УДК 517.5

А. С. РОМАНЮК, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q

Получены порядковые оценки наилучших приближений полиномами, построенными по гиперболическим крестам на классах периодических функций многих переменных $B^r_{p,\theta}$. Найден порядок поперечника по Колмогорову на этих классах в пространстве L_q при $1 < p \leqslant q \leqslant 2$.

Одержані порядкові оцінки найкращих наближень поліномами, побудованими по гіперболічних хрестах на класах періодичних функцій багатьох змінних $B^r_{p,\theta}$. Знайдено порядок поперечника за Колмогоровим на цих класах в просторі L_q при $1 < p \leqslant q \leqslant 2$.

1. В настоящей работе изучаются трехпараметрические классы периодических функций многих переменных $B^r_{p,\theta}$ (см. [1] и имеющуюся в ней библиографию), именуемые классами Бесова, которые при $\theta = \infty$ совпадают с классами Никольского H^r_p [2, с. 32], а при $1 \leqslant \theta < \infty$ и соответствующих значениях p тесно связаны с классами W^r_p [2, с. 31], о чем более конкретно будет сказано ниже. Здесь уместно указать на одно обстоятельство, которое, по мнению автора, представляет интерес в изучении вопросов приближения классов $B^r_{p,\theta}$. Известно [2], что в отличие от одномерного случая на многомерных классах H^r_p и W^r_p обнаружилось различие в оценках приближений гиперболическими суммами Фурье, оценках поперечников и других аппроксимативных характеристиках. Поэтому представляет интерес проследить это различие с помощью рассмотрения более тонких классов $B^r_{p,\theta}$. Другими словами, варьируя параметр θ в пределах $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, т. е. сужая класс функций либо расширяя его, можно получить оценки, которые найдены при приближении классов W^r_p и H^r_p, а также промежуточные, которые в шкалах этих классов получить не удается.

2. Определения и вспомогательные утверждения. Пусть R^m — евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_my_m$. $L_p(\pi_m)$ — пространство периодических функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$, определенных на кубе $\pi_m = \prod_{j=1}^{m} [-\pi; \pi]$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \Big((2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)|, \quad p = \infty.$$

Пусть e_m — множество индексов $\{1, \dots, m\}$, а e — произвольное его подмножество. Если задан вектор $r = (r_1, \dots, r_m)$ с неотрицательными компонентами, то r^e обозначает вектор с компонентами

$$r_j^e=\begin{cases} r_j, & j\in e;\\ 0, & j\overline{\in} e.\end{cases}$$

Таким образом, пустому подмножеству $\varnothing$ соответствует нуль-вектор. Далее, для функции $f(x)$, заданной на π_m, определим разность первого порядка по j-й переменной с шагом h

$$\Delta_{h,j}=f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+h,x_{j+1},\ldots,x_m)-f(x)$$

и l-го порядка $\Delta_{h,j}^l=\overbrace{\Delta_{h,j}\ldots\Delta_{h,j}}^{l}f(x)$ в точке x_j с шагом h. Если $k=(k_1,\ldots,k_m)$, $k_j\in N$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h=(h_1,\ldots,h_m)$ определяется равенством

$$\Delta_h^kf(x)=\Delta_{h_1,1}^{k_1},\ldots,\Delta_{h_m,m}^{k_m}f(x).$$

Класс $B_{p,\theta}^r$, где r — заданный неотрицательный вектор, а $\theta\in[1,\infty)$, определяется как совокупность функций $f\in L_p(\pi_m)$, для которых при некотором $k>r$ конечна норма

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r}=\sum_{e\subset e_m}\left\{\int_{\pi_e}\|\Delta_{h^e}^{k^e}f(x)\|_p^\theta\prod_{j\in e}\frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}}\right\}^{\frac{1}{\theta}}+\|f\|_p,$$

где $\pi_e=\prod_{j\in e}[-\pi;\pi]$.

Соответственно класс $B_{p,\infty}^r\equiv H_p^r$ определяется требованием конечности нормы

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r}=\|f\|_\infty+\sum_{e\subset e_m}\sup_{h>0}\|\dot{\Delta}_{h^e}^{k^e}f\|_p\prod_{j\in e}h_j^{-r_j}.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $p\in(1,\infty)$ и тогда $\|f\|_{B_{p,\theta}^r}$ будем записывать в другом виде.

Пусть $s=(s_1,\ldots,s_m)$, $s_j\in N$. Положим $\rho(s)=\{k:k=(k_1,\ldots,k_m),\ 2^{s_j-1}\leqslant|k_j|<2^{s_j}\}$, $\delta_s(f,x)=\sum_{k\in\rho(s)}c_ke^{i(k,x)}$, где $c_k=(2\pi)^{-m}\int_{\pi_m}f(t)e^{-i(k,t)}dt$ — коэффициенты Фурье.

