УДК 519.41/47

Н. С. ЧЕРНИКОВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Факторизация групп перестановочными периодическими подгруппами без элементов одинаковых простых порядков

Излагается ряд результатов, устанавливающих свойства групп, факторизуемых попарно перестановочными периодическими подгруппами без элементов одинаковых простых порядков, в зависимости от свойств подгрупп-множителей.

Викладається ряд результатів, що встановлюють властивості груп, які факторизовані попарно переставними періодичними підгрупами без елементів однакових простих порядків, в залежності від властивостей підгруп-множників.

В настоящей работе, которую можно считать продолжением работы [1], установлены новые предложения, связанные с факторизацией, указанной в ее названии (предложения 1—4, теоремы 1—3). При этом теорема 1 обобщает теорему 6 из [2], теорема 2 — теоремы 2 из [3, 4] и в пп. 1—4 совпадает с теоремой 2 из [4], теорема 3 обобщает теорему 3 из [4].

Определение 1. *Пусть G — группа и π — некоторое множество простых чисел. Как и в* [1], *будем говорить, что G — π-замкнута, если найдется $N \leqslant G$ такая, что $\pi(N) \subseteq \pi$ и $\pi(G/N) \subseteq \pi'$.*

Нормальные и инвариантные системы группы понимаются в смысле [5].

Определение 2. *Пусть G —группа с некоторой группой операторов Φ. Факторы неуплотняемых нормальных и инвариантных систем Φ-допустимых подгрупп группы G будем называть соответственно ее Φ-композиционными и Φ-главными факторами.*

Далее во всех утверждениях G — группа $\neq 1$ с некоторой группой операторов Φ, разложимая в произведение попарно перестановочных периодических подгрупп A_i, $i \in \mathrm{I}$, таких, что $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \varnothing$, $i \neq j$; $\pi_i = \pi(A_i)$, $i \in \mathrm{I}$, и $\pi = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \pi_i$. Очевидно, множество I конечно или счетно. Поэтому считаем, что $\mathrm{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ или $\mathrm{I} = \mathbb{N}$. Будем считать также, что $2 \notin \pi_i$ при $i \neq 1$ и $3 \notin \pi_i$ при $i \neq 1, 2$.

Рядом типа (ij) или $(\tilde{ij})$ группы будем называть ее возрастающий нормальный ряд, у которого произвольный фактор соответственно а) π_i- или π_j-замкнут, б) конечен или вида а).

Ниже $\langle y^X \rangle$ — нормальное замыкание в группе X ее множества элементов $Y \neq \varnothing$.

Предложение 1. *Пусть каждая подгруппа A_iA_j, $1 < i \leqslant j$, группы G обладает рядом типа $(\tilde{ij})$ и каждая подгруппа A_1A_j, $j \in \mathrm{I}$, имеет подгруппу конечного индекса, обладающую рядом типа (ij). Тогда: 1. Произвольная подгруппа A_iA_j, $1 < i \leqslant j$, и в случае, когда $2 \notin \pi_1$ — любая подгруппа A_iA_j, $i \in \mathrm{I}$, $j \in \mathrm{I}$, обладает рядом типа (ij). 2. G — π-группа, локально конечная, когда все A_i, $i \in \mathrm{I}$, локально конечны. 3. Соотношение $O_{\pi_i'}(G) = 1$ может выполняться не более чем для двух различных $i \in \mathrm{I}$. Если для некоторых i и $j > i$ $O_{\pi_i'}(G) = O_{\pi_j'}(G) = 1$, то $i = 1$, $2 \in \pi_1$, G — конечная неразрешимая группа и подгруппа A_1A_j не обладает рядом типа (ij). 4. Если Φ - композиционный или Φ-главный фактор F/H группы G не покрывается ни одной из подгрупп A_i, то он конечен, является прямым произведением изоморфных простых групп и для некоторого $j \neq 1$ представим в виде $F/H = ((F \cap A_1) H/H)((F \cap A_j) H/H)$, причем $2 \in \pi((F \cap A_1) H/H)$ и $F \cap A_j \not\subseteq H$. 5. В случае, когда каждая подгруппа A_1A_j, $j \in \mathrm{I}$, обладает рядом типа (ij), все Φ-композиционные и все Φ-главные факторы группы G покрываются подгруппами A_i.*

Доказательство. Утверждение 1 нетрудно доказать, используя теорему Фейта — Томпсона [6] и учитывая, что ввиду периодичности подгрупп A_i, $i \in \mathrm{I}$, и соотношений $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$, $i \neq j$, произвольный фактор любой нормальной системы (в частности, возрастающего нормального ряда) подгруппы A_iA_j представим в виде произведения двух подгрупп, одна из которых изоморфна секции подгруппы A_i, а другая — подгруппы A_j (см. [7], утверждение 1 леммы 3.2). Утверждение 2 справедливо в силу предложения 4 из [1] и утверждения 1.

