

А. Ф. БАРАННИК, канд. физ.-мат. наук,

Л. Ф. БАРАННИК, д-р физ.-мат. наук,

В. И. ФУЩИЧ, чл.-корр. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Редукция многомерного пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения к двумерным уравнениям

Изучена структура инвариантов расширенной изохронной алгебры Галилея $\bar{AG}(0, n-1)$, являющейся подалгеброй алгебры Пуанкаре $AP(1, n)$. С использованием этих результатов проведена классификация максимальных подалгебр ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $AP(1, n)$. По подалгебрам ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ построены анзацы, редуцирующие уравнение $\Phi(\square u, (\nabla u)^2, u) = 0$ к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных.

Вивчена структура інваріантів розширеної ізохронної алгебри Галілея $\bar{AG}(0, n-1)$, яка є підалгеброю алгебри Пуанкаре $AP(1, n)$. З використанням цих результатів проведена класифікація максимальних підалгебр рангу $n-2$ і $n-1$ алгебри $AP(1, n)$. За підалгебрами рангу $n-1$ алгебри $AP(1, n)$ побудовані анзаці, які редукують рівняння $\Phi(\square u, (\nabla u)^2, u) = 0$ до диференціальних рівнянь від двох інваріантних змінних.

1. Введение. Настоящая статья посвящена редукции нелинейного волнового уравнения

$$\Phi(\square u, (\nabla u)^2, u) = 0 \quad (1)$$

в пространстве Минковского $R_{1,n}$ к двумерным уравнениям. Здесь $u = u(x)$ — скалярная функция от переменной x , $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in R_{1,n}$,

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

$$(\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2.$$

Симметричные свойства уравнения (1) при $n \leq 3$ изучались в [1], а для произвольного n — в [2, 3]. Частным случаем уравнения (1) являются уравнения Клейна — Гордона, Даламбера, Лиувилля, Гамильтона — Якоби, уравнение синус-Гордона и другие. Их изучению посвящены работы [1—8]. Для уравнения (1) важной является проблема редукции. Суть ее состоит в том, что вводятся новые переменные $\omega_1(x), \dots, \omega_h(x)$, $1 \leq k \leq n$, являющиеся функциями от x и обладающие тем свойством, что анзац $u = \varphi(\omega_1, \dots, \omega_h)$ редуцирует уравнение (1) к уравнению от меньшего числа переменных $\omega_1, \dots, \omega_h$. В частном случае, когда $h=1$, указанный анзац редуцирует уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi = \varphi(\omega_1)$. Построение всех анзацев для уравнения (1) является очень трудной задачей. Эту трудность в значительной мере можно преодолеть в случае, когда $\omega_1, \dots, \omega_h$ являются инвариантными переменными.

Уравнение (1) инвариантно относительно группы преобразований Пуанкаре $P(1, n)$ пространства $R_{1,n}$. Функции $\omega_1(x), \dots, \omega_h(x)$ называются инвариантными переменными, если они образуют полную систему инвариантов некоторой подгруппы группы $P(1, n)$. Построение инвариантных переменных тесно связано с задачей классификации связанных подгрупп группы $P(1, n)$, которая сводится к задаче классификации подалгебр соответствующей алгебры Ли $AP(1, n)$. В работе [3] описаны максимальные подалгебры ранга n алгебры $AP(1, n)$ с точностью до $P(1, n)$ -сопряженности. Это позволило выделить семь анзацев, редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В этой же работе построены все анзацы, редуцирующие уравнение (1) к дифференциальным уравнениям от двух и трех инвариантных переменных в пространствах Минковского $R_{1,2}$ и $R_{1,3}$. По редуцированным уравнениям найдены некоторые классы точных

решений уравнений Клейна — Гордона, синус-Гордона и других уравнений.

Настоящая статья является продолжением исследований, выполненных в [7, 8]. В ней полностью изучена структура инвариантов расширенной изохронной алгебры Галилея $\tilde{AG}(0, n-1)$, являющейся подалгеброй алгебры $AP(1, n)$. Показано, что инварианты алгебры $\tilde{AG}(0, n-1)$ получаются из инвариантов ортогональной алгебры $AO(n-1)$, если в последних провести нелинейную замену переменных, явный вид которой определяется структурой инвариантного подпространства для подалгебры алгебры $AO(n-1)$. Результаты, относящиеся к инвариантам алгебры $\tilde{AG}(0, n-1)$, позволили дать классификацию максимальных подалгебр ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $AP(1, n)$. По подалгебрам ранга $n-1$ построены анзацы, редуцирующие уравнение (1) к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2 . Подалгебры ранга $n-2$ алгебры $AP(1, n)$ можно использовать для редукции нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Борна — Инфельда, эйконала в пространстве Минковского $R_{1,n}$.

2. Алгебра инвариантности уравнения (1). Уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $AP(1, n)$, базис которой составляют такие векторные поля:

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{0a} = x_0 \partial_a + x_a \partial_0, \quad J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, \quad (2)$$

$$\mu = 0, 1, \dots, n; \quad a, b = 1, 2, \dots, n.$$

Они связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta} J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\gamma}, \quad (3)$$

$$[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta} P_\gamma - g_{\alpha\gamma} P_\beta, \quad [P_\alpha, P_\beta] = 0,$$

где $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{nn} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, n$. Алгебра $AP(1, n)$ содержит ортогональную алгебру $AO(n) = \langle J_{ab} | a, b = 1, \dots, n \rangle$, псевдоортогональную алгебру $AO(1, n) = \langle J_{\mu\nu} | \mu, \nu = 0, 1, \dots, n \rangle$, коммутативную алгебру $V = \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$. Важной подалгеброй алгебры $AP(1, n)$ является расширенная специальная алгебра Галилея $\tilde{AG}(2, n-1) = \langle M, T, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \oplus (AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle)$, где $M = P_0 + P_n$, $T = \frac{1}{2}(P_0 - P_n)$, $G_a = J_{0a} - J_{an}$, $a = 1, \dots, n-1$, $AO(n-1) = \langle J_{ab} | a, b = 1, \dots, n-1 \rangle$. Ее можно определить как нормализатор изотропного пространства $\langle P_0 + P_n \rangle$ в алгебре $AP(1, n)$. Алгебра $\tilde{AG}(2, n-1)$ содержит расширенную изохронную алгебру

Галилея $\tilde{AG}(0, n-1) = \langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \oplus AO(n-1)$.

Для проведения редукции уравнения (1) по подалгебрам алгебры $AP(1, n)$ следует описать подалгебры алгебры $AP(1, n)$ с точностью до $P(1, n)$ -эквивалентности. Две подалгебры K_1, K_2 алгебры $AP(1, n)$ называются $P(1, n)$ -эквивалентными, если для некоторого $g \in P(1, n)$ алгебры $gK_1 g^{-1}$ и K_2 обладают одними и теми же инвариантами. Две максимальные подалгебры K_1 и K_2 данного ранга r эквивалентны тогда и только тогда, когда K_1 и $K_2 P(1, n)$ -сопряжены. Таким образом, в классе всех подалгебр алгебры $AP(1, n)$, эквивалентных между собой, существует с точностью до $P(1, n)$ -сопряженности только одна максимальная подалгебра. В настоящей статье предложен метод, с помощью которого подалгебры такого рода можно полностью описать.