Функции $\mu(N)$ и $\nu(N)$ будем называть функциями одного порядка и писать $\mu\asymp\nu$, если существует константа N_0 такая, что при $N>N_0$ | $C_1\mu(N)\leqslant\nu(N)\leqslant C_2\mu(N)$, $C_1>0$, $C_2>0$.

Аналогично определяются порядковые неравенства $\mu\gg\nu$ и $\mu\ll\nu$.

В принятых обозначениях $\forall\, p\in(1,\infty)$ и $1\leqslant\theta<\infty$ выполняется соотношение [1]

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r}\asymp\left\{\sum_{s>0}2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_p^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{1}$$

Если же $\theta=\infty$, то как уже отмечалось, $B_{p,\infty}^r\equiv H_p^r$ и

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^r}=\sup_s 2^{(s,r)}\|\delta_s(f,x)\|_p. \tag{2}$$

Эта нормировка была получена Н. С. Никольской [3].

Таким образом, если для некоторой функции нормы (1) или (2) конечны, то будем говорить, что $f\in B_{p,\theta}^r$.

Выше отмечалось, что имеется тесная связь между классами W_p^r и $B_{p,\theta}^r$. Более конкретно, справедливы соотношения

$$W_2^r=B_{2,2}^r,\quad B_{p,p}^r\subset W_p^r\subset B_{p,2}^r,\quad 1<p\leqslant2,$$
$$B_{p,2}^r\subset W_p^r\subset W_{p,p}^r,\quad 2\leqslant p<\infty.$$

Заметим также, что с увеличением индекса θ классы $B^r_{p,\theta}$ расширяются, т. е. $B^r_{p,1} \subset W^r_p \subset B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p$, $1 < p < \infty$.

Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ в зависимости от θ будем осуществлять с помощью сумм вида $S_n^{\gamma'}(f, x) = \sum\limits_{(s,\gamma')<n} \delta_s(f, x)$ или $S_n^{\gamma}(f, x) = \sum\limits_{(s,\gamma)<n} \delta_s(f, x)$, где векторы $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ и $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_m)$ выбираются следующим образом. Предположим, что вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ имеет вид $r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$. С этим вектором будем связывать вектор $\gamma = r/r_1$. Тогда вектор γ' выберем так, чтобы $\gamma'_j = \gamma_j$, $j = \overline{1, \nu}$ и $\gamma_{j-1} < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \nu + 1, \ldots, m$.

Обозначим через $T_{Q_n^{\gamma'}}$ и $T_{Q_n^{\gamma}}$ множества полиномов с гармониками соответственно из $Q_n^{\gamma'} = \bigcup\limits_{(s,\gamma')<n} \rho(s)$ и $Q_n^{\gamma} = \bigcup\limits_{(s,\gamma)<n} \rho(s)$ и $E_n^{\gamma'}(f, x) = \inf\limits_{t \in T_{Q_n^{\gamma'}}} \| f - t \|_p$, $E_n^{\gamma}(f, x) = \inf\limits_{t \in T_{Q_n^{\gamma}}} \| f - t \|_p$ — наилучшие приближения.

В дальнейшем нам понадобятся такие утверждения.

Теорема А. *Пусть задано $p \in (1, \infty)$. Существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что для каждой функции $f \in L_p(\pi_m)$ справедлива оценка*

$$C_1 \| f \|_p \leqslant \Big\| \Big(\sum_s | \delta_s(f, x) |^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \leqslant C_2 \| f \|_p.$$

Эта теорема является обобщением теоремы Литтлвуда— Пэли на многомерный случай [2, с. 7].

Лемма А [2, с. 11]. *Справедлива оценка*

$$\sum_{(s,\gamma) \geqslant n} 2^{-\alpha(\gamma, s)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{m-1}, \quad \alpha > 0.$$

Лемма Б [2, с. 11]. *Справедлива оценка*

$$\sum_{(s,\gamma') \geqslant n} 2^{-\alpha(\gamma, s)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{\nu-1}, \quad \alpha > 0.$$

3. Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ гиперболическими суммами Фурье в метрике L_q. Вначале напомним, что мы рассматриваем случай $1 < p, q < \infty$, опуская предельные значения $1, \infty$. Кроме того, заметим, что из теоремы A следует, что операторы Фурье $S_n^{\gamma'}$ и S_n^{γ} ограничены по норме в L_p, т. е. $\| S_n^{\gamma} \|_p \ll \| f \|_p$ и $\| S_n^{\gamma'} \|_p \ll \| f \|_p$ и, таким образом, $E_n^{\gamma'}(f, x) \asymp \| f - S_n^{\gamma'}(f, x) \|_p$ и $E_n^{\gamma}(f, x) \asymp \| f - S_n^{\gamma}(f, x) \|_p$. Следовательно, полученные ниже оценки уклонений сумм Фурье являются в то же время порядковыми оценками наилучших приближений полиномами из множеств $T_{Q_n^{\gamma'}}$ и $T_{Q_n^{\gamma}}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого $r_1 > 0$ выполняются соотношения*

$$E_n^{\gamma'}(B^r_{q,\theta})_q \asymp \sup_{f \in B^r_{q,\theta}} \| f - S_n^{\gamma'}(f, x) \|_q \asymp \begin{cases} 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)}, & 1 < q \leqslant 2, \ \theta \geqslant q, \\ 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}, & 2 < q < \infty, \ \theta \geqslant 2. \end{cases}$$