Докажем утверждение 3. Положим $B_k = \langle \bigcup_{i \neq k} A_i \rangle$, $k \in \mathrm{I}$. Ввиду утверждения 2 $\pi(B_k) \subseteq \bigcup_{i \neq k} \pi_i \subseteq \pi_k'$, $k \in \mathrm{I}$. Пусть $O_{\pi_i'}(G) = O_{\pi_j'}(G) = 1$, $i < j$. Тогда $A_i \neq 1$ и $A_j \neq 1$. В силу предложений 4 и 3 из [1] и утверждения 1 найдется подгруппа $K \neq 1$, $K \trianglelefteq A_iA_j$ и $K \subseteq A_i$ или $K \subseteq A_j$ в каждом из случаев: A_iA_j бесконечна; A_iA_j обладает рядом типа (ij); A_iA_j разрешима; $i \neq 1$; $i = 1$ и $2 \notin \pi_1$. Пусть, например, $K \subseteq A_j$. Так как $G = (A_iA_j) B_i$, $K \trianglelefteq A_iA_j$ и $K \subseteq B_i$, то по лемме С. А. Чунихина (см., например, [8], лемма 1.36) $\langle K^G \rangle \subseteq B_i$ и, значит, $1 \neq \langle K^G \rangle \subseteq O_{\pi_i'}(G)$. Поэтому ни один из отмеченных случаев не имеет места. Далее, $B_1 \cap B_j$ —

— π'_1-группа. По теореме Пуанкаре она имеет подгруппу $D \lhd G$ такую, что $|G:D| < \infty$. Так как $D \subseteq O_{\pi'_1}(G) = 1$, то $|G| < \infty$.

Докажем утверждения 4 и 5. Так как подгруппы A_k и B_k, $k \in \mathrm{I}$, периодические и $\pi(A_k) \cap \pi(B_k) = \varnothing$, $k \in \mathrm{I}$, то ввиду предложения 3.3 из [7] F / H — произведение попарно перестановочных подгрупп $A^*_i = (F \cap \cap A_i) H / H$, $i \in \mathrm{I}$. В силу периодичности группы G очевидно, что при любых $i \in I$ и $j \in I$ подгруппа $A^*_i A^*_j$ удовлетворяет тому же условию, что и подгруппа $A_i A_j$ группы G. Теперь остается учесть, что F/H не имеет собственных характеристических подгрупп и воспользоваться утверждениями 3 и 1.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть каждая подгруппа* $A_i A_j$, $i \in \mathrm{I}$, $j \in \mathrm{I}$, *из* G *обладает рядом типа* $(\widetilde{ij})$ *и выполняется хотя бы одно из условий*: 1) $2 \notin \pi_1$; 2) $3 \notin \pi_1 \cup \pi_2$ *и все конечные секции подгруппы* A_1 *разрешимы*; 3) *все конечные секции подгрупп* A_1 *и* A_2 *нильпотентны. Тогда*: 1. *Все* Φ *— композиционные и все* Φ*-главные факторы группы* G *покрываются подгруппами* A_i. 2. G — π*-группа, локально конечная и локально разрешимая в случае, когда все* A_i *локально конечны*. 3. G — *разрешимая* π*-группа в случае, когда* $|\mathrm{I}| < \infty$ *и все* A_i *разрешимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим сначала следующие факты. Конечная группа, факторизуемая двумя нильпотентными подгруппами взаимно простых порядков, разрешима [9]. Конечная $3'$-группа, факторизуемая двумя разрешимыми подгруппами, разрешима [10]. У конечной группы X, обладающей нильпотентной холловой $\{2, 3\}$-подгруппой, произвольный неабелев композиционный фактор является $3'$-группой. Последнее утверждение вытекает из классификации Дж. Глаубермана конечных простых S_3-свободных групп (т. е. конечных простых групп без секций, изоморфных симметрической группе степени 3) (см. [11], следствие 7.3). Действительно, можно ограничиться случаем неабелевой простой группы X. Группа X — S_3-свободна. В самом деле, если X имеет секцию $\simeq S_3$, то, как легко убедиться, она обладает и ненильпотентной $\{2, 3\}$-группой. Но последняя ввиду [9] должна быть сопряжена в X с подгруппой ее холловой $\{2, 3\}$-подгруппы, что невозможно. Поэтому $X \simeq \mathbf{PSL}_2(3^{2n+1})$ или $X \simeq \mathbf{Sz}(2^{2n+1})$. Из описания собственных подгрупп группы $\mathbf{PSL}_2(q)$ (Л. Диксон — см., например, [12], § 1) вытекает, что она имеет ненильпотентную $\{2, 3\}$-подгруппу. Следовательно, $X \simeq \simeq \mathbf{Sz}(2^{2n+1})$ и, значит, X — $3'$-группа. Используя отмеченные выше результаты, утверждение 1 из предложения 1 настоящей работы и утверждение 1 леммы 3.2 из [7], убеждаемся в том, что каждая подгруппа $A_i A_j$ обладает рядом типа (ij). Поэтому утверждение 1 предложения 2 справедливо ввиду утверждения 5 из предложения 1. Утверждение 2 предложения 2 вытекает из его утверждения 1, утверждения 2 предложения 1 и теоремы Фейта — Томпсона. Утверждение 3 предложения 2 вытекает из утверждения 2 и утверждения 1 теоремы 5 из [1].

