УДК 517.9

В. И. ФУЩИЧ, чл.-корр. АН Украины (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики

Представлен обзор результатов по исследованию условной симметрии нелинейных уравнений математической и теоретической физики: волнового уравнения, уравнений Шредингера, Буссинеска, Кортевега — де Фриза, Максвелла, Дирака. Построены семейства точных решений, которые не могут быть получены в классическом подходе Ли.

Наведено огляд результатів по вивченню умовної симетрії нелінійних рівнянь математичної і теоретичної фізики: хвильового рівняння, рівнянь Шредінгера, Буссінеска, Кортевега — де Фріза Максвелла, Дірака. Побудовано сім'ї точних розв'язків, які не можуть бути одержані в класичному підході Лі.

1. Введение. В настоящей статье будут представлены некоторые результаты по исследованию условной симметрии нелинейных уравнений математической и теоретической физики, полученные в Институте математики АН Украины.

Термин и концепция «условная симметрия уравнения» или «условная инвариантность» введены в [1—10]. Под условной симметрией уравнения мы понимаем симметрию некоторого подмножества решений. Очевидно, такое общее определение условной симметрии требует детализации, в противном случае оно неэффективно. Конкретизация этого понятия означает следующее: аналитически описать условия на решения уравнения, при которых некоторое подмножество решений имеет более широкие (или другие) симметрийные свойства, чем все множество решений. Если такое описание осуществлено, то мы можем получить такие решения уравнения, которые невозможно получить в классическом подходе Ли, в котором, как известно, редукция многомерного дифференциального уравнения в частных производных (ДУЧП) к уравнениям с меньшим числом переменных проводится с использованием симметрии всего множества решений.

Эйлер, Ли, Бейтмен (1914), В. Смирнов и Л. Соболев (1932) и многие другие классики использовали в неявном виде симметрию подмножеств решений линейных уравнений Д'Аламбера, Лапласа для построения точных решений.

Сравнительно недавно Блумен, Коул [11] предложили «неклассический метод решений, инвариантных относительно группы» для линейного теплового уравнения.

Олвер и Розенау (1986) [12] построили решения одномерного нелинейного уравнения акустики

$$u_{00} = uu_{11}, \quad u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

которые не могут быть получены с помощью метода Ли. Кларксон и Крускал (1989) [13] предложили «новый метод инвариантной редукции уравнения Буссинеска»

$$u_{00} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0. \tag{2}$$

Вывод 1. Если воспользоваться концепцией «условная симметрия ДУЧП», то все перечисленные результаты получаются с помощью единого симметрийного подхода.

Вывод 2. Большинство линейных и нелинейных уравнений математической и теоретической физики: Д'Аламбера, Максвелла, Шредингера, Дирака, Буссинеска, нелинейной теплопроводности и акустики обладают условной симметрией.

Замечание 1. Все решения уравнения Буссинеска (2), построенные Кларксоном и Крускалом, получены на основе концепции условной симметрии независимо в работах Леви и Винтернитца [14] и В. Фущича и Н. Серова [10].

Рассмотрим некоторую систему ДУЧП

$$L(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0, \tag{3}$$

$u = u(x)$, $x \in R(n+1)$, $u \in R$; $\underset{n}{u}$ — совокупность всевозможных производных n-го порядка.

Согласно Ли уравнение (3) инвариантно относительно оператора первого порядка

$$X = \xi^{\mu}(x, u)\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4}$$

если X — s- раз продолженный оператор удовлетворяет условию

$$\underset{s}{X}L = \lambda L, \text{ или } \underset{s}{X}L\,|_{L=0} = 0, \tag{5}$$

где $\lambda = \lambda\,(x, u, \underset{1}{u}, \ldots)$ — некоторое дифференциальное выражение.

Обозначим через символ $Q = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ совокупность операторов, не принадлежащих алгебре инвариантности (AI) уравнения (3), т. е. $Q_l \notin AI$, $l = 1, 2, \ldots, k$.

Определение 1 [2, 5]. *Уравнение* (3) *назовем условно инвариантным относительно оператора* Q, *если существует нетривиальное дополнительное условие на решение уравнения*

$$L_1\,(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0, \tag{6}$$

при котором уравнение (3) *вместе с уравнением* (6) *инвариантно относительно операторов* Q. *При этом предполагается, что уравнения* (3) *и* (6) *совместны.*

Дополнительное условие (6) выделяет из всего множества решений уравнения (3) некоторое подмножество. Оказывается, что для многих важных нелинейных уравнений математической физики эти подмножества имеют симметрию более широкую, чем все множество решений. Именно такие подмножества необходимо научиться выделять.

Пусть действие оператора Q на уравнение (3) задается формулой

$$\underset{s}{Q}L = \lambda_0 L + \lambda_1 L_1, \tag{7}$$

или

$$\underset{s}{Q}L\,\Big|_{\substack{Lu=0\\ L_1u=0}} = 0,$$

λ_0, $\lambda_1 \neq 0$ — некоторые дифференциальные выражения, зависящие от x, u, $\underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}$, $\underset{s}{Q}$ — s-раз продолженный оператор из Q. В наиболее простейшем случае условие инвариантности уравнений (3) и (6) означает, что

$$\underset{s}{Q}L_1 = \lambda_2 L + \lambda_3 L_1, \tag{8}$$

где λ_2, λ_3 — некоторые дифференциальные выражения.

Главная проблема нашего подхода описать в явном виде дополнительные уравнения вида (6), которые расширяют симметрию уравнения (3).