Если же $1 < q \leqslant 2$ и $1 \leqslant \theta < q$ или $2 \leqslant q < \infty$ и $1 \leqslant \theta < 2$, то

$$E_n^{\gamma}(B^r_{q,\theta})_q \asymp \sup_{f \in B^r_{q,\theta}} \| f - S_n^{\gamma}(f, x) \|_q \asymp 2^{-nr_1}.$$

Доказательство. Вначале получим оценку сверху в случае $2<q<\infty$, $\theta\geqslant 2$. Для $f\in B^r_{q,\theta}$ в силу теоремы А и неравенства Минковского будем иметь

$$\|f-S_n^{\gamma'}(f,x)\|_q\ll\Big\|\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}|\delta_s(f,x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_q\asymp\Big(\Big\|\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}|\delta_s(f,x)|^2\Big\|_{q/2}\Big)^{\frac{1}{2}}\ll$$

$$\ll\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}\||\delta_s(f,x)|^2\|_{q/2}\Big)^{\frac{1}{2}}\asymp\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}\|\delta_s(f,x)\|_q^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

Далее, применив к последней сумме неравенство Гельдера с показателем $\theta/2$, продолжим оценку

$$\ll\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}2^{2(s,r)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_q^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}}\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}2^{-2(s,r)\theta/(\theta-2)}\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll\|f\|_{B^r_{q,\theta}}\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}2^{-2(r,s)\theta/(\theta-2)}\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

И воспользовавшись наконец леммой Б, получим

$$\ll\|f\|_{B^r_{q,\theta}}2^{-r_1n}n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}\ll 2^{-r_1n}n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \qquad (4)$$

В случае $2<q<\infty$ и $1\leqslant\theta<2$ воспользуемся соотношением [4, с. 43]

$$\Big(\sum_k a_k^{\nu_2}\Big)^{\frac{1}{\nu_2}}\leqslant\Big(\sum_k a_k^{\nu_1}\Big)^{\frac{1}{\nu_1}},\quad \nu_2\geqslant\nu_1>0, \qquad (5)$$

в силу которого

$$\|f-S_n^{\gamma}(f,x)\|_q\leqslant\Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n}\|\delta_s(f,x)\|_q^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n}\|\delta_s(f,x)\|_q^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll\Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n}2^{-(s,r)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_q^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}}\sup_{(s,\gamma)\geqslant n}2^{-(s,r)}\ll 2^{-r_1n}\|f\|_{B^r_{q,\theta}}\ll 2^{-r_1n}. \qquad (6)$$

Таким образом, из соотношений (3), (4), (6) следует требуемая оценка сверху в случае $2<q<\infty$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$.

Рассмотрим теперь случай $1<q\leqslant 2$ и предположим, что $\theta\geqslant q$. Тогда, применив сначала теорему Литтлвуда — Пэли, а потом известное неравенство

$|a+b|^{\nu_1}\leqslant|a|^{\nu_1}+|b|^{\nu_1}$, $0\leqslant\nu_1\leqslant 1$, получим

$$\|f-S_n^{\gamma'}(f,x)\|_q\ll\Big\|\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}|\delta_s(f,x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_q\ll\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}\|\delta_s(f,x)\|_q^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Чтобы продолжить оценку, к последней сумме применим неравенство Гельдера с показателем θ/q

$$\ll\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_q^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}}\Big(\sum_{(s,\gamma')\geqslant n}2^{-q(r,s)\theta/(\theta-q)}\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll\|f\|_{B^r_{q,\theta}}2^{-r_1n}n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}\ll 2^{-r_1n}n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Если же $\theta < q$, то, воспользовавшись неравенством (5), будем иметь

$$\| f - S_n^\gamma(f, x) \|_q \ll \Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n} \| \delta_s(f, x) \|_q^q \Big)^{\frac{1}{q}} \ll \Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n} \| \delta_s(f, x) \|_q^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f, x) \|_q^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{(s,\gamma)\geqslant n} 2^{-(s,r)} \ll 2^{-r_1 n} \| f \|_{B^r_{q,\theta}} \ll 2^{-r_1 n}.$$

Теперь перейдем к получению оценок снизу. Сначала рассмотрим случай $2 < q < \infty$, $\theta \geqslant 2$ и заметим, что оценку снизу достаточно провести для $\nu = m$. В этом случае, очевидно, $\gamma = (1, \ldots, 1)$ и вместо вектора γ будем писать 1.