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть каждая подгруппа* $A_i A_j$ *группы* G *обладает рядом типа* $(\widetilde{ij})$ *и выполняется хотя бы одно из условий*: 1) $|A_1 : O(A_1)| < \infty$; 2) $|A_i : O_{3'}(A_i)| < \infty$, $i = 1, 2$, *и у* $O_{3'}(A_1)$ *все конечные секции разрешимы*; 3) A_i, $i = 1, 2$, *имеет подгруппу конечного индекса, у которой все конечные секции нильпотентны. Тогда*: 1. *Группа* G *обладает* Φ*-допустимой подгруппой* H, *разложимой в произведение попарно перестановочных подгрупп* $H \cap A_i$, $i \in \mathrm{I}$, *такой, что* $H \trianglelefteq G$, $|G : H| < \infty$, *все ее* Φ*-главные факторы покрываются подгруппами* $H \cap A_i$ *и каждый ее конечный* Φ*-главный фактор является элементарным абелевым*. 2. G — π*-группа, локально конечная и почти локально разрешимая в случае, когда все* A_i *локально конечны*. 3. G — *почти разрешимая* π*-группа в случае, когда* $|\mathrm{I}| < \infty$ *и все* A_i *почти разрешимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим подгруппы $A^*_i \subseteq A_i$, $i = 1, 2$, следующим образом: в случае 1) $A^*_1 = O(A_1)$ и $A^*_2 = A_2$; в случае 2) $A^*_i = O_{3'}(A_i)$, $i = 1, 2$; в случае 3) A^*_i, $i = 1, 2$, — такая, что $A^*_i \trianglelefteq Ai$, $|A_i : A^*_i| < \infty$ и все ее конечные секции нильпотентны.

Покажем сначала, что если G — периодическая и пересечение всех ее инвариантных Ф-допустимых подгрупп конечного индекса равно единице, то она обладает Ф-допустимой подгруппой H, удовлетворяющей всем требованиям утверждения 1 доказываемого предложения, кроме, быть может, предпоследнего, и такой, что все ее конечные Ф-главные факторы покрываются подгруппами $H \cap A_i$.