Пусть K — некоторая подалгебра алгебры $AP(1, n)$. Если $P_0 \in K$, то любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно K , не зависит от x_0 и потому является решением уравнения

$$\Phi(\square u, -(\nabla u)^2, u) = 0 \quad (4)$$

сумма алгебры $\langle G_{m_0+1} + \delta_1 P_{m_0+1}, \dots, G_{m_0+(q_1-1)d_1} + \delta_{(q_1-1)d_1} P_{m_0+(q_1-1)d_1} \rangle$ и алгебры $\langle P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \dots, P_{m_0+q_1 d_1} \rangle$, при этом $\delta_1 = \dots = \delta_{d_1}$, $\delta_{d_1+1} = \dots = \delta_{2d_1}$, ..., $\delta_{(q_1-2)d_1+1} = \dots = \delta_{(q_1-1)d_1}$.

Алгебра $L \cap \mathfrak{M} [m_0 + 1, m_0 + l]$ является прямой суммой алгебр $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{q-1}$, где \mathfrak{M}_j — алгебра, обладающая базисом

$$G_{m_0+(j-1)d_1+1} + \gamma_j P_{m_0+(j-1)d_1+1} + \delta_{11}^j P_{m_0+(q_1-1)d_1+1} + \dots + \delta_{1d_1}^j P_{m_0+q_1 d_1},$$

$$G_{m_0+jd_1} + \gamma_j P_{m_0+jd_1} + \delta_{d_1 1}^j P_{m_0+(q_1-1)d_1+1} + \dots + \delta_{d_1 d_1}^j P_{m_0+q_1 d_1}, \quad j = 1, \dots, q_1 - 1.$$

Связывающая матрица

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} \delta_{11}^j & \dots & \delta_{1d_1}^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{d_1 1}^j & \dots & \delta_{d_1 d_1}^j \end{pmatrix}$$

сплетает представления неприводимой части алгебры F в пространствах $\langle G_{m_0+(j-1)d_1+1}, \dots, G_{m_0+jd_1} \rangle$ и $\langle P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \dots, P_{m_0+q_1 d_1} \rangle$. Поэтому $\Delta_j = \mu_j C_j$, где μ_j — вещественное число, а C_j — ортогональная матрица. $O(n)$ -автоморфизм, соответствующий матрице

$$\begin{pmatrix} E_{d_1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_j & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & E_{d_1} \end{pmatrix},$$

оставляет неизменным F , \mathfrak{M}_i при $i \neq j$ и преобразует пространство \mathfrak{M}_i в пространство, которому соответствует связывающая матрица $\mu_j E_{d_1}$. Предложение доказано.

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$, обладающая ненулевой проекцией $\omega(L)$ на $AO(n-1)$, $P_0, P_0 > P_n \notin L$. Обозначим через A_1, \dots, A_t примарные части $\omega(L)$. Тогда алгебра $L \cap \mathfrak{M}[1, n-1]$ коммутативна и инвариантна относительно $\omega(L)$. Согласно работе [11] она является прямой суммой

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_t \oplus \tilde{W}, \quad (7)$$

подалгебр $W_i, i = 1, \dots, t$, \tilde{W} , удовлетворяющих соотношениям $[W_i, A_i] = [A_i, W] = W_i, [A_j, W_i] = 0$ при $j \neq i, \tilde{W} = \{y \in W \mid [L, y] = 0\}$. Изучим структуру инвариантов алгебр $L_i = W_i \oplus A_i, i = 1, \dots, t$, так как они в значительной мере определяют структуру инвариантов алгебры L . Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением алгебры L_1 . Ее примарная часть совпадает с A_1 и является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO[1, d_1], AO[d_1 + 1, 2d_1], \dots, AO[(q_1 - 1)d_1 + 1, q_1 d_1]$. Инварианты алгебры L_1 будем рассматривать в пространстве функций от переменных $x_0 - x_n, x_1, \dots, x_{q_1 d_1}$. Если $W_1 \neq 0$, то всегда можно предполагать, что $\varphi(L_1) = \langle G_1, \dots, G_{q' d_1} \rangle$, где $1 \leq q' \leq q_1$. В зависимости от значения q' рассмотрим три случая.

а). Случай $q' = q_1$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью до $O(n-1)$ -сопряженности обладает базисом (5) (если положить $m_0 = 0$). Так как ранг алгебры W_1 равен $q_1 d_1$, то она имеет два основных инварианта. В качестве этих инвариантов можно взять функции $x_0 - x_n$ и

$$\sigma = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{q_1} \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \gamma_i} (x_{(i-1)d_1+1}^2 + \dots + x_{id_1}^2) + x_n^2.$$

Так как каждая из них является инвариантом алгебры A_1 , то система функций $x_0 - x_n$, σ образует полную систему инвариантов алгебры L_1 .

в). Случай $q' = q_1 - 1$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью до $O(n-1)$ -сопряженности обладает базисом (6) (если положить $m_0 = 0$). Так как ранг алгебры W_1 равен $(q_1 - 1)d_1$, то ее полная система инвариантов состоит из $d_1 + 2$ функций. Очевидно, инвариантами W_1 являются функции $x_0 - x_n$ и

$$\sigma = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{q_1-1} \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \gamma_i} (x_{(i-1)d_1+1}^2 + \dots + x_{id_1}^2) + x_n^2.$$

Эти инварианты функционально независимы. Найдем остальные d_1 функционально независимых инварианта алгебры W_1 , которые дополняют систему двух инвариантов $x_0 - x_n$ и σ алгебры W_1 до полной системы инвариантов W_1 . Легко убедиться, что инвариантом алгебры W_1 является функция

$$y_1 = \sum_{i=1}^{q_1-1} \frac{\lambda_i x_{(i-1)d_1+1}}{x_0 - x_n + \gamma_i} - x_{(q_1-1)d_1+1}. \quad (8)$$

Поддействовав на нее генератором $J_{1j} + J_{d_1+1, d_1+j} + \dots + J_{(q_1-1)d_1+1, (q_1-1)d_1+j}$, $j = 2, \dots, d_1$, получим такой инвариант алгебры W_1 :

$$y_j = \sum_{i=1}^{q_1-1} \frac{\lambda_i x_{(i-1)d_1+j}}{x_0 - x_n + \gamma_i} - x_{(q_1-1)d_1+j}. \quad (9)$$

Мы нашли d_1 функционально независимых инварианта y_1, \dots, y_{d_1} алгебры W_1 , которые вместе с инвариантами $x_0 - x_n$ и σ образуют полную систему инвариантов алгебры W_1 . Запишем генераторы примарной алгебры B , являющейся подпрямой суммой алгебр $AO[1, d_1]$, $AO[d_1 + 1, 2d_1]$, \dots , $AO[(q_1 - 1)d_1 + 1, q_1 d_1]$ в новых переменных y_1, y_2, \dots, y_{d_1} . Рассмотрим, например, генератор

$$\tilde{J}_{ab} = J_{ab} + J_{d_1+a, d_1+b} + \dots + J_{(q_1-1)d_1+a, (q_1-1)d_1+b}, \quad a < b; \quad 1 \leq a, \quad b \leq d_1.$$

Используя формулы (7) и (8), получаем, что в переменных y_1, y_2, \dots, y_{d_1} генератор \tilde{J}_{ab} принимает вид $\tilde{J}_{ab} = y_a \frac{\partial}{\partial y_b} - y_b \frac{\partial}{\partial y_a}$. Отсюда вытекает, что A_1 можно рассматривать как подалгебру ортогональной алгебры $\tilde{AO}(d_1) = \langle \tilde{J}_{12}, \dots, \tilde{J}_{d_1-1, d_1} \rangle$, действующую в евклидовом пространстве \tilde{E}_{d_1} , состоящем из d_1 -мерных векторов $(y_1, y_2, \dots, y_{d_1})$.