С этой целью по заданному $n \in N$ возьмем функцию

$$g_{r,\theta}(x) = n^{-\frac{m-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{m} 2^{-(r,s)} e^{i2^{s_j-1}x_j} \tag{7}$$

и убедимся, что она принадлежит классу $B^r_{q,\theta}$. Действительно,

$$\| g_{r,\theta} \|_{B^r_{q,\theta}} = \Big(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f, x) \|_q^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= n^{-\frac{m-1}{\theta}} \Big(\sum_{(s,1)=n} \Big\| \prod_{j=1}^{m} e^{i2^{s_j-1}x_j} \Big\|_q^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} = n^{-\frac{m-1}{\theta}} \Big(\sum_{(s,1)=n} 1 \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Далее, поскольку при $q \geqslant 2 \| \cdot \|_q \geqslant \| \cdot \|_2$ и $S_n^1(g_{r,\theta}) = 0$, то

$$E_n^1(B^r_{q,\theta})_q \asymp \sup_{f\in B^r_{q,\theta}} \| f - S_n^1(f, x) \|_q \geqslant E_n^1(g_{r,\theta})_q \geqslant E_n^1(g_{r,\theta})_2 \asymp \| g_{r,\theta} \|_2 =$$

$$= n^{-\frac{m-1}{\theta}} \Big(\sum_{(s,1)=n} 2^{-2(r,s)} \Big)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-r_1 n} n^{\frac{m-1}{2}} n^{-\frac{m-1}{\theta}} = 2^{-r_1 n} n^{(m-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Пусть теперь $2 < q < \infty$, $1 \leqslant \theta < 2$. Тогда по заданному n выберем функцию $g_{r,q}(x)$ в виде

$$g_{r,q}(x) = 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{q}\right)} \sum_{k\in\rho(\tilde{s})} e^{i(k,x)} = 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{q}\right)} \delta_{\tilde{s}}(e^{i(k,x)}), \tag{8}$$

где $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$ — один из векторов, удовлетворяющих условию $(\tilde{s}, 1) = n$. Тогда легко видеть, что $g_{r,q} \in B^r_{q,\theta}$, так как

$$\| g_{r,q} \|_{B^r_{q,\theta}} = 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{q}\right)} (2^{(r,\tilde{s})\theta} \| \delta_{\tilde{s}}(e^{i(k,x)}) \|_q^\theta)^{\frac{1}{\theta}} = 2^{-n\left(1-\frac{1}{q}\right)} \| \delta_{\tilde{s}}(e^{i(k,x)}) \|_q.$$

Чтобы продолжить последнюю оценку, воспользуемся известным соотношением (см., например, [5, с. 214])

$$\Big\| \sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l} e^{ikx} \Big\|_q \asymp 2^{+l\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \quad q \in (1, \infty), \tag{9}$$

в силу которого

$$\| g_{r,q} \|_{B^r_{q,\theta}} \ll 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} 2^{-\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)} = 1,$$

т. е. $g_{r,q} \in B^r_{q,\theta}$.

Следовательно, принимая во внимание, что $S_n^1(g_{r,q})=0$, а также соотношение (9), получаем

$$E_n^1(B_{q,\theta}^r)_q \geqslant E_n^1(g_{r,q})_q \asymp \| g_{r,q}(x) - S_n^1(g_{r,q}) \|_q = \| g_{r,q} \|_q =$$
$$= 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{q}\right)} \| \delta_{\underset{s}{\sim}}(e^{i(k,x)}) \|_q \asymp 2^{-nr_1},$$

что и требовалось доказать.

Наконец, получим оценку снизу в случае $1<q\leqslant 2$.

Предположим, что $\theta \geqslant q$, и рассмотрим функцию

$$f_{r,q,\theta}(x) = 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{m-1}{\theta}} \sum_{k\in F_n} e^{i(k,x)} = 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{m-1}{\theta}} d_n(x), \quad (10)$$

где $F_n = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$.

Легко видеть, что $S_n^1(f_{r,q,\theta})=0$.