Эта общая и трудная проблема существенно упрощается, если в качестве дополнительного условия (6) выбрать такое нелинейное уравнение первого порядка

$$Qu = 0, \tag{9}$$

где

$$Q = J^{\mu}\,(x, u)\,\partial_{\mu} + Z\,(x, u)\,\partial_u, \quad \partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\,, \quad \partial_u \equiv \frac{\partial}{\partial U}\,. \tag{10}$$

При этом условие инвариантности уравнений (3), (9) имеют вид

$$\underset{s}{Q}L = \lambda_0 L + \lambda_1\,(Qu). \tag{11}$$

Определение 2. *Будем говорить, что уравнение* (3) *Q-условно инвариантно, если система* (3), (9) *инвариантна относительно оператора* (10).

Остановимся теперь на простейшем одномерном нелинейном уравнении акустики (1).

2. Условная симметрия уравнения (2).

Теорема 1 [8]. *Уравнение* (1) *Q-условно инвариантно относительно оператора* (10), *если коэффициентные функции*

$$J^0 \equiv A\,(x), \quad J^1 \equiv B\,(x), \quad Z = h\,(x)\,u + q\,(x), \quad x = (x_0, x_1)$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям.

Случай 1; $A \neq 0$, $B \neq 0$; $h = 2\left(B_1 - A_0 + \frac{B}{A} A_1\right)$, $q = 2\frac{B}{A} B_0$;

$$h_{00} + \frac{2h}{A} h_0 - \left[\frac{h}{A} A_{00} + \frac{2h}{A} A_{00} + 2\left(\frac{h}{A}\right)_1 B_0\right] = q_{11} -$$

$$-\left[\frac{q}{A} A_{11} + 2\left(\frac{q}{A}\right)_1 A_1\right],$$

$$h_{11} = \frac{h}{A} A_{11} + 2\left(\frac{h}{A}\right)_1 A_1, \tag{12}$$

$$q_{00} + 2\frac{q}{A} q_0 - \left[\frac{q}{A} A_{00} + 2\left(\frac{q}{A}\right)_1 B_0\right] = 0,$$

$$B_{11} - 2h_1 - \left[\frac{B}{A} A_{11} + 2\left(\frac{B}{A}\right)_1 A_1 + 2\frac{h}{A} A_1\right] = 0,$$

$$B_{00} + 2\frac{B}{A} h_0 - \left[\frac{B}{A} A_{00} + 2\left(\frac{B}{A}\right)_1 B_0\right] = 0.$$

Индексы внизу означают соответствующую производную.

Случай 2; $A = 0$, $B \neq 0$. Не умаляя общности, можно положить $B = 1$;

$$h_0 = 0, \quad h_{11} + 3hh_1 + h^3 = 0,$$

$$q_{11} + hq_1 + (3h_1 + 2h^2)\, q = 0, \tag{13}$$

$$q_{00} - qq_1 - hq^2 = 0.$$

Случай 3; $A_1 = 1$, $B = 0$;

$$h_1 = 0, \quad h_{00} + hh_0 - h^3 = q_{11},$$

$$q\,(q_0 + hq) = 0, \quad q_{00} + h_0 q - h^2 q = 0. \tag{14}$$

Итак, задача об Q-условной симметрии уравнения (2) свелась к построению частных или общих решений уравнений (12)—(14). Подчеркнем, что коэффициентные функции $J^\mu(x, u)$, $Z(x, u)$ оператора Q, в отличие от коэффициентных функций ξ^μ, η (4), являются решениями нелинейных уравнений. Это обстоятельство существенно затрудняет задачу об описании условной симметрии заданных уравнений. Однако, широкие классы частных решений таких уравнений можно построить.

Решая систему (12)—(14), мы нашли 12 типов неэквивалентных операторов условной симметрии уравнения (2). Два из них имеют вид

$$Q_1 = x_0^2 x_1 \partial_1 + (x_0^2 u + 3x_1^2 + b_5 x_0^5 + b_6)\, \partial_u, \tag{15}$$

$$Q_2 = \partial_1 + [W(x_0)\, x_1 + f(x_0)\, \partial_u], \tag{16}$$

$$W'' = W^2, \quad f'' = Wf,$$

W — функция Вейерштрасса.

Оператор (15) порождает анзац

$$U = x_1 \varphi(x_0) + 3x_0^{-2} x_1 - b_5 x_0^3 + b_6 x_0^{-2}. \tag{17}$$

Анзац (17) редуцирует нелинейное уравнение (2) к линейному ОДУ

$$x_0^2 \varphi''(x_0) = 6\varphi. \tag{18}$$

Оператор (16) порождает анзац

$$u = \frac{1}{2} W(x_0)\, x_1^2 + f(x_0)\, x_1 + \varphi(x_0). \tag{19}$$

Анзац (19) редуцирует уравнение (2) к линейному ОДУ с потенциалом Вейерштрасса W

$$\varphi''(x_0) = W\varphi(x_0). \tag{20}$$

Замечание 2. Аналогичным методом построены семейства точных решений многомерного уравнения [8]

$$u_{00} = u\Delta u. \tag{21}$$

Вывод 3. Анзацы, порождаемые операторами условной симметрии, во многих случаях редуцируют исходное нелинейное уравнение к линейному уравнению. Лиевская редукция, как правило, не меняет нелинейную структуру уравнения.

3. Условная симметрия уравнения Д'Аламбера. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Box u = F_1(u), \quad u = u(x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{22}$$

$F_1(u)$ — произвольная гладкая функция. Максимально широкой симметрией уравнения (22) является конформная группа $C(1, 3)$, в том и только в том случае, когда $F_1(u) = 0$ или $F_1(u) = \lambda u^3$. Наложим на решение (22) пуанкаре-инвариантное условие эйконального типа

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = F_2(u), \tag{23}$$

где $F_2(u)$ — гладкая функция.

Теорема 2 [14]. *В том случае, когда $F_1 = F_2 = 0$, уравнение (22) при условии (23) инвариантно относительно бесконечно-мерной алгебры, коэффициенты оператора (4) имеют вид*

$$\xi^\mu(x, u) = c^{00}(u)\, x^\mu + c^{\mu\nu}(u)\, x^\nu + d^\mu(u), \quad \eta(x, u) = \eta(u),$$

где $c^{00}(u)$, $c^{\mu\nu}(u)$, $\eta(u)$ — произвольные гладкие функции, зависящие только от u.