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r . Тогда полная система инвариантов алгебры A_1 в пространстве функций от y_1, y_2, \dots, y_{d_1} состоит из $d_1 - r$ функций. Пусть это будут функции $\theta_1, \dots, \theta_{d_1-r}$. Используя эти функции, легко находим полную систему инвариантов алгебры L_1 . Она состоит из функций $x_0 - x_n$, σ , $\theta_1, \dots, \theta_{d_1-r}$, где вместо y_1, \dots, y_{d_1} подставлены из выражения (7) и (8).

с). Случай $q' < q_1 - 1$. Аналогично случаю в) A_1 можно рассматривать как подалгебру примарной алгебры B , являющейся подпрямой суммой ортогональных алгебр $\tilde{AO}[1, d_1]$, $\tilde{AO}[d_1 + 1, 2d_1]$, \dots , $\tilde{AO}[(q_1 - q')d_1 - d_1 + 1, (q_1 - q')d_1]$. Генераторы этих алгебр записаны в переменных $y_1, \dots, y_{d_1}, \dots, y_{(q_1-q')d_1}$, которые являются инвариантами алгебры W_1 , не зависящими от u .

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r . Тогда полная система инвариантов алгебры A_1 в пространстве функций от переменных y_1, \dots

..., $Y_{(q_1-q')d_1}$, состоит из $(q_1 - q')d_1 - r$ функций $\theta_1, \dots, \theta_{(q_1-q')d_1-r}$. Используя их, получаем, что полная система инвариантов алгебры L состоит из функций $x_0 - x_n, \sigma, \theta_1, \dots, \theta_{(q_1-q')d_1-r}$.

Результаты, изложенные в настоящем пункте, сводят задачу построения инвариантов произвольной подалгебры алгебры $AP(1, n)$ к задаче построения инвариантов неприводимых подалгебр ортогональной алгебры $AO(k)$ для всех $k \leq n$. Известно [12], что неприводимая подалгебра L либо полупроста, либо является полупрямой суммой $L = S \oplus \mathfrak{Z}(L)$ полупростого идеала S и одномерного центра $\mathfrak{Z}(L)$. Задача построения инвариантов полупростой алгебры в общем случае неразрешима в квадратурах. Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем будем предполагать, что если, например, A_1 — примарная часть алгебры $\omega(L)$, то она является подпрямой суммой алгебр $AO[1, d_1], AO[d_1 + 1, 2d_1], \dots, AO[(q_1 - 1)d_1 + 1, q_1d_1]$, т. е. рассматриваются лишь те неприводимые подалгебры алгебры $AO[(i - 1)d_1 + 1, id_1]$, которые совпадают с $AO[(i - 1)d_1 + 1, id_1], i = 1, \dots, q_1$. Этому условию удовлетворяют, очевидно, все разрешимые подалгебры алгебры $AP(1, n)$. Однако класс подалгебр алгебры $AP(1, n)$, который выделяется с помощью данного условия, является более широким, чем класс разрешимых подалгебр.

4. Максимальные подалгебры ранга $n - 2$ и $n - 1$ алгебры $A\tilde{G}(0, n - 1)$. Используя результаты, изложенные в пп. 2 и 3, найдем максимальные подалгебры ранга $n - 2$ и $n - 1$ алгебры $A\tilde{G}(0, n - 1)$. Пусть d_1, \dots, d_t — натуральные числа, удовлетворяющие соотношениям $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_t = m$. Для любых двух натуральных чисел r и $s, r \leq s$, положим

$$\Phi(r, s, \gamma) = \langle G_r + \gamma P_r, \dots, G_s + \gamma P_s \rangle \oplus AO[r, s], \quad \gamma \in R.$$

Теорема 1. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 2$ алгебры $A\tilde{G}(0, n - 1)$ и $P_0, P_0 + P_n \notin L$. Тогда $L \cong AP(1, n)$ -сопряжена с одной из следующих алгебр:

- 1) $B_1 = \Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, m, \gamma_t) \oplus AE[m + 1, n - 2]$;
- 2) $B_2 = L_1 \oplus \Phi(d + 1, d_2, \gamma_2) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, m, \gamma_t) \oplus AE[m + 1, n - 1]$, где $L_1 = W_1 \oplus A_1, W_1$ обладает базисом (6) при $m_0 = 0, l = d, A_1$ — диагональ в $AO[1, d_1] \oplus \dots \oplus AO[(q_1 - 1)d_1 + 1, q_1d_1]$;
- 3) $B_3 = AO[1, d] \oplus \Phi(d + 1, d_2, \gamma_2) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, m, \gamma_t) \oplus AE[m + 1, n - 1]$, $d = 1, \dots, n - 2; m = d + 1, \dots, n - 1; n \geq 4$;
- 4) $B_4 = L_1 \oplus AE[m + 1, n - 1]$, где $L_1 = W_1 \oplus A_1, W_1$ обладает базисом (6) при $m_0 = 0, l = m, A_1$ — диагональ в $AO[1, d_1] \oplus \dots \oplus AO[(q_1 - 1)d_1 + 1, q_1d_1], m = 2, \dots, n - 1; n \geq 4$;
- 5) $B_5 = L_1 \oplus AE[m + 1, n - 1]$, где $L_1 = W_1 \oplus A_1, W_1$ обладает базисом (6) при $m_0 = 0, l = m = 2q_1, A_1 = \langle J + \alpha M \rangle, a J = J_{12} + \dots + J_{t-1, t}, m = 2, \dots, n - 1; n \geq 4$;
- 6) $B_6 = L_1 \oplus \Phi(d + 1, d_2, \gamma_2) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, m, \gamma_t) \oplus AE[m + 1, n - 1]$, где $L_1 = W_1 \oplus \langle J + \alpha M \rangle, W_1$ обладает базисом (6) при $m_0 = 0, l = d = 2q_1, J = J_{12} + \dots + J_{a-1, a}, m = d + 1, \dots, n - 1$;
- 7) $B_7 = AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1], m = 1, \dots, n - 1; n \geq 2$;
- 8) $B_8 = \langle J_{12} + \alpha P_0 \rangle \oplus AE[3, n], \alpha > 0; n \geq 2$;
- 9) $B_9 = \langle J_{12} + M \rangle \oplus AE[3, n - 1], n \geq 3$;
- 10) $B_{10} = \langle J_{12} + \alpha P_3 \rangle \oplus AE[4, n], \alpha > 0; n \geq 3$.