Убедимся, что $f_{r,q,\theta} \in B_{q,\theta}^r$. Имеем

$$\| f_{r,q,\theta} \|_{B_{q,\theta}^r} = \Big(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f_{r,q,\theta}, x) \|_q^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} = 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{m-1}{\theta}} \times$$
$$\times \Big(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(d_n, x) \|_q^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} = 2^{-n\left(1-\frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{m-1}{\theta}} \Big(\sum_{(s,1)=n} \| \delta_s(d_n, x) \|_q^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}}. \quad (11)$$

Но, поскольку, как уже отмечалось, $\forall s \in N^m$

$$\| \delta_s(d_n, x) \|_q \asymp 2^{\left(s,1-\frac{1}{q}\right)},$$

то из (11) получаем

$$\| f_{r,q,\theta} \|_{B_{q,\theta}^r} \ll n^{-\frac{m-1}{\theta}} \Big(\sum_{(s,1)=n} 1 \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1,$$

т. е. $f_{r,q,\theta} \in B_{q,\theta}^r$. Далее, положим $\Delta_s = \{x : 2^{-s_j} \leqslant x_j < 2^{-s_j+1},\ j=\overline{1,m}\}$ и заметим, что $\Delta_s \cap \Delta_{s'} = \varnothing$ при $s \neq s'$. Тогда в силу теоремы Литтлвуда — Пэли

$$E_n^1(f_{\cdot,q,\theta})_q \asymp \| f_{r,q,\theta} \|_q \gg \Big\| \Big(\sum_{(s,1)=n} | \delta_s(f, x) |^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q \gg \Big(\sum_{(s,1)=n} \int_{\Delta_s} | \delta_s(f_{r,q,\theta}, x) |^q dx \Big)^{\frac{1}{q}}. \quad (12)$$

Оценим интеграл в последней сумме соотношения (12).

Пусть $2^{s_j-1} \leqslant k_j < 2^{s_j}$, $2^{-s_j} \leqslant x_j < 2^{-s_j+1}$, тогда $\frac{1}{2} \leqslant k_j x_j \leqslant 2$ и поэтому

$$\left| \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} e^{ik_jx_j} \right| \geqslant \left| \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} \sin k_j x_j \right| \gg 2^{s_j} \sin \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для всех $x \in \Delta_s$

$$\Big| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} \Big| \gg 2^{(s,1)}$$

и, таким образом,

$$\int_{\Delta_s} | \delta_s(f_{r,q,\theta}, x) |^q dx \gg 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{q}\right)q} n^{-\frac{m-1}{\theta}q} 2^{\|s\|_1 q} 2^{-\|s\|_1} \asymp 2^{-nr_1q} n^{-\frac{m-1}{\theta}q}.$$

Подставляя полученную оценку в (12), будем иметь

$$E_n^1(f_{r,q,\theta})_q \gg \Big(\sum_{(s,1)=n} 2^{-nr_1 q} n^{-\frac{m-1}{\theta}q}\Big)^{\frac{1}{q}} \asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{m-1}{\theta}} \Big(\sum_{(s,1)=n} 1\Big)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{(m-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

В случае $1 \leqslant \theta < q$ достаточно рассмотреть функцию

$$g(x) = 2^{-nr_1} \prod_{j=1}^{m} e^{i2^{\tilde{s}_j} x_j}, \quad \tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_m), \quad (\tilde{s}, 1) = n,$$

которая, очевидно, принадлежит $B_{q,\theta}^r$ и для которой

$$E_n^1(g)_q = 2^{-nr_1} \Big\| \prod_{j=1}^{m} e^{i2^{\tilde{s}_j} x_j} \Big\|_q \asymp 2^{-nr_1}.$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Перейдем к рассмотрению случая $1 < p < q < \infty$. При этом нам понадобится одна лемма, полученная В. Н. Темляковым [2, с. 35].

Лемма В. *Пусть заданы $1 < p < q < \infty$ и $f \in L_q(\pi_m)$. Тогда*

$$\|f\|_q \ll \Big[\sum_s (\|\delta_s(f, x)\|_p 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)})^q\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

С использованием этой леммы докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ и $r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$. Тогда*

$$E_n^\gamma(B_{p,\theta}^r)_q \asymp 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доказательство. Установим сначала оценку сверху. Пусть $f \in B_{p,\theta}^r$. Тогда в силу леммы В

$$\|f - S_n^\gamma(f, x)\|_q = \Big\| \sum_{(s,\gamma)\geqslant n} \delta_s(f, x) \Big\|_q \ll \Big[\sum_{(s,\gamma)\geqslant n} \|\delta_s(f, x)\|_p^q 2^{q\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n} 2^{q(s,r)} \|\delta_s(f, x)\|_p^q 2^{-q(s,r)} 2^{q\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{13}$$

Пусть $\theta \geqslant q$. Тогда, применив к последней сумме неравенство Гельдера с показателем θ/q, продолжим оценку (13):

$$\ll \Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}} \Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n} 2^{-q\left[(s,r)-\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{\theta}{\theta-q}}}\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^r} \Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n} 2^{-q\left[(s,r)-\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{\theta}{\theta-q}}}\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}.$$