Из этой теоремы видно, что дополнительное условие (23) ($F_2 = 0$) выделяет из множества всех решений линейного уравнения Д'Аламбера ($F_1 = 0$) подмножество с уникальными симметрийными свойствами. Кроме того, система (22), (23) ($F_1 = F_2 = 0$) обладает тем свойством, что произвольная гладкая функция от решения будет снова решением.

Теорема 3 [9]. *Система (22), (23) инвариантна относительно конформной группы $C(1, 3)$ тогда и только тогда, когда*

$$F_1 = 3\lambda(u + c)^{-1}, \quad F_2 = \lambda, \tag{24}$$

где λ и $c =$ const.

Итак, дополнительное условие эйконального типа (23) расширяет класс нелинейных волновых уравнений, инвариантных относительно конформной группы. Это означает, что мы можем построить широкие классы точных решений уравнения (22), используя подгруппы конформной группы.

Замечание 3. Система (22), (23) [15] полностью проинтегрирована.

Рассмотрим лоренц-неинтегрированное волновое уравнение [4]

$$Lu \equiv \Box u + F(x, u, \underset{1}{u}) = 0, \tag{25}$$

$$F = -\left(\frac{\lambda_0}{x_0}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{x_1}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{x_2}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_3}{x_3}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2,$$

$$x_\mu \neq 0. \tag{26}$$

Максимальной группой инвариантности уравнения (25), (26) является двухпараметрическая группа

$$x_\mu \to x'_\mu = e^a x_\mu,$$
$$u \to u' = u + b,$$

a и b — произвольные параметры группы.

Дополнительное условие типа (6) к уравнению (25) выберем в виде

$$l_{\mu\nu} U(x) = 0, \quad \nu, \mu = 0, 1, 2, 3;$$
$$l_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu. \tag{27}$$

Непосредственной проверкой условий инвариантности (7) можно убедиться, что уравнения (25), (27) инвариантны относительно группы Лоренца 0 (1, 3). Это означает, что лоренц-инвариантный анзац

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{28}$$

редуцирует нелинейное волновое уравнение (25) к ОДУ

$$\omega \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + 2\frac{d\varphi}{d\omega} + \lambda^2 \left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)^2 = 0, \quad \lambda^2 = \lambda_\mu \lambda^\mu = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2.$$

Решением этого уравнения являются функции

$$\varphi(\omega) = 2(-\lambda^2)^{-1/2} \tan^{-1}[\omega(-\lambda^2)^{-1/2}], \quad \lambda^2 < 0,$$

$$\varphi(\omega) = -(\lambda^2)^{-1/2} \ln\left\{\frac{(\lambda^2)^{1/2} + \omega}{(\lambda^2)^{1/2} - \omega}\right\}, \quad \lambda^2 > 0,$$

$$\varphi(\omega) = \frac{c_1}{\omega} + c_2, \quad \lambda^2 = 0.$$

c_1, c_2 — константы.

Таким образом, условие (27) выделяет из множества решений лоренц-неинвариантного уравнения (25) подмножество, которое инвариантно относительно шестипараметрической группы Лоренца. Такое существенное расширение симметрии дает возможность построить широкие классы точных решений нелинейного волнового уравнения (25).

4. Условная симметрия нелинейного уравнения Шредингера. Рассмотрим нелинейное уравнение вида

$$Su + F(|u|)\, u = 0, \quad S \equiv i\frac{\partial}{\partial x_0} + \lambda_1 \Delta. \tag{29}$$

Уравнение (29) при произвольной функции $F(|u|)$ инвариантно относительно алгебры Галилея $AG(1, n)$ с базисными элементами

$$P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \quad a = \overline{1, n},$$
$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad b = \overline{1, n}, \tag{30}$$
$$G_a = x_0 P_a + \frac{1}{2\lambda_1} x_a R_1,$$

где

$$R_1 = i\left(u\frac{\partial}{\partial u} + u^*\frac{\partial}{\partial u^*}\right).$$

Среди множества нелинейных уравнений (29) только два уравнения имеют более широкую симметрию, чем уравнение (29) [16, 17]:

$$Su + \lambda_2 |u|^r u = 0, \tag{31}$$

$$Su + \lambda_3 |u|^{4/n} u = 0, \tag{32}$$

где λ_2, λ_3, r — произвольные действительные параметры, n — число пространственных переменных в уравнении (29).

Уравнение (31) инвариантно относительно расширений алгебры Галилея $AG_1(1, n) = \langle AG(1, n), D\rangle$ с базисными элементами $AG(1, n)$ (30) и оператора масштабных преобразований

$$D = 2x_0 P_0 + x_a P_a + \frac{2}{r} R_2, \tag{33}$$

где единичный оператор

$$R_2 = u\frac{\partial}{\partial u} + u^*\frac{\partial}{\partial u^*}.$$

Уравнение (32) инвариантно относительно обобщенной алгебры Галилея $AG_2(1, n) = \langle AG_1(1, n), A\rangle$ с базисными элементами (30), (33) и оператора проективных преобразований

$$A = x_0^2 P_0 + x_0 x_a P_a + \frac{x^2}{4\lambda_3} R_1 - \frac{n}{2} x_0 R_2.$$

Теорема 4 [18]. *Уравнение Шредингера* (23) *условно инвариантно относительно оператора*

$$Q_1 = \ln\left(\frac{u}{u^*}\right) R_1 + x_a P_a - cR_2, \quad c = \text{const}, \tag{34}$$

если

$$F(|u|) = \lambda_4 |u|^{-4/r} + \lambda_5 |u|^{4/r},$$

λ_4, λ_5, r — *произвольные параметры, а модуль функции и удовлетворяет уравнению*

$$\lambda_1 \Delta |u| + \lambda_6 |u|^{\frac{r+4}{r}} = 0. \tag{35}$$

Теорема 5 [18]. *Уравнение* (32) *вместе с уравнением* (35) *инвариантно относительно алгебры* $AG_2(1, n)$ *и оператора* Q_1 (34).