Доказательство. При доказательстве теоремы достаточно ограничиться рассмотрением случая $L \cap V = 0$. Пусть $\omega(L) \neq 0, A_1, \dots, A_t$ — примарные части алгебры $\omega(L)$ и W_1, \dots, W_t — подпространства алгебры $L \cap \mathfrak{M}[1, n - 1]$, определяемые разложением (7). По определению A_1 является подпрямой суммой алгебр $AO[1, d_1], AO[d_1 + 1, 2d_1], \dots, AO[(q_1 - 1)d_1 + 1, q_1d_1]$. В зависимости от структуры пространства W_1 рассмотрим три случая.

а) Случай $\Phi(W_1) = \langle G_1, \dots, G_{q_1d_1} \rangle$. В силу предложения 1 можно считать, что W_1 обладает базисом (5), где $m_0 = 0$. Поэтому полная система инвариантов алгебры W_1 состоит из функций $x_0 - x_n, \sigma, x_{q_1d_1+1}, \dots$

..., x_{n-1} . Следовательно, любой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(x_0 - x_n, \sigma, x_{q_i d_i + 1}, \dots, x_{n-1})$. В силу максимальности \bar{L} отсюда вытекает, что $AO[1, d_1] \subset L$, а значит, $q_1 = 1$. Таким образом, алгебра $W_1 \oplus A_1$ совпадает с алгеброй $\Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1)$ и выделяется прямым слагаемым в алгебре L , т. е. $L = \Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus L'$. Через конечное число шагов $t_1, t_1 \leq t$, выделим в качестве прямых слагаемых все подалгебры $W_i \oplus A_i$ указанного вида, т. е.

$$L = \Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, d_t, \gamma_t) \oplus \bar{L}.$$

Если $\bar{L} = 0$, то, очевидно $d_t = n - 2$ и мы получаем алгебру типа 1 теоремы 1.

Пусть $\omega(\bar{L}) = 0$ и $\bar{L} \neq 0$. Так как $\bar{L} \cap V = 0$, то с точностью до $P(1, n)$ -сопряженности $\varphi(\bar{L}) = \langle G_{m+1}, \dots, G_{n-2} \rangle$, где $m = d_t$. Поэтому алгебра \bar{L} обладает либо базисом $G_{m+1} + \gamma_{m+1} P_{m+1}, \dots, G_{n-2} + \gamma_{n-2} P_{n-2}$, либо базисом $G_{m+1} + \gamma_{m+1} P_{m+1} + \lambda_{m+1} P_{n-1}, \dots, G_{n-2} + \gamma_{n-2} P_{n-2} + \lambda_{n-2} P_{n-1}$, где $\lambda_{m+1}^2 + \dots + \lambda_{n-2}^2 \neq 0$. В первом случае $\bar{L} = \Phi(m+1, m+1, \gamma_{m+1}) \oplus \dots \oplus \Phi(n-2, n-2, \gamma_{n-2})$ и потому алгебра L относится к типу 1 теоремы. Во втором случае алгебра L относится к типу 2 теоремы.

Пусть далее $\omega(\bar{L}) \neq 0$. Тогда примарными частями алгебры \bar{L} являются алгебры A_{t+1}, \dots, A_t . Алгебра A_{t+1} является подпрямой суммой алгебр $AO[m+1, m+d], AO[m+d+1, m+2d], \dots, AO[m+(q-1)d+1, m+qd]$, где $m = d_t$. Допустим, что $W_{t+1} = \dots = W_t = 0$. Если $q > 1$, то инвариантами алгебры A_{t+1} , а значит, и алгебры L являются функции $\varphi_1 = x_{m+1}^2 + \dots + x_{m+d}^2, \varphi_2 = x_{m+d+1}^2 + \dots + x_{m+2d}^2$. Так как инварианты $x_0 - x_n, \varphi_1$ и φ_2 алгебры L функционально независимы, то они образуют полную систему инвариантов алгебры L . Следовательно, любой другой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(x_0 - x_n, \varphi_1, \varphi_2)$ и потому $P_0 + P_n \in L$. Последнее соотношение противоречит предположению относительно алгебры L . Значит, $q = 1$. Аналогично доказываем, что $t_1 + 1 = t$. Следовательно, $L = \Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, d_t, \gamma_t) \oplus AO[m+1, m+d] \oplus \bar{L}'$, где $\omega(\bar{L}') = 0$. Нетрудно убедиться, что $\varphi(\bar{L}') = \langle G_{m+d+1}, \dots, G_{n-1} \rangle$ и потому \bar{L}' обладает базисом $G_{m+d+1} + \gamma_{m+d+1} P_{m+d+1}, \dots, G_{n-1} + \gamma_{n-1} P_{n-1}$. Это означает, что алгебра L относится к типу 3 теоремы.

Допустим, что $W_{t+1} \neq 0$. Тогда $\varphi(W_{t+1}) = \langle G_{m+1}, \dots, G_{m+q'd} \rangle$, где $1 \leq q' \leq q-1$. В силу результатов п. 3 инвариантами алгебры $L_{t+1} = W_{t+1} \oplus A_{t+1}$ являются функции $x_0 - x_n, \theta_1, \dots, \theta_{(q-q')d-r}$ (см. п. 3с). Они функционально независимы и каждая из них является инвариантом алгебры L . Отсюда вытекает, что если $q' < q-1$, то $(q-q') \times d - r \geq 3$ и потому полная система инвариантов алгебры L состоит более чем из трех функций. Это противоречит предположению относительно алгебры L . Таким образом, $q' = q-1$ и потому в силу предположения 1 W_{t+1} обладает базисом (6). Но тогда инвариантами алгебры L_{t+1} , а значит, и алгебры L являются функции $x_0 - x_n, y_{m+1}^2 + \dots + y_{m+d}^2$, где y_{m+1}, \dots, y_{m+d} заданы выражениями (8) и (9). Докажем, что $t_1 + 1 = t$. Действительно, пусть $t_1 + 1 < t$. Примарная алгебра A_{t+2} является подпрямой суммой алгебр $AO[m_1 + 1, m_1 + d_1], AO[m_1 + d_1 + 1, m_1 + 2d_1], \dots, AO[m_1 + (q_1 - 1)d_1 + 1, m_1 + q_1 d_1]$, где $m_1 = (q-1)d$. Если $W_{t+2} = 0$, то инвариантом алгебры A_{t+2} , а значит, и алгебры L является функция $x_{m_1+1}^2 + \dots + x_{m_1+d_1}^2$. Следовательно, полная система инвариантов алгебры L состоит из функций $x_0 - x_n, y_{m+1}^2 + \dots + y_{m+d}^2, x_{m_1+1}^2 + \dots + x_{m_1+d_1}^2$. Но тогда $P_0 + P_n \in L$, что противоречит предположению относительно алгебры L . Полученное противоречие доказывает, что если $t_1 + 1 < t$, то $W_{t+2} \neq 0$. Аналогично, как и выше, доказываем, что $\varphi(W_{t+2}) = \langle G_{m_1+1}, \dots, G_{m_1+(q_1-1)d_1} \rangle$. Но тогда инвариантом алгебры $L_{t+2} = W_{t+2} \oplus A_{t+2}$ является функция $y_{m_1+1}^2 + \dots + y_{m_1+d_1}^2$, где

$y_{m_1+1}, \dots, y_{m_1+d_1}$ заданы выражениями (8) и (9), если положить $x_{(i-1)d_1+1} = x_{m_1+(i-1)d_1+1}$. Таким образом, мы нашли три функционально независимых инварианта $x_0 - x_n, y_{m_1+1}^2 + \dots + y_{m_1+d_1}^2, y_{m_1+1}^2 + \dots + y_{m_1+d_1}^2$ алгебры L . Отсюда следует, что $P_0 + P_n \in L$ и мы снова приходим к противоречию. Следовательно, $t_1 + 1 = t$ и потому алгебра L относится к типу 2 или 6 теоремы.