Пусть H — такая Ф-допустимая подгруппа группы G, что $H \trianglelefteq G$, $|G:H| < \infty$ и для любой H^* с теми же свойствами $\sum_{i=1}^{2} |A_i : A_i^* (H \cap A_i)| \leqslant \leqslant \sum_{i=1}^{2} |A_i : A_i^* (H^* \cap A_i)|$. Тогда если $H^* \subseteq H$, то, очевидно, $H \cap A_i = = (H^* \cap A_i)(H \cap A_i^*)$, $i = 1, 2$, и, значит, $(H \cap A_i)/(H^* \cap A_i) \simeq (H \cap A_i^*)/(H^* \cap A_i^*)$, $i = 1, 2$. Таким образом, $H \cap A_i$ аппроксимируется некоторыми конечными фактор-группами группы $H \cap A_i^*$. Поэтому в случае 1) $H \cap A_1$ — $2'$-группа, в случае 2) $H \cap A_i$, $i = 1, 2$, — $3'$-группы, причем у $H \cap A_1$ все конечные секции разрешимы.

В случае 3) $H \cap A_i$, $i = 1, 2$, аппроксимируется нильпотентными группами. Поэтому она, как легко видеть, является S-группой и, значит, все ее конечные секции нильпотентны. Так как G периодическая и, очевидно, $\pi (A_i) \cap \pi (\langle \bigcup_{j \neq i} A_j \rangle) = \varnothing$, $i \in \mathrm{I}$, то ввиду предложения 3.3 из [7] H является произведением попарно перестановочных подгрупп $H \cap A_i$, $i \in \mathrm{I}$, и ее конечный Ф-главный фактор разложим в произведение попарно перестановочных подгрупп, изоморфных секциям некоторых попарно различных подгрупп $H \cap A_i$. Поэтому ввиду предложения 2 этот фактор изоморфен секции одной из подгрупп $H \cap A_i$. Следовательно, он разрешим, в силу чего является элементарной абелевой группой и, значит, ввиду предложения 3.3 из [7] покрывается одной из подгрупп $H \cap A_i$.

Покажем теперь, что каждая подгруппа $A_1 A_j$ имеет подгруппу конечного индекса, обладающую рядом типа (ij). Ввиду леммы 2 из [1] $A_1 A_j$ обладает возрастающим нормальным рядом, произвольный фактор которого — π_1-, или π_j-, или конечная простая группа.

Учтем, далее, следующие утверждения. Пусть X — группа, Y — субинвариантная ее подгруппа. Тогда: если Y периодическая, то и подгруппа $\langle Y^X \rangle$ периодическая, причем $\pi (Y) = \pi (\langle Y^X \rangle)$; если Y — простая неабелева, то $\langle Y^X \rangle$ — прямое произведение всех Y^x, $x \in X$. Эти утверждения вытекают из предложений 1.2 соответственно § 2 и § 3 гл. 5 книги [13].

Теперь нетрудно убедиться в том, что $A_1 A_j$ обладает возрастающим инвариантным рядом, произвольный фактор которого — π_i- или π_i-группа или прямое произведение изоморфных конечных простых групп.

Произвольный фактор третьего типа указанного возрастающего ряда группы $A_1 A_j$ конечен. Действительно, ввиду утверждения 1 леммы 3.2 из [7] он разложим в произведение двух подгрупп, изоморфных секциям соответственно групп A_1 и A_j. Так как, очевидно, все композиционные секции любой его инвариантной подгруппы неабелевы, то ввиду доказанного выше он конечен.

Пусть теперь B — пересечение централизаторов в $A_1 A_j$ всех конечных факторов ряда, если такие есть, и $B = A_1 A_j$ — в ином случае. Тогда B, очевидно, обладает рядом типа (ij). Фактор-группа $A_1 A_j / B$ финитно аппроксимируема и потому в силу доказанного выше имеет подгруппу C/B такую, что $C/B \leqslant A_1 A_j / B$, $| A_1 A_j / B : C/B | < \infty$ и все ее конечные композиционные факторы имеют простые порядки. Далее, C/B обладает возрастающим нормальным рядом, произвольный фактор которого — π_i-, или π_j-, или конечная простая группа. Поэтому C/B и, вместе с тем, C обладает рядом типа (ij).