Итак, налагая на решения линейного уравнения (29) дополнительные условия (35), мы расширили его симметрию.

5. Условная симметрия нелинейных уравнений теплопроводности. Для описания нелинейных процессов тепломассопереноса широко используются одномерные уравнения вида

$$u_0 + u_{11} = F(u), \tag{36}$$

$$u_0 + uu_{11} = 0, \tag{37}$$

где $F(u)$ — гладкая функция.

Будем искать оператор условной симметрии в виде

$$Q = A(x, u)\,\partial_0 + B(x, u)\,\partial_1 + C(x, u)\,\partial_u, \tag{38}$$

A, B, C — гладкие функции.

Теорема 6 [19]. *Уравнение* (36) *Q-условно инвариантно относительно оператора* (38), *если функции* A, B, C *удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений.*

Случай 1; $A = 1$;

$$\begin{gathered} B_{uu} = 0, \quad C_{uu} = 2(B_{1u} + BB_u), \\ 3B_u F = 2(C_{1u} + B_u C) - (B_0 + B_{11} + 2BB_1), \\ CF_u - (C_u - 2B_1)F = C_0 + C_{11} + 2cb_1. \end{gathered} \tag{39}$$

Здесь и ниже индекс внизу возле функции означает дифференцирование по соответствующему аргументу (x_0, x_1, u).

Случай 2; $A = 0$, $B = 0$;

$$CF_u - C_u F = C_0 + C_{11} + 2CC_{1u} + C^2 C_{uu}, \tag{40}$$

Если построить общие решения нелинейных систем (39), (40), *тогда мы опишем Q-условную симметрию уравнения* (36).

Теорема 7 [19]. *Уравнение* (36) *Q-условно инвариантно относительно оператора* (38) ($A = 1$, $B_u \neq 0$) *тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно уравнению*

$$u_0 + u_{11} = b_3 u^3 + b_1 u + b_0, \quad b_0, b_1, b_3 - \text{const}. \tag{41}$$

Оператор (38) *имеет вид*

$$Q = \partial_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2b_3}\, u\partial_1 + \frac{3}{2}(b_3u^3 + b_1u - b_0)\,\partial_u. \tag{42}$$

Уравнение (41) можно свести к одному из четырех канонических уравнений

$$u_0 + u_{11} = \lambda u\,(u^2 - 1), \tag{43}$$

$$u_0 + u_{11} = \lambda\,(u^3 - 3u + 2), \tag{44}$$

$$u_0 + u_{11} = \lambda u^3, \tag{45}$$

$$u_0 + u_{11} = \lambda u\,(u^2 + 1). \tag{46}$$

Анзацы, построенные с помощью оператора (42) для уравнений (43)—(46), соответственно имеют вид

$$\varphi(\omega) = 2\tan^{-1}u + \sqrt{2\lambda}\, x_1, \tag{47}$$

$$\omega = -\ln(1 - u^{-2}) + 2\lambda x_0;$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{4}{9}\ln\frac{u+2}{u-1} - \frac{2}{3}(u-1)^{-1} - \sqrt{2\lambda}\, x_1, \tag{48}$$

$$\omega = \frac{2}{9}\ln\frac{u+2}{u-1} - \frac{2}{3}(u-1)^{-1} - 3\lambda x_0;$$

$$\varphi(\omega) = 2u^{-1} + \sqrt{2\lambda}\, x_1, \quad \omega = -u^{-2} - 3\lambda x_0; \tag{49}$$

$$\varphi(\omega) = 2\tan^{-1}u - \sqrt{2\lambda}\, x_1, \quad \omega = -\ln(1 + u^{-2}) - 3\lambda x_0. \tag{50}$$

Анзацы (47) — 50) редуцируют уравнения (43) — (46) к ОДУ

$$2\ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - 1)\,\dot{\varphi}, \quad 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 - 3\dot{\varphi} + 2, \tag{51}$$

$$2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3, \quad 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}\,(\dot{\varphi}^2 + 1). \tag{52}$$

Из редуцированных уравнений (51), (52) видно, что анзацы, порожденные оператором условной инвариантности (42), существенно изменили нелинейные правые части. Это позволило построить общие решения (51), (52) в элементарных функциях

$$\varphi(\omega) = -2\tan^{-1}\left(\sqrt{c_1\exp\omega + 1}\right) + c_2, \tag{53}$$

$$\ln\left[c_1 - \frac{3}{2}(\varphi + 2\omega)\right] = \ln c_2 - \frac{3}{2}(\varphi - \omega), \tag{54}$$

$$\varphi(\omega) = 2\sqrt{c_1 - \omega} + c_2, \tag{55}$$

$$\varphi(\omega) = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{c_1\exp\omega - 1}\right) + c_2, \tag{56}$$

где c_1, $c_2 = \mathrm{const}$.

Итак, подставляя (53)—(56) в (47)—(50), получаем семейство точных решений уравнений (43)—(46). Эти решения не могут быть получены с помощью метода Ли.