б) Случай $\varphi(W_1) = \langle G_1, \dots, G_{q'd_1} \rangle, 1 \leq q' < q_1$. Из рассуждений, изложенных выше, вытекает, что $q' = q_1 - 1$ и потому W_1 обладает базисом (6) при $m_0 = 0$. Исключая алгебры, рассмотренные в п. а), доказываем далее, что $t = 1$. Таким образом, алгебра L относится к одному из типов 4, 5 теоремы.

с) Случай $\varphi(W_1) = 0$. Исключая алгебры, рассмотренные в пп. а) и в), получаем $W_2 = \dots = W_t = 0$. Следовательно, $t = 1$ и потому алгебра L относится к типу 7 или 9 теоремы. Теорема доказана.

Опишем далее максимальные подалгебры ранга $n - 2$ алгебры $\tilde{A}\tilde{G}(2, n - 1)$ с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n} \rangle$. Каждая такая подалгебра представляется в виде полупрямой суммы $L \oplus \langle J_{0n} + X \rangle$, где L — максимальная подалгебра ранга $n - 3$ алгебры $\tilde{A}\tilde{G}(0, n - 1)$, а $X \in \tilde{A}\tilde{G}(0, n - 1)$.

Предложение 2. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 3$ алгебры $\tilde{A}\tilde{G}(0, n - 1)$, для которой существует элемент вида $J_{0n} + X, X \in \tilde{A}\tilde{G}(0, n - 1)$, содержащийся в нормализаторе алгебры L . Если $P_0, P_0 + P_n \notin L$, то $LP(1, n)$ -сопряжена с одной из следующих алгебр:

- 1) $AE_1[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 3], m = 1, \dots, n - 3; n \geq 4;$
- 2) $AE_1[1, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2], d = 1, \dots, n - 3; m = d + 2, \dots, n - 2; n \geq 4;$
- 3) $AE_1[1, d_1] \oplus AO[d_1 + 1, d_2] \oplus AO[d_2 + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1], d_1 = 1, \dots, n - 3; d_2 = d_1 + 1, \dots, n - 2; m = d_2 + 1, \dots, n - 1; n \geq 4;$
- 4) $AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2], m = 1, \dots, n - 2; n \geq 3;$
- 5) $AO[1, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1], d = 1, \dots, n - 2; m = d + 1, \dots, n - 1; n \geq 3.$

Доказательство. Пусть $\omega(L) \neq 0, A_1, \dots, A_t$ — примарные части $\omega(L)$ и A_1 является подпрямой суммой алгебр $AO[1, d_1], AO[d_1 + 1, 2d_1], \dots, AO[(q_1 - 1)d_1 + q_1d_1]$. Допустим, что $W_1 \neq 0$. Тогда из условия $[J_{0n} + X, L] \subset L$ вытекает $W_1 = \langle G_1, \dots, G_{q'd_1} \rangle$, где $q' \geq 1$. В силу максималности L имеем $AO[1, d_1] \subset L$ и потому $q_1 = 1$. Таким образом, алгебра $W_1 \oplus A_1$ совпадает с $AE_1[1, d_1]$ и выделяется прямым слагаемым в алгебре L , т. е. $L = AE_1[1, d_1] \oplus L'$. Если $L' = 0$, то $d_1 = n - 3$ и алгебра L относится к типу 1 предложения 2. Пусть далее $L' \neq 0$. При этом условии $\omega(L') \neq 0$ и алгебры A_2, \dots, A_t являются примарными частями алгебры $\omega(L')$. Из условия $[J_{0n} + X, L] \subset L$ и максималности L вытекает $W_2 = \dots = W_t = 0$. Так как ранг алгебры L равен $n - 3$, то $t \leq 3$. Рассмотрим случай $t = 2$. Нетрудно убедиться, что A_2 — ортогональная алгебра, совпадающая с $AO[d_1 + 1, n - 1]$. Если $d_1 + 1 = n - 2$, то $AO[d_1 + 1, n - 1] = \langle J_{n-2, n-1} \rangle$ и потому $L = AE_1[1, d_1] \oplus \langle J_{n-2, n-1} + \alpha M \rangle$. Используя соотношение $[J_{0n} + X, L] \subset L$, получаем $\alpha = 0$. Таким образом, алгебра L относится к типу 2 предложения 2. Если $d_1 + 1 < n - 2$, то $AO[d_1 + 1, n - 1] \subset L$ и потому $L = AE_1[1, d_1] \oplus AO[d_1 + 1, n - 1]$. Если $t = 3$, то аналогичными рассуждениями доказываем, что L относится к типу 3 предложения.

Допустим далее, что $W_1 = \dots = W_t = 0$. Если $t = 1$, то, очевидно, $L = AO[1, n - 2]$. Если $t = 2$, то $L = AO[1, m] \oplus AO[m + 1, n - 1]$.

Пусть $\omega(L) = 0$. В этом случае $L = \langle G_1 \rangle$ и, значит, $n = 3$, т. е. получаем алгебру типа 1 предложения 2. Предложение доказано.

Теорема 2. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 2$ алгебры $\widetilde{AG}(2, n - 1)$, $\pi_0(L) = \langle J_{0n} \rangle$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тогда $L P(1, n)$ -сопряжена с одной из следующих алгебр:

- 1) $L_1 = (AE_1[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 3]) \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $m = 1, \dots, n - 3$; $n \geq 4$;
- 2) $L_2 = (AE_1[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 3]) \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$, $m = 1, \dots, n - 3$; $n \geq 4$; $\alpha > 0$;
- 3) $L_3 = (AE_1[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 3]) \oplus \langle J_{n-2, n-1} + cJ_{0n} \rangle$, $m = 1, \dots, n - 3$; $n \geq 4$; $c > 0$;
- 4) $L_4 = (AE_1[1, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]) \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $d = 1, \dots, n - 3$; $m = d + 1, \dots, n - 2$; $n \geq 4$;
- 5) $L_5 = (AE_1[1, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]) \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$, $d = 1, \dots, n - 3$; $m = d + 1, \dots, n - 2$; $n \geq 4$; $\alpha > 0$;
- 6) $L_6 = (AE_1[1, d_1] \oplus AO[d_1 + 1, d_2] \oplus AO[d_2 + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]) \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $d_1 = 1, \dots, n - 3$; $d_2 = d_1 + 1, \dots, n - 2$; $m = d_2 + 1, \dots, n - 1$; $n \geq 5$;
- 7) $L_7 = (AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]) \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $m = 1, \dots, n - 2$; $n \geq 3$;
- 8) $L_8 = (AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]) \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$, $m = 1, \dots, n - 2$; $n \geq 4$; $\alpha > 0$;
- 9) $L_9 = (AO[1, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]) \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $d = 1, \dots, n - 2$; $m = d + 1, \dots, n - 1$; $n \geq 3$.

