61—65.

Одержано 28.06.91