Теорема 8 [20]. *Уравнение* (37) *Q-условно инвариантно относительно оператора* (38) $A = 1$, *если коэффициентные функции* B, C *удовлетворяют следующей системе уравнений*:

$$uc_{uu} = 2(BB_u + uB_{u1}), \quad B_{uu} = 0, \tag{57}$$

$$B_0 + uB_{11} - CBU^{-1} - 2uC_{u1} + 2BB_1 - 2B_uC = 0, \tag{58}$$

$$c_0 + uc_{11} - c^2u^{-1} + 2B_1c = 0. \tag{59}$$

Решая систему уравнений (57) — (59), находим явный вид оператора (38)

$$Q = b_1Q_1 + b_2Q_2 + b_3D_1 + b_4D_2 + b_5\partial_0 + b_6\partial_1, \tag{60}$$

$$Q_1 = x_1\partial_0 + u\partial_1, \quad Q_2 = x^2, \quad \partial_0 + 2x_1u\partial_1 + 2u^2\partial_u,$$

$$D_1 = 2_0\partial_0 + x_1\partial_1, \quad D_2 = x_1\partial_1 + 2u\partial u, \tag{61}$$

$$b_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Теорема 9 [20]. *Уравнение* (37) *Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = \partial_1 + C(x, u)\,\partial_u, \tag{62}$$

если $c(x, u)$ *удовлетворяет условию*

$$c_0 + u(c_{11} + 2cc_{1u} + c^2c_{uu}) + c_1c + c^2c_u = 0. \tag{63}$$

Построив частные или общие решения уравнения (63), получаем явные выражения для операторов условной симметрии. Некоторые из таких операторов (62) имеют вид

$$Q_3 = \sqrt{x_0}\partial_1 + \sqrt{2u}\partial_u, \tag{64}$$

$$Q_4 = \sqrt{2x_0}\partial_1 + R(u)\,\partial_u, \tag{65}$$

$$Q_5 = \partial_1 + \ln u\partial_u, \tag{66}$$

$$Q_6 = x_0\partial_1 + x_1\partial_u, \tag{67}$$

где $R(u)$ — решения дифференциального уравнения

$$u\ddot{R}(u) + \dot{R}(u) = R^{-1}.$$

Приведем несколько анзацев, которые порождают операторы Q_1, Q_2, Q_3

$$x_0u - \frac{1}{2}x_1^2 = \varphi(u), \tag{68}$$

$$\frac{2ux_0}{x_1} - x_1 = \varphi\left(\frac{u}{x_1}\right), \tag{69}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0)\right)^2. \tag{70}$$

Редуцированные уравнения имеют весьма простой вид:

$$\ddot{\varphi}(u) = 0 \text{ для анзаца (68)},$$

$$\ddot{\varphi}\left(\frac{u}{x_1}\right) = 0 \text{ для анзаца (69)},$$

$$2x_0\dot{\varphi}(x_0) + \varphi = 0 \text{ для анзаца (70)},$$

$$x_0 \neq 0.$$

Итак, анзацы (68)—(70) редуцируют нелинейное уравнение теплопроводности к линейным ОДУ.

6. Уравнение типа Кортевега—де Фриза. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_0 + F(u)\,u_1^k + u_{111} = 0, \tag{71}$$

$u_{111} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, k — произвольный действительный параметр. При $F(u) = u$, $k = 1$ (1) совпадает с классическим уравнением КдФ.

Теорема [23]. *Уравнение Q-условно инвариантно относительно оператора галилеевского типа*

$$Q = x_0^r \partial_1 + H(x, u)\, \partial_u, \tag{72}$$

r — произвольный действительный параметр, если

1)
$$F(u) = \lambda_1 u^{\frac{2-k}{k}} + \lambda_2 u^{\frac{1-k}{2}}, \tag{73}$$
$$H(x, u) = \left(\frac{k\lambda_1}{2}\right)^{-1/k} u^{1/2};$$

2)
$$F(u) = (\lambda_1 \ln u)^{1-k}, \tag{74}$$
$$H(x, u) = (k\lambda_1)^{-1/k} u;$$

3)
$$F(u) = (\lambda_1 \arcsin u + \lambda_2)(1 - u^2)^{\frac{1-k}{2}}, \tag{75}$$
$$H(x_1 u) = (k\lambda_1)^{-1/k} (1 - u^2)^{1/2};$$

4)
$$F(u) = (\lambda_1 \operatorname{Arsh} u + \lambda_2)(1 - u^2)^{\frac{1-k}{2}}, \tag{76}$$
$$H(x, u) = (k\lambda_1)^{-1/k} (1 + u^2)^{1/2};$$

5)
$$F(u) = \lambda_1 u,$$
$$H(x, u) = (k\lambda_1)^{-1/k}; \tag{77}$$

где $r \neq k^{-1}$, $k \neq 0$, λ_1, λ_2 *— произвольные постоянные.*

С помощью операторов условной инвариантности (72) редуцируем (71) к ОДУ и построим следующие точные решения:

$$u = \left\{\frac{x_1}{2}\left(\frac{k\lambda_1 x_0}{2}\right)^{-1/k} + \lambda x_0^{-1/k} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\}^2,$$

когда $F(u)$ имеет вид (73);

$$u = \exp\left\{-\frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} + \lambda x_0^{-1/k} + (k\lambda_1 x_0)^{-1/k} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\},$$

при $k \neq -2$, $F(u)$ имеет вид (74); когда $k = 2$

$$u = \exp\left\{-(2\lambda_1)^{-3/2} x_0^{-1/2} \ln x_0 + \lambda x_0^{-1/2} + (2\lambda_1 x_0)^{-1/2} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\},$$

$$u = \sin\left\{\frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} + \lambda x_0^{-1/k} + (k\lambda_1 x_0)^{-1/k} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\}, \quad k \neq 2,$$

$$u = \sin\left\{(2\lambda_1)^{-3/2} \frac{\ln x_0}{\sqrt{x_0}} + \lambda x_0^{-1/2} + (2\lambda_1 x_0)^{-1/2} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\}, \quad k = 2,$$

когда $F(u)$ имеет вид (75);

$$u = \operatorname{sh}\left\{-\frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2} x_0^{-3/k+1} + \lambda x_0^{-1/k} + (k\lambda_1 x_0)^{-1/k} x_1\right\}, \quad k \neq 2,$$

$$u = \operatorname{sh}\{-(2\lambda_1)^{-3/2} x_0^{-1/2} \ln x_0 + \lambda x_0^{-1/2} + (2\lambda_1 x_0)^{-1/2} x_1\}, \quad k = 2,$$

когда $F(u)$ имеет вид (76). Во всех формулах λ — произвольный параметр.