Доказательство. Классификация всех максимальных подалгебр ранга $n - 2$ алгебры $\widetilde{AG}(2, n - 1)$, удовлетворяющих условию теоремы 2, сводится к нахождению всех неэквивалентных расширений максимальных подалгебр F ранга $n - 3$ с помощью одномерных подалгебр вида $\langle J_{0n} + X \rangle$, $X \in \widetilde{AG}(0, n - 1)$.

1°. Алгебра $F_1 = AE_1[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 3]$. Нормализатор $\text{Nor}_{AP(1, n)} F_1$ алгебры F_1 в $AP(1, n)$ совпадает с алгеброй $F_1 \oplus K$, где $K = \langle P_0 + P_n, P_{n-2}, P_{n-1}, J_{n-2, n-1}, J_{0n} \rangle$. Поэтому задача свелась к нахождению всех одномерных подалгебр алгебры K с точностью до сопряженности относительно группы внутренних автоморфизмов. Алгебра K содержит только такие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n} \rangle$: $\langle J_{0n} \rangle$, $\langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{n-2, n-1} + cJ_{0n} \rangle$, $c > 0$. Таким образом, получаем следующие расширения ранга $n - 2$ алгебры F_1 : $F_1 \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $F_1 \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$, $\alpha > 0$, $F_1 \oplus \langle J_{n-2, n-1} + cJ_{0n} \rangle$, $c > 0$.

2°. Алгебра $F_2 = AE_1[1, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]$. Нормализатор $\text{Nor}_{AP(1, n)} F_2$ алгебры F_2 в $AP(1, n)$ совпадает с алгеброй $F_2 \oplus K$, где $K = \langle P_0 + P_n, P_{n-1}, J_{0n} \rangle$. Алгебра K содержит следующие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n} \rangle$: $\langle J_{0n} \rangle$, $\langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$, $\alpha > 0$. В результате получаем такие максимальные подалгебры ранга $n > 2$, содержащие F_2 : $F_2 \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $F_2 \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$, $\alpha > 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 1$ алгебры $\widetilde{AG}(2, n - 1)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тогда $L P(1, n)$ -сопряжена с одной из следующих алгебр:

- 1) $AE[1, n - 1]$;
- 2) $AE_1[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]$, $m = 1, \dots, n - 1$; $n \geq 2$;
- 3) $AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1] \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $m = 2, \dots, n - 1$; $n \geq 3$;
- 4) $\langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE[2, n - 1]$, $n \geq 2$;
- 5) $(AE_1[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]) \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $m = 1, \dots, n - 2$; $n \geq 3$;
- 6) $\Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, m, \gamma_t) \oplus AE[m + 1, n - 1]$, $m = 1, \dots, n - 1$; $n \geq 2$;
- 7) $\langle J_{0n} + \alpha P_1 \rangle \oplus AE[2, n - 1]$, $n \geq 2$; $\alpha > 0$;
- 8) $(AE_1[1, m] \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{m+1} \rangle) \oplus AE[m + 2, n - 1]$, $m = 1, \dots, n - 2$; $\alpha > 0$; $n \geq 3$.

Доказательство. При доказательстве теоремы достаточно ограничиться рассмотрением случая $L \cap V = 0$. Если $\pi_0(L) = \langle J_{0n} \rangle$, то

L является полупрямой суммой $K \oplus \langle J_{0n} + X \rangle$ максимальной подалгебры K ранга $n - 2$ алгебры $A\tilde{G}(0, n - 1)$ и одномерной подалгебры $\langle J_{0n} + X \rangle \subset A\tilde{G}(2, n - 1)$. Используя описание максимальных подалгебр ранга $n - 2$ алгебры $A\tilde{G}(0, n - 1)$, изложенное в теореме 1, и доказательство теоремы 2, легко проводим классификацию подалгебр, удовлетворяющих указанным требованиям.

Если $\pi_0(L) = 0$, то доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1. Теорема доказана.

5. Максимальные подалгебры ранга $n - 2$ и $n - 1$ алгебры $AP(1, n)$. Подалгебра $L \subset AP(1, n)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L .

Теорема 4. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 2$ алгебры $AP(1, n)$, относящаяся к классу 0, и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тогда $LP(1, n)$ -сопряжена с одной из следующих алгебр:

- 1) $F_1 = AO[0, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]$, $m = 2, \dots, n - 2$; $n \geq 4$;
- 2) $F_2 = AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]$, $m = 1, \dots, n - 1$; $n \geq 3$;
- 3) $F_3 = \langle J_{12} + \alpha P_0, J_{34} + \beta P_0 \rangle \oplus AE[5, n]$, $n \geq 4$;
- 4) $F_4 = \langle J_{12} + \alpha P_0 \rangle \oplus AO[3, m] \oplus AE[m + 1, n]$, $m = 3, \dots, n$; $n \geq 3$;
- 5) $F_5 = AO[0, m] \oplus AE[m + 1, n - 3] \oplus \langle J_{n-2, n-1} + \alpha P_n \rangle$, $m = 2, \dots, n - 3$; $\alpha > 0$; $n \geq 5$;
- 6) $F_6 = AO[0, d_1] \oplus AO[d_1 + 1, d_2] \oplus AO[d_2 + 1, m] \oplus AE[m + 1, n]$, $d_1 = 2, \dots, n - 2$; $d_2 = d_1 + 1, \dots, n - 1$; $m = d_2 + 1, \dots, n$; $n \geq 4$;
- 7) $F_7 = AO[0, d] \oplus AO[d + 1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]$, $d = 2, \dots, n - 2$; $m = d + 1, \dots, n - 1$; $n \geq 4$;
- 8) $F_8 = AO[1, m] \oplus AO[m + 1, d] \oplus AE[d + 1, n]$, $m = 1, \dots, n - 1$; $d = m + 1, \dots, n$; $n \geq 2$.