Пусть L — пересечение централизаторов в G всех ее конечных Ф-главных факторов и H / L — подгруппа, обладающая теми же свойствами относительно факторизации группы G / L подгруппами $A_i L / L$, $i \in \mathrm{I}$, что и H относительно факторизации группы G в рассмотренном в начале доказательства случае. Тогда ввиду предложений 3.3 из [7] и 1 H факторизуется попарно перестановочными подгруппами $H \cap A_i$, $i \in \mathrm{I}$. Так как, очевидно, все конечные Ф-главные факторы подгруппы L абелевы, то все конечные Ф-главные факторы группы H элементарные абелевы. Поэтому ввиду утверждения 4 предложения 1 все Ф-главные факторы H покрываются подгруппами $H \cap A_i$. Утверждение 1 доказано. Далее ввиду доказанного подгруппы A_iA_j, $i \in \mathrm{I}$, $j \in \mathrm{I}$, удовлетворяют тем же условиям, что и в предположении 1. Если все подгруппы A_i локально конечны, то, используя теорему Фейта — Томпсона и утверждений 1, нетрудно убедиться в том, что все Ф-главные факторы подгруппы H локально разрешимы. Поэтому справедливость утверждения 2 с учетом конечности $|G:H|$ вытекает из утверждения 2 предложения 1. Справедливость утверждения 3 доказываемого предложения вытекает из его утверждения 2 и теоремы 5 из [1].

Лемма. *Пусть σ и τ — множества простых чисел такие, что $\sigma \cap \cap \tau = \varnothing$; $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ и $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau_1 \cap \tau_2 = \varnothing$. Далее, пусть $H = KL$ — группа, обладающая возрастающим нормальным рядом, каждый фактор которого σ- или τ-замкнут; $K = K_1 \times K_2$, $L = L_1 \times L_2$, K_i — σ_i-группы и L_i — τ_i-группы, $i = 1, 2$. Тогда $K_1L_1 = L_1K_1$.*

Доказательство. Пусть φ — естественный гомоморфизм H на $H/O_{\sigma_1\cup\tau}(H)$. Ввиду леммы 1 [1] $O_\sigma(H^\varphi) = (O_\sigma(H^\varphi) \cap K_1^\varphi)(O_\sigma(H^\varphi) \cap K_2^\varphi) = O_{\sigma_2}(H^\varphi)$. Так как H^φ обладает таким же рядом, что и H, то с учетом очевидного соотношения $O_\sigma(H^\varphi)\,O_\tau(H^\varphi) = O_{\sigma_2}(H^\varphi)$ ввиду леммы 10 из [1] $C_{H^\varphi}(O_{\sigma_2}(H^\varphi)) \subseteq O_{\sigma_2}(H^\varphi)$. Поэтому $K_1^\varphi = 1^\varphi$, т. е. $K_1 \subseteq O_{\sigma_1\cup\tau}(H)$. Положим $\overline{H} = O_{\sigma_1\cup\tau}(H)\,L$. Тогда $\overline{H} = K_1L = LK_1$. Рассуждая, как и выше, убеждаемся, что $K_1L_1 = L_1K_1$.

Напомним, что группа, у которой по каждому простому p силовская p-подгруппа единственна, называется S-группой [5].

Предложение 4. *Пусть каждая подгруппа A_iA_j обладает рядом типа $(\tilde{ij})$ и каждая подгруппа A_i является S-группой. Тогда силовские p-подгруппы групп A_i, $i \in \mathrm{I}$, взятые по всем $p \in \pi$, попарно перестановочны и в произведении дают группу G.*

Доказательство. Действительно, все конечные секции подгрупп A_1 и A_2 нильпотентны. Поэтому каждая подгруппа A_iA_j обладает рядом типа (ij) (см. доказательство предложения 2) и ввиду леммы примарные силовские подгруппы групп A_iA_j, $i \in \mathrm{I}$, $j \in \mathrm{I}$, перестановочны.

Теорема 1. *Пусть все подгруппы A_iA_j, $i \in \mathrm{I}$, $j \in \mathrm{I}$, группы G обладают рядом одного из видов:* а) *возрастающий инвариантный ряд с S-факторами;* б) *конечный ряд вида* а); в) *возрастающий инвариантный ряд, имеющий конечный последний фактор, все остальные факторы которого — S-группы;* г) *конечный ряд вида* в). *Далее, пусть L и R — соответственно наибольшая инвариантная локально конечная подгруппа группы G и подгруппа, порожденная всеми ее инвариантными локально разрешимыми подгруппами. Тогда G является π-группой и справедливы следующие утверждения:* 1. *Если $|\mathrm{I}| < \infty$, то G обладает соответственно одним из рядов* а)— г), *причем таким, что каждый его S-фактор покрывается какой-нибудь подгруппой A_i.* 2. *Группа G локально конечна тогда