Далее, положив $\tilde{\gamma}_j = \left(r_j - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right) \Big/ \left(r_1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right)$, будем иметь $\gamma_j < \tilde{\gamma}_j$ при $j = \nu + 1, \ldots, m$, и, воспользовавшись леммой Б, продолжим оценку

$$\ll \Big(\sum_{(s,\gamma)\geqslant n} 2^{-q\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(\tilde{\gamma},s)\frac{\theta}{\theta-q}}\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Если же $1 \leqslant \theta < q$, то соотношение (13) можно продолжить

$$\ll \Big(\sum_{(s,\gamma) \geqslant n} 2^{\theta(r,s)} \| \delta_s(f, x) \|_p^\theta 2^{-\theta(s,r)} 2^{\theta(s,\gamma)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \sup_{(s,\gamma) \geqslant n} 2^{-\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(s,\gamma)} \Big(\sum_{(s,\gamma) \geqslant n} 2^{\theta(s,r)} \| \delta_s(f, x) \|_p^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}.$$

Для оценки снизу построим экстремальные функции, которые реализуют найденные оценки сверху.

В случае $\theta \geqslant q$ будем исходить из функции (10), а именно возьмем

$$g_{\widetilde{r},q,\theta}(x) = 2^{-n\left(\widetilde{r} + 1 - \frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{m-1}{\theta}} \sum_{k \in F_n} e^{i(k,x)},$$

где $\widetilde{r} = r_1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, $F_n = \bigcup\limits_{(s,1)=n} \rho(s)$.

Поскольку $\widetilde{r} + 1 - \dfrac{1}{q} = r_1 + 1 - \dfrac{1}{p}$ и функция (10) принадлежит классу $B_{q,\theta}^r$, то, следовательно, $g_{\widetilde{r},q,\theta} \in CB_{p,\theta}^r$, $C > 0$. Кроме того, учитывая, что $S_n^1(g_{\widetilde{r},q,\theta}) = 0$, получаем

$$E_n^1(g_{\widetilde{r},q,\theta})_q \asymp \| g_{\widetilde{r},q,\theta} \|_q \gg 2^{-n\widetilde{r}} n^{(m-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)} = 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} n^{(m-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Пусть $1 \leqslant \theta < q$. Тогда рассмотрим функцию

$$g_{\widetilde{r},q}(x) = 2^{-n\left(\widetilde{r} + 1 - \frac{1}{q}\right)} \sum_{k \in \rho(\widetilde{s})} e^{i(k,x)}, \quad \widetilde{r} = r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad (\widetilde{s}, 1) = n,$$

для которой очевидно $S_n^1(g_{\widetilde{r},q}) = 0$. Как установлено выше, функция (8) принадлежит классу $B_{q,\theta}^r$. Следовательно, из соотношения $\widetilde{r} + 1 - \dfrac{1}{q} = r_1 + 1 - \dfrac{1}{p}$ делаем вывод, что $g_{\widetilde{r},q} \in B_{p,\theta}^r$.

Таким образом,

$$E_n^1(B_{p,\theta}^r)_q \gg E_n^1(g_{\widetilde{r},q})_q \gg 2^{-n\widetilde{r}} = 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}.$$

Теорема доказана.

Наконец, рассмотрим случай $1 < q \leqslant p < \infty$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $1 < q \leqslant p < \infty$, $p \geqslant 2$, $r_1 > 0$. *Тогда при* $\theta \geqslant 2$

$$E_n^{\gamma'}(B_{p,\theta}^r)_q \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Если же $1 \leqslant \theta < 2$, *то*

$$E_n^{\gamma}(B_{p,\theta}^r)_q \asymp 2^{-nr_1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху в силу неравенства $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p$, $q \leqslant p$, сводится к оценке сверху приближения класса $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_p, которая была получена в теореме 1.

Для получения оценки снизу при $\theta \geqslant 2$ возьмем функцию $g_{r,\theta}(x)$ из

(7). Тогда, применяя теорему Литтлвуда — Пэли, получаем

$$E_n^1 (B_{p,\theta}^r)_q \gg \| g_{r,\theta} \|_q \gg \Big\| \Big(\sum_{(s,1)=n} | \delta_s (g_{r,\theta}, x) |^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q \asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{m-1}{\theta}} \Big(\sum_{(s,1)=n} 1 \Big)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{(m-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Если $1 \leqslant \theta < 2$, то оценка снизу сводится к функции, содержащей одну гармонику, а именно $g(x) = 2^{-nr_1} \prod_{j=1}^m e^{i 2^{\tilde{s}_j} x_j}$, $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$, $(\tilde{s}, 1) = n$.

Замечание. В случае $1 < q < p \leqslant 2$ оценка уклонений сумм Фурье получена Э. М. Галеевым [6].

4. Колмогоровские поперечники классов $B_{p,\theta}^r$. Будем изучать величину

$$d_M (B_{p,\theta}^r, L_q) = \inf_{L_M \subset L_q} \sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \inf_{a(\cdot) \in L_M} \| f(\cdot) - a(\cdot) \|_q, \tag{14}$$

где L_M — M-мерные многообразия в L_q.