Итак, изучив условную симметрию уравнения (1), мы построим нетривиальные классы точных решений.

7. Нелинейное волновое уравнение. Уравнение вида

$$u_{00} - (F(u)\, u_1)_1 = 0 \tag{78}$$

широко применяется для описания нелинейных волновых процессов. Групповые свойства (78) методом Ли детально исследованы в [24]. В зависимости от явного вида функции $F(u)$ уравнение (78) обладает широкой условной симметрией.

Теорема [25]. *Уравнение (78) Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = A(x, u)\,\partial_0 + B(x, u)\,\partial_1 + H(x, u)\,\partial_u,$$

если функции $A(x, u)$, $B(x, u)$, $H(x, u)$, $F(u)$ удовлетворяют следующей системе уравнений.

Случай 1; $A = 1$, $D = F - B^2$;

$$(B_u D^{-1})_u = 0,$$

$$F(H_1D^{-1})_1 - (H_0D^{-1})_0 - H^2(H_uD^{-1})_u - H(H_0D^{-1})_u - H(H_uD^{-1})_0 + \\ + D^2\{2F(B_0D_1 - B_1H_0 + H[B_uH_1 - B_1H_u]) - BHH_1F\} = 0,$$

$$D^2H_{uu} + D\{(H\dot{F})_u + 2B(B_uH_u - B_{uu}H) - 2FB_{1u} - \\ - 2BB_{0u}\} - HD_4^2 + 2BB_0D_u + 2BB_1(B\dot{F} - 2B_uF) = 0;$$

$$D\{B_{00} + 2(B_0H)_u - 2(BH_{0u} - B_uH_0) + 2(H_1F)_u - \\ - B_{11}F + B_{uu}H^2 + 2BHH_{uu}\} - D_u\{B_0H + B_uH^2 + 2BHH_u\} + \\ + B\{B_1H\dot{F} + 2B_0^2 + 2B_0B_uH + 4BB_0H_u + 4B_1H_uF - 2B_1^2F\} = 0.$$

Случай 2; $A = 1$, $B = F^{1/2}$;

$$1)\ \dot{B}H + 2BH_u = 0; \quad H_0 + HH_u - BH_1 = 0;$$

$$2)\ \dot{B}H + 2BH_u \neq 0, \quad H_0 + HH_u - BH_1 = 0,$$

$$[\ddot{B}H^2 + 2\dot{B}(BH_1 + HH_u) + 2B(H_{0u} + HH_{uu} + BH_{1u})] = \\ = (H_0 + HH_u - HH_1) - [H_{00} + H^2H_{uu} - B^2H_{11} + 2HH_{0u} - 2\dot{B}HH_1] \times \\ \times (\dot{B}H + 2BH_u) = 0.$$

Случай 3; $A = 0$, $B = 1$;

$$H_{00} - H^3\ddot{F} - (3HH_1 + 2H^2H_u)\dot{F} - (H_{11} + 2HH_{1u})F = 0.$$

Решая эти системы, при конкретных выборах функции $F(u)$ построены явные виды операторов Q. Приведем только некоторые из полученных операторов и анзацев:

$$F(u) = \exp u, \quad \begin{aligned} &Q_1 = x_1\partial_1 + \partial_u, \quad u = \ln x_1 + \varphi(x_0), \\ &Q_2 = \partial_0 + 2\,\mathrm{tg}\,x_0\partial_u, \quad \exp u = \varphi(x_1)\cos^{-2}x_0; \end{aligned}$$

$$F(u) = u^k, \quad \begin{aligned} &Q_1 = \partial_0 + \exp\left(\frac{u}{2}\right)\partial_1 - 4x_0^{-1}\,\partial_u, \\ &Q_2 = (k+1)\,x_1\partial_1 + u\partial_u; \end{aligned}$$

$$x_0\exp\left(\frac{u}{2}\right) + x_1 + \varphi\left(x_0^2\exp\frac{u}{2}\right) = 0;$$

$$u^{k+1} = x_1\varphi^{k+1}(x_0);$$

$$F(u) = u^{-1/2}, \quad \begin{aligned} &Q_1 = \partial_0 + x_1u^{1/2}\,\partial_u, \\ &Q_2 = x_1^2\partial_0 + (4x_0 + a_1x_1^5)\,u^{1/2}\,\partial_u; \end{aligned}$$

$$2u^{1/2} = x_0 x_1 + \varphi(x_1),$$

$$u^{1/2} = x_0^2 x_1^{-2} + \frac{a_1}{2} x_0 x_1^3 + \varphi(x_1),$$

a_1, a_2, a_3 — постоянные.

Наиболее простые решения уравнения (78), построенные с помощью анзацев, имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} \exp u = (x_1^2 + a_1)\cos^{-2} x_0, \\ \exp u = x_1 \exp x_0, \end{array}\right. \quad \text{если } F(u) = \exp u,$$

$$u^{k+1} = x_0^{k+1} x_1, \quad \text{если } F(u) = u^k,$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x_0 x_1 + \dfrac{x_0^4}{12} + a_1, \\ u = W(x_0)\, x_1^2, \end{array}\right. \quad \text{если } F(u) = u:$$

$$u^{1/2} = W(x_1)\, x_0^2, \quad 2u^{1/2} = x_0 x_1 + \frac{x_1^4}{24} + a_1,$$

$$u^{1/2} = x_0^2 x_1^{-2} + 3a_1 x_0 x_1^3 + \frac{a_1^2}{6} x_1^8 + a_2 x_1^{-1} + a_3 x_1^2,$$

$$\text{если } F(u) = u^{-1/2}.$$

Итак, нами проведена классификация и редукция нелинейных волновых уравнений (78), обладающих условной симметрией.