Доказательство. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 2$ алгебры $AP(1, n)$, $L \cap V = 0$ и подалгебра $\omega_0(L)$ относится к классу 0. Тогда пространство V является прямой ортогональной суммой неприводимых L -подпространств V_0, V_1, \dots, V_s , каждое из которых невырождено. По теореме Витта можно предполагать, что $V_0 = \langle P_0, P_1, \dots, P_{k_0} \rangle$, $V_1 = \langle P_{k_0}, \dots, P_{k_0+k_1} \rangle, \dots, V_s = \langle P_{\sigma+1}, \dots, P_{\sigma+k_s} \rangle$, где $\sigma = k_0 + k_1 + \dots + k_{s-1}$, $\sigma + k_s = n$, $k_0 \geq 0$, $k_i \geq 1$, $i = 1, \dots, s$. Здесь V_0 — псевдоевклидово пространство типа $(1, k_0)$, если $k_0 \neq 0$, V_i — евклидово пространство размерности k_i , $i = 1, \dots, s$. Если $k_0 = 0$, то $V_0 = \langle P_0 \rangle$. Отсюда вытекает, что алгебра $\omega_0(L)$ является подпрямой суммой подалгебр $A_1 = AO[1, k_1], \dots, A_s = AO[\sigma + 1, \sigma + k_s]$. Пусть $A_1 \neq 0$, а $A_2 = \dots = A_s = 0$. Тогда $k_1 = n - 1$ и потому L относится к типу 2 или 4 теоремы 4. Пусть $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, а $A_3 = \dots = A_s = 0$. Нетрудно убедиться, что алгебра L относится к одному из типов 3, 8 теоремы 4. Если $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$, то вследствие максимальной L имеем $P_0 \in L$, что противоречит предположению.

Пусть далее $k_0 \neq 0$. Тогда $k_0 \geq 2$ и алгебра $\omega_0(L)$ является подпрямой суммой алгебр $A_0 = AO[0, k_0]$, $A_1 = AO[k_0 + 1, k_0 + k_1], \dots, A_s = AO[\sigma + 1, \sigma + k_s]$. Если $A_1 = \dots = A_s = 0$, то, очевидно, $k_0 = n - 2$ и L относится к типу 1 теоремы 4. Пусть $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0, \dots, A_s = 0$. Если допустить, что $k_1 > 3$, то $L = AO[0, k_0] \oplus AO[k_0 + 1, n - 1]$. Если $k_1 = 2$, то $1 + k_0 = n - 2$, т. е. $k_0 = n - 3$. Следовательно, получаем такие алгебры: $AO[0, k_0] \oplus AO[k_0 + 1, n - 1]$, $AO[0, n - 3] \oplus \langle J_{n-2, n-1} + \alpha P_n \rangle$, $\alpha > 0$.

Пусть $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 = \dots = A_s = 0$. Тогда $k_0 + k_1 + k_2 = n$ и алгебра L относится к типу 6 теоремы. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 2$ алгебры $AP(1, n)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тогда $LP(1, n)$ -сопряжена с одной из следующих алгебр:

- 1) $B_1 - B_{10}$ теоремы 1;
- 2) $F_1 - F_8$ теоремы 4;
- 3) $L_2, L_3, L_5, L_7 - L_9$ теоремы 2.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что каждая из подалгебр F_i теоремы 4, $i = 1, \dots, 7$, максимальна в алгебре $AP(1, n)$. Исследуем на максимальность алгебры, представленные в теореме 2. Если алгебра L теоремы 2 не является максимальной в алгебре $AP(1, n)$, то она содержится в некоторой максимальной подалгебре L' ранга $n - 2$, относящейся к классу 0. Так, для алгебры L_1 соответствующей максимальной подалгеброй L является алгебра $\langle J_{01}, \dots, J_{0m}, J_{1n}, \dots, J_{mn}, J_{0n} \rangle \oplus AE[m + 1, n - 3]$, которая сопряжена с алгеброй $AO[0, m + 1] \oplus AE[m + 2, n - 2]$. Аналогично исследуются алгебры L_4, L_6 . Все остальные алгебры теоремы 2, отличные от L_1, L_4 и L_6 , максимальны в алгебре $AP(1, n)$. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 1$ алгебры $AP(1, n)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тогда L $AP(1, n)$ -сопряжена с одной из следующих алгебр:

- 1) $L_1 = AE[1, n - 1]$;
- 2) $L_2 = AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n]$, $m = 1, \dots, n$; $n \geq 2$;
- 3) $L_3 = AE_1[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]$, $m = 1, \dots, n - 1$; $n \geq 2$;
- 4) $L_4 = AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 1] \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $m = 1, \dots, n - 1$; $n \geq 3$;
- 5) $L_5 = AO[0, m] \oplus AE[m + 1, n - 1]$, $m = 2, \dots, n - 1$; $n \geq 3$;
- 6) $L_6 = AO[0, m] \oplus AO[m + 1, q] \oplus AE[q + 1, n]$, $m = 2, \dots, n - 1$; $q = m + 1, \dots, n$; $n \geq 3$;
- 7) $L_7 = \langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE[2, n - 1]$, $n \geq 2$;
- 8) $L_8 = \Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{t-1} + 1, m, \gamma_t) \oplus AE[m + 1, n - 1]$, $m = 1, \dots, n - 1$; $n \geq 3$;
- 9) $L_9 = \langle J_{0n} + \alpha P_1 \rangle \oplus AE[2, n - 1]$, $n \geq 2$; $\alpha > 0$;
- 10) $L_{10} = \langle AE_1[1, m] \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{m+1} \rangle \rangle \oplus AE[m + 2, n - 1]$, $m = 1, \dots, n - 2$; $\alpha > 0$; $n \geq 3$;
- 11) $L_{11} = \langle J_{13} + \alpha P_0 \rangle \oplus AE[3, n]$, $n \geq 2$; $\alpha > 0$.

Теорема 6 доказывается аналогично доказательству теорем 4 и 5.

6. Редукция по подалгебрам алгебры $AP(1, n)$. В настоящем пункте проводим редукцию уравнения (1) к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных ω_1, ω_2 . Для проведения указанной редукции используем максимальные подалгебры L ранга $n - 1$ алгебры $AP(1, n)$, удовлетворяющие условию $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Отдельно рассмотрим случай, когда $L \cap V$ изотропно или $L \cap V = \langle P_0 \rangle$.

Пусть L — некоторая подалгебра алгебры $AP(1, n)$. Если $P_0 \in L$ или $P_0 + P_n \in L$, то, как показано в п. 2, любое решение уравнения (1), инвариантное относительно L , является решением уравнения (4) в евклидовом пространстве E_n . Таким образом, случаи $P_0, P_0 + P_n \in L$ свелись к задаче классификации подалгебр Евклида $AE(n)$ и $AE(n - 1)$.

Предложение 3. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 3$ алгебры Евклида $AE[1, n - 1]$. Тогда L $AE[1, n - 1]$ -сопряжена с одной из следующих алгебр:

- 1) $F_1 = AO[1, m] \oplus AE[m + 1, n - 2]$, $m = 1, 2, \dots, n - 2$; $n \geq 4$;
- 2) $F_2 = AO[1, m] \oplus AO[m + 1, d] \oplus AE[d + 1, n - 1]$, $m = 1, 2, \dots, n - 2$; $d = m + 1, \dots, n - 1$; $n \geq 4$;
- 3) $F_3 = \langle J_{12} + \alpha P_3 \rangle \oplus AE[4, n - 1]$, $\alpha > 0$; $n \geq 4$.