Величина (14) впервые была рассмотрена А. Н. Колмогоровым [7] и получила впоследствии название колмогоровского поперечника. В настоящее время имеется достаточно большое количество работ, посвященных исследованию колмогоровских поперечников. Не имея возможности подробно на этом останавливаться, укажем только на монографию [2], большую часть которой занимает проблематика вычисления величины (14) на классах функций многих переменных W_p^r и H_p^r.

Для формулировки и доказательства полученного результата нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Для чисел $1 \leqslant p, q < \infty$, $m, n \in N$, в пространстве векторов $x \in R^{mn}$ введем норму

$$\| x \|_{l_{p,q}^{nm}} = \Big(\sum_{s=1}^m \Big(\sum_{k \in \mu(s)} | x_k |^p \Big)^{q/p} \Big)^{\frac{1}{q}},$$

где $\mu(s) = \{ k \in N \mid (s-1) n < k \leqslant sn,\ s = 1, \ldots, m \}$.

Тем самым получим нормированное пространство $l_{p,q}^{nm}$ с единичным шаром $B_{p,q}^{nm} = \{ x, x \in l_{p,q}^{nm} : \| x \|_{l_{p,q}^{nm}} \leqslant 1 \}$.

Теорема Б [8]. *Пусть* $1 < q < \infty$, $M \leqslant nm/2$ *Тогда* $d_M (B_{1,\infty}^{nm}, l_{2,q}^{nm}) \asymp \asymp m^{\frac{1}{q}}$.

Теорема В [8]. *Между пространством тригонометрических полиномов вида* $f(t) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{i(k,t)}$ *и пространством* $R^{2(s,1)}$ *устанавливается изоморфизм путем сопоставления функции* $f(\cdot)$ *вектора*

$$\delta_s f^l = \{ f_n (\tau_j) \} \in R^{2^{(s,1)}}, \quad f_n (t) = \sum_{\operatorname{sgn} k_l = \operatorname{sgn} n_l} c_k e^{i(k,t)}, \quad l = 1, \ldots, m,$$

$$n = (\pm 1, \ldots, \pm 1) \in R^m, \quad \tau_j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \ldots, \pi 2^{2-s_m} j_m), \quad j_i = 1, 2, \ldots, 2^{s_i - 1},$$

$$i = \overline{1, m},$$

и порядковое равенство

$$\| \delta_s (f, x) \|_p \asymp \Big(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} | \delta_s f^j |^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (1, \infty).$$

Л е м м а Г [2, с. 28]. *Пусть заданы* $1 \leqslant p < q < \infty$ *и* $f \in L_p(\pi_m)$. *Тогда*

$$\|f\|_p \gg \Big[\sum_s \big(\|\delta_s(f, x)\|_q 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\big)^p\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $1 < p \leqslant q \leqslant 2$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тогда*

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху следует из приближения оператором Фурье S_n^γ (см. теорему 2), если по заданному M число n подобрать из соотношения $M \asymp n^{\nu-1}2^n$. При получении оценки снизу при $\theta \geqslant q$ будем использовать идейные соображения, применяемые Э. М. Галеевым [8] при оценке снизу поперечника класса H_p^r.
С этой целью положим

$$S_n = \{s \in N^m \mid s_j = 1, \quad j = \nu+1, \ldots, m, \ (s, 1) = n\},$$
$$Q_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho(s), \quad \mathscr{T}_n = \{f : f(x) = \sum_{s \in S_n} \delta_s(f, x)\}.$$

В дальнейшем число элементов множества S_n будем обозначать $|S_n|$. Подберем число $n \in N$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{s \in S_n} 2^{(s,1)} \geqslant 2M, \quad n^{\nu-1}2^n \asymp M.$$

Тогда из определения колмогоровского поперечника следует оценка

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \geqslant d_M(B^r_{p,\theta} \cap \mathscr{T}_n, L_q), \tag{15}$$

где $B^r_{p,\theta} \cap \mathscr{T}_n$ — множество функций из $B^r_{p,\theta}$, являющихся полиномами из $\mathscr{T}_n$.