8. Трехмерное нелинейное уравнение акустики. Ограниченные звуковые пучки описывают нелинейным уравнением вида

$$u_{00} - (F(u)\, u_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0. \tag{79}$$

В том случае, когда $F(u) = u$, оно совпадает с уравнением Хохлова — Заболотской

$$u_{01} - (uu_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0. \tag{80}$$

Положим на решение (79) дополнительное условие в виде нелинейного уравнения первого порядка

$$u_0 u_1 - F(u)\, u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 0. \tag{81}$$

Теорема [26]. *Уравнение* (80) *при условии* (81) *инвариантно относительно бесконечномерной алгебры с оператором*

$$X = a_i(u)\, R_i, \quad i = \overline{1,12}, \tag{82}$$

где $a_i(u)$ — *произвольные гладкие функции зависимой переменной* u,

$$R_{\mu+1} = \partial_\mu, \quad \mu = \overline{0,3}, \quad R_5 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3,$$

$$R_6 = x_2\partial_1 + 2x_0\partial_2, \quad R_7 = x_3\partial_1 + 2x_0\partial_3, \quad R_8 = x^\mu\partial_\mu,$$

$$R_9 = 4x_0\partial_0 + 2x_1\partial_1 + 3x_2\partial_2 + 3x_3\partial_3 - 2\frac{F(u)}{F'(u)}\partial_u,$$

$$R_{10} = F'(u)\, x_0\partial_1 - \partial_u,$$

$$R_{11} = x_2\partial_0 + 2(x_1 + F(u)\, x_0)\,\partial_2,$$

$$R_{12} = x_3\partial_0 + 2(x_1 + 2F(u)\, x_0)\,\partial_3.$$

Операторы $\langle R_1, \ldots, R_8\rangle$ являются лиевскими операторами симметрии уравнения (80), $\langle R_9, \ldots, R_{12}\rangle$ операторы условной симметрии уравнения (79). Воспользовавшись операторами условной симметрии уравнения (79)

$\langle R_9, \ldots, R_{12}\rangle$ можно построить широкие классы точных решений. Так, например, оператор $X = \partial_0 + a(u)\,\partial_1$, порождает следующие анзацы:

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_1 = a(u)\,x_0 + x_3, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_3. \tag{83}$$

Анзац (83) редуцирует четырехмерное уравнение (79), (81) к трехмерному

$$\begin{gathered}(a(\varphi) - \varphi)\,\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + \left(\frac{da(\varphi)}{d\varphi} - 1\right)\varphi_1^2 = 0,\\ (a(\varphi) - \varphi)\,\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0, \quad \varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}, \quad i = \overline{1,3}.\end{gathered} \tag{84}$$

Конкретизируя функцию $a(u)$, в некоторых случаях можно построить общее решение (84). Пусть $a(u) = u + 1$, тогда имеем систему

$$\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} = 0, \tag{85}$$

$$\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0. \tag{86}$$

Систему (85) естественно назвать уравнением Бейтмена (1914 г.) — Соболева — Смирнова (1932—1933 гг.), поскольку именно они детально изучали ее. Уравнение (85) имеет общее решение и задается формулой Соболева — Смирнова

$$\varphi = c_1(\varphi)\,\omega_1 + c_2(\varphi)\,\omega_2 + c_3(\varphi)\,\omega_3, \tag{87}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные функции, удовлетворяющие условиям

$$c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 = 0, \quad c_2^2 + c_3^2 \neq 0.$$

Таким образом, формула (87) задает класс точных решений трехмерных нелинейных уравнений (85), (86).

Итак, анзацы (68)—(70) редуцирует нелинейное уравнение теплопроводности (37) к линейным ОДУ.

9. Условная симметрия уравнения Дирака. Рассмотрим нелинейное уравнение Дирака

$$\{\gamma_\mu p^\mu - \lambda(\bar{\Psi}\Psi)\}\,\Psi(x) = 0 \tag{88}$$

и наложим на его решение условие $\bar{\Psi}\Psi = 1$. Тогда (71) становится линейным уравнением с нелинейным дополнительным условием

$$(\gamma_\mu p^\mu - \lambda)\,\Psi = 0, \quad \bar{\Psi}\Psi = 1. \tag{89}$$

Система (72) условно инвариантна относительно операторов [9]

$$Q_1 = p_0 - \lambda\gamma_0, \quad Q_2 = p_3 - \lambda\gamma_3. \tag{90}$$

В рассматриваемом случае уравнение типа (6) имеет вид

$$Q_1\Psi = 0 \text{ и } Q_2\Psi = 0. \tag{91}$$

Оператор Q_1 порождает анзац

$$\Psi(x) = \exp\,(-i\lambda\gamma_0 x_0)\,\varphi(x_1, x_2, x_3), \tag{92}$$

где $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ — четырехкомпонентная вектор-функция, зависящая только от трех переменных.

10. Условная симметрия уравнений Максвелла. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{H}, \quad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}. \tag{93}$$

Можно непосредственно проверить, что система (93) не инвариантна относительно преобразований Лоренца. Однако, если добавить к системе (93) известные дополнительные условия

$$\operatorname{div}\vec{E}=0,\quad \operatorname{div}\vec{H}=0, \tag{94}$$

то система (93), (94) становится лоренц-инвариантной. Приведенная точка зрения на уравнения Максвелла [1—10, 21] указывает на естественность термина «условная симметрия» и физическую важность этой концепции для широкого класса уравнений математической физики [22].