Предложение 3 доказывается аналогично доказательству теоремы 4. Подалгебрам $F_1 - F_3$ предложения 3 соответствуют такие анзацы:

$$F_1: u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_2 = x_{n-1};$$

$$F_2: u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_2 = (x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2);$$

$$F_3: u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_2 = \alpha \arctg \frac{x_2}{x_1} + x_3.$$

Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ редуцирует уравнение (4) к дифференциальному уравнению от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2 :

$$F_1 : \Phi \left(-\varphi_{11} - \frac{m-1}{\omega_1} \varphi_1 - \varphi_{22}, -\varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi \right) = 0;$$

$$F_2 : \Phi \left(-\varphi_{11} - \frac{m-1}{\omega_1} \varphi_1 - \varphi_{22} - \frac{d-m-1}{\omega_2} \varphi_2, -\varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi \right) = 0; \quad (10)$$

$$F_3 : \Phi \left(-\varphi_{11} - \frac{1}{\omega_1} \varphi_1 - \alpha^2 \varphi_{22} + \frac{\alpha}{\omega_2} \varphi_2, -\varphi_1^2 - (\alpha^2 + 1) \varphi_2^2, \varphi \right) = 0.$$

Используя далее подалгебры ранга $n-2$ алгебры $AE(n)$, изложенные в предложении 3 (если вместо $n-1$ положить n), редуцируем уравнение (4) к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2 . Все эти редуцированные уравнения имеют вид (10).

Проведем редукцию уравнения (1) по подалгебрам L_i , представленными в теореме 6. Этим подалгебрам соответствуют следующие анзацы:

$$L_1 : u = \varphi(\omega_1, \omega_2); \quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = x_n;$$

$$L_2 : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$L_3 : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = x_0 - x_n, \quad \omega_2 = (x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_m^2 - x_n^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$L_4 : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_2 = (x_0^2 - x_n^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$L_5 : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_m^2 - x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_2 = x_{m+1};$$

$$L_6 : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_m^2 - x_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_2 = (x_{m+1}^2 + \dots + x_q^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$L_7 : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_0 - x_n)^2 - 4x_1,$$

$$\omega_2 = (x_0 - x_n)^3 - 6x_1(x_0 - x_n) + 6(x_0 + x_n);$$

$$L_8 : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_2 = x_0 - x_n,$$

$$\omega_1 = x_0^2 - \sum_{i=1}^t \frac{(d_i - d_{i-1})(x_0 - x_n)}{x_0 - x_n + \gamma_i} (x_{d_{i-1}+1}^2 + \dots + x_{d_i}^2) + x_n^2;$$

$$L_9 : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_0^2 - x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_2 = \alpha \ln(x_0 + x_n) - x_1;$$

$$L_{10} : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_m^2 - x_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_2 = \alpha \ln(x_0 - x_n) + x_{m+1};$$

$$L_{11} : u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_2 = x_0 + \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}.$$

Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ редуцирует уравнение (1) к уравнению от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2 :

$$L_1 : \Phi(\varphi_{11} - \varphi_{22}, \varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi) = 0;$$

$$L_2 : \Phi \left(\varphi_{11} - \varphi_{22} + \frac{1-m}{\omega_2} \varphi_2, \varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi \right) = 0;$$

$$L_3 : \Phi \left(2\varphi_{11} + \frac{2\omega_1}{\omega_2} \varphi_{12} + \varphi_{22} + \frac{m+1}{\omega_2} \varphi_2, 2\varphi_1^2 + \frac{2\omega_1}{\omega_2} \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2, \varphi \right) = 0;$$

$$L_4 : \Phi \left(-\varphi_{11} + \varphi_{22} + \frac{1-m}{\omega_1} \varphi_1 + \frac{1}{\omega_2} \varphi_2, -\varphi_1^2 + \varphi_2^2, \varphi \right) = 0;$$

$$L_5 : \Phi \left(\varphi_{11} - \varphi_{22} + \frac{m+1}{\omega_1} \varphi_1, \varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi \right) = 0;$$

$$L_6 : \Phi \left(\varphi_{11} - \varphi_{22} + \frac{m+1}{\omega_1} \varphi_1 + \frac{m+1-q}{\omega_2} \varphi_2, \varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi \right) = 0;$$

$$L_7 : \Phi \left(-\varphi_{11} + 4\omega_1 \varphi_{22}, -\varphi_1^2 + 4\omega_1 \varphi_2^2, \varphi \right) = 0;$$

$$L_8 : \Phi \left(\varphi_{11} + \frac{2\omega_2}{\omega_1} \varphi_{12} + \frac{1}{\omega_1} \left[1 + \sum_{i=1}^t \frac{(d_i - d_{i-1}) \omega_2}{\omega_2 + \gamma_i} \right] \varphi_1, \right. \\ \left. \varphi_1^2 + \frac{2\omega_2}{\omega_1} \varphi_1 \varphi_2, \varphi \right) = 0;$$

$$L_9 : \Phi \left(\varphi_{11} + \frac{2\alpha}{\omega_1} \varphi_{12} - \varphi_{22} + \frac{1}{\omega_1} \varphi_1, \varphi_1^2 + \frac{2\alpha}{\omega_1} \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_2^2, \varphi \right) = 0;$$

$$L_{10} : \Phi \left(\varphi_{11} + \frac{2\alpha}{\omega_1} \varphi_{12} - \varphi_{22} + \frac{m+1}{\omega_1} \varphi_1, \varphi_1^2 + \frac{2\alpha}{\omega_1} \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_2^2, \varphi \right) = 0;$$

$$L_{11} : \Phi \left(-\varphi_{11} + \frac{\omega_1^2 - 1}{\omega_1^2} \varphi_{22} - \frac{1}{\omega_1} \varphi_1, -\varphi_1^2 + \frac{\omega_1^2 - 1}{\omega_1^2} \varphi_2^2, \varphi \right) = 0.$$

1. Фуциц В. И., Штелень В. М., Серов Н. И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев: Наук. думка, 1989.— 336 с.
2. Фуциц В. И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 1.— С. 116—123.
3. Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically equations // J. Math. Phys.— 1984.— 25, N 4.— P. 791—806.
4. Fushchich W. I., Serov N. J. The symmetry and some exact solution of the nonlinear multidimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A: Math. Gen.— 1983.— 16.— P. 3645—3656.
5. Фуциц В. И., Баранник А. Ф. О точных решениях нелинейного уравнения д'Аламбера в пространстве Минковского $R_{1,n}$ // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 6.— С. 31—34.
6. Баранник Л. Ф. Симметричная редукция и точные решения уравнения Лиувилля // Там же.— 1988.— № 12.— С. 3—5.
7. Фуциц В. И., Баранник А. Ф. Максимальные подалгебры ранга $n - 1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 11.— С. 1552—1559.
8. Фуциц В. И., Баранник А. Ф. Максимальные подалгебры ранга $n - 1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II // Там же.— № 12.— С. 1693—1700.
9. Фуциц В. И., Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф. Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида // Там же.— 1986.— 38, № 1.— С. 67—72.
10. Barannik L. F., Fushchich W. I. On continuous subgroups of the generalised Schrodinger group // J. Math. Phys.— 1989.— 30, N 1.— P. 31—40.
11. Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф. Подалгебры обобщенной алгебры Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 39—43.
12. Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли.— М.: Мир, 1981.— 336 с.

Получено 24.04.91