Далее, пусть P_n — оператор ортогонального проектирования на $\mathscr{T}_n$. В силу теоремы Литтлвуда — Пэли справедлива оценка

$$\|P_n f\|_q \leqslant C_q \|f\|_q, \quad q \in (1, \infty),$$

вследствие которой $\forall f \in L_q$, $t \in \mathscr{T}_n$

$$\|t - f\|_q \geqslant C_q \|P_n(t - f)\|_q = C_q \|t - P_n f\|_q. \tag{16}$$

Сопоставив (15) и (16), получаем соотношение

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \gg d_M(B^r_{p,\theta} \cap \mathscr{T}_n, L_q \cap \mathscr{T}_n). \tag{17}$$

Пусть $f \in \mathscr{T}_n$. Тогда в силу теоремы В

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \Big(\sum_{s \in S_n} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{nr_1}\Big(\sum_{s \in S_n} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{nr_1}\Big(\sum_{s \in S_n}\Big(2^{-(s,1)}\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^p\Big)^{\frac{\theta}{p}}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{nr_1 - \frac{n}{p}}\Big(\sum_{s \in S_n}\Big(\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^p\Big)^{\frac{\theta}{p}}\Big)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{18}$$

Следовательно, если $\forall s \in S_n$

$$\Big(\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ll 2^{-r_1 n + \frac{n}{p}} n^{-\frac{\nu-1}{\theta}}, \tag{19}$$

то

$$2^{nr_1-\frac{n}{p}}\Big(\sum_{s\in S_n}\Big(\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}}|\delta_s f^j|^p\Big)^{\frac{\theta}{p}}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{\nu-1}{\theta}}\Big(\sum_{s\in S_n}1\Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1,$$

т. е. $f\in B^r_{p,\theta}\cap\mathcal{T}_n$.

Таким образом, из соотношений (18) и (19) следует, что всякому шару $C2^{-nr_1+\frac{n}{p}}n^{-\frac{\nu-1}{\theta}}B^{2^n,|S_n|}_{p,\infty}$ радиуса $C2^{-nr_1+\frac{n}{p}}n^{-\frac{\nu-1}{\theta}}$ пространства $l^{2^n,|S_n|}_{p,\infty}$ соответствует единичный шар пространства $B^r_{p,\theta}\cap\mathcal{T}_n$.

Кроме того, если $f(\cdot)=\sum_{s\in S_n}\delta_s(f,\cdot)$, то при $1<q\leqslant 2$ в силу леммы Г и теоремы В будем иметь

$$\|f\|_q \gg \Big(\sum_{s\in S_n}2^{\left(s,\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q}\|\delta_s(f,x)\|_2^q\Big)^{1/q} \asymp \Big(\sum_{s\in S_n}2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q-\left(s,\frac{1}{2}\right)q}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}}|\delta_s f^j|^2\Big)^{q/2}\Big)^{\frac{1}{q}} \asymp 2^{-\frac{n}{q}}\Big(\sum_{s\in S_n}\|\delta_s f^j\|^q_{l_2^{2^n}}\Big)^{\frac{1}{q}} = 2^{-\frac{n}{q}}\|\delta_s f^j\|_{l^{2^n,|S_n|}_{2,q}}. \qquad (20)$$

Таким образом, сопоставив соотношения (17)—(20), будем иметь

$$d_M(B^r_{p,\theta},L_q) \gg 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}n^{-\frac{\nu-1}{\theta}}d_M(B^{2^n,|S_n|}_{p,\infty},\ l^{2^n,|S_n|}_{2,q}).$$

Далее, учитывая, что $B^{2^n,|S_n|}_{p,\infty}\supset B^{2^n,|S_n|}_{1,\infty}$, продолжим оценку

$$\gg 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}n^{-\frac{\nu-1}{\theta}}d_M(B^{2^n,|S_n|}_{1,\infty},\ l^{2^n,|S_n|}_{2,q}).$$

Наконец, воспользовавшись теоремой Б, в силу которой

$$d_M(B^{2^n,|S_n|}_{1,\infty},\ l^{2^n,|S_n|}_{2,q}) \asymp |S_n|^{1/q} \asymp n^{\frac{\nu-1}{q}},$$

находим

$$d_M(B^r_{p,\theta},L_q) \gg 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}n^{-\frac{\nu-1}{\theta}}n^{\frac{\nu-1}{q}} \asymp 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Таким образом, получена оценка для случая $\theta\geqslant q$. Если же $1\leqslant\theta<q$, то требуемая оценка снизу получается аналогично оценке снизу поперечника $d_M(W^r_p,L_q)$ при $1<p<q\leqslant 2$ [2, с. 69].

Отметим в заключение, что полученные оценки уклонений гиперболических сумм Фурье, а также частный случай теоремы 4 ($q=2$) были анонсированы автором в работе [9].

1. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1989.— 187.— С. 143—161.
2. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Там же.— 1986.— 178.— С. 1—112.
3. *Никольская Н. С.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // Сиб. мат. журн.— 1974.— 15, № 2.— С. 395—412.
4. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г.* Неравенства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1948.— 456 с.
5. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
6. *Галеев Э. М.* Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами // Мат. заметки.— 1990.— 47, № 3.— С. 32—41.
7. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von funktionen einer gegeben Funktionenklasse // Ann. Math.— 1936.— 37.— P. 107—111.
8. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1990.— 54, № 5.— С. 418—430.
9. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q.— Киев, 1990.— 47 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.30).

Получено 11.01.91