З а к л ю ч е н и е. Исследование условий симметрии ДУЧП только началось. Приведенные результаты говорят о том, что на этом пути следует ожидать качественно нового понимания симметрии уравнения, симметрийной классификации ДУЧП, редукции многомерных нелинейных уравнений к уравнениям с меньшим числом переменных, процесса линеаризации нелинейных уравнений.

Одним из наиболее фундаментальных законов физики, механики, гидромеханики, биофизики является принцип относительности, т. е. равноправие всех инерциальных систем отсчета. На математическом языке этот принцип означает инвариантность уравнения движения либо относительно преобразований Галилея, либо преобразований Лоренца, ДУЧП, не удовлетворяющие этому принципу, обычно не рассматриваются в физических теориях, поскольку они несовместимы с принципом относительности. Такие уравнения не могут быть использованы для математического описания движения реальных физических систем.

Понятие условной инвариантности дает возможность существенно расширить классы уравнений, удовлетворяющих принципу относительности. Уравнения, которые не совместимы, в обычном смысле, с принципом относительности′ могут условно удовлетворять ему. Т. е. существуют нетривиальные условия на решения таких уравнений, выделяющие подмножества решений исходного уравнения, инвариантные либо относительно преобразований Галилея, либо преобразований Лоренца. Описание и детальное изучение классов уравнений, условно инвариантных относительно групп Галилея, Пуанкаре и их подгрупп, представляется автору весьма важной задачей математической физики.

Условная симметрия, например, скалярного уравнения дает возможность строить такие анзацы, которые увеличивают (антиредукция) число зависимых переменных. Она позволяет провести не только редукцию по числу независимых переменных, но при этом увеличить число зависимых переменных. Подчеркнем, что такие анзацы существенно меняют структуру нелинейностей исходного уравнения. И, конечно, они не могут быть построены в рамках классической схемы Ли. Процесс линеаризации, например, нелинейной системы Навье — Стокса в нашем подходе следует рассматривать как замену нелинейного уравнения на линейную систему

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\Delta\vec{u}+\vec{\nabla}p=0,\quad \operatorname{div}\vec{u}=0, \tag{95}$$

при нелинейном дополнительном условии

$$(\vec{u}\vec{\nabla})\,\vec{u}=0,\ \text{или}\ \{(\vec{u}\vec{\nabla})\,\vec{u}\}^2=0. \tag{96}$$

Линейное уравнение Навье — Стокса при нелинейном дополнительном условии обладает нетривиальной условной симметрией. Очевидно, в качестве дополнительного условия к нелинейному уравнению Навье — Стокса можно выбрать и такие уравнения:

$$(\vec{u}\vec{\nabla})\,\vec{u}+\vec{\nabla}p=0.$$

Детальному изучению условной линеаризации нелинейных ДУЧП будут посвящены отдельные публикации.

1. *Фущич В. И.* О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 4—23.
2. *Фущич В. И.* Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 4—16.
3. *Фущич В. И.* О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 1.— С. 116—123.
4. *Fushchich W. I., Tsifra I. M.* On a reduction and solutions of nonlinear wave equation with broken symmetry // J. Phys. A.— 1987.— 20.— P. 45—48.
5. *Fushchich W. I., Nikitin A. G.* Symmetries of Maxwell's Equations.— Dordrecht : D. Reidel Publ., 1987.— 395 p.
6. *Fushchich W., Zhdanov R.* On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations. — Minneapolis, 1988.— (Preprint Inst. for Math. and its Appls., Univ. of Minnesota, N 468).
7. *Фущич В. И., Серов Н. И., Чопик В. И.* Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.—№9.— С. 17— 21.
8. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики // Там же.— № 10.— С. 27—31.
9. *Fushchich W. I. Zhdanov R. Z.* Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations // Phys. Rep.— 1989.— 46, N 2.— P. 325—365.
10. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска // Симметрия и решения уравнений математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 95—102.
11. *Bluman G., Cole J.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech.— 1969.— 18.— P. 1025—1042.
12. *Olver P. Rosenau Ph.* The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A.— 1986.— 114, N 3.— P. 107—112.
13. *Clarkson P., Kruskal M.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys.— 1989.— 30, N 10.— P. 2201—2213.
14. *Levi D., Winternitz P.* Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A.— 1989.— 22.— P. 2915—2924.
15. *Шульга М. В.* Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 36—38.
16. *Фущич В. И., Жданов Р. З., Ревенко И. В.* Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона.— Киев, 1990.— 67 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 90.39).
17. *Fushchich W., Serov N.* On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A.— 1987.— 20.— P. L929—933.
18. *Фущич В. И., Чопик В. И.* Условная инвариантность нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990, № 4.— С. 30—33.
19. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Там же.— № 7.— С. 24—28.
20. *Фущич В. И., Серов Н. И., Амеров Т. К.* Условная инвариантность уравнения теплопроводности // Там же.— № 11.— С. 16—21.
21. *Фущич В. И.* Об одном обобщении метода С. Ли // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1990.— 4—9.
22. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения уравнений математической физики.— Киев: Наук. думка, 1989.— 336 с.
23. *Фущич В. И., Серов Н. И., Амеров Т. К.* Об условной симметрии обобщенного уравнения Кортевега — де Фриза // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1991.— № 12.— С. 28—30.
24. *Ames W. F., Lohner R. I., Adams E.* Group properties of $u_{tt} = (f(u)\, u_x)_x$ // Intern. J. Non-Linear Mech.— 1981.— 16, 5/6.— P. 439—447.
25. *Фущич В. И., Серов Н. И., Репета В. К.* Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1991, № 5.— С. 29—34.
26. *Фущич В. И., Чопик В. И., Миронюк П. П.* Условная инвариантность и точные решения трехмерных нелинейных уравнений акустики // Там же.— 1990.— № 9.— С. 25—28.

Получено 22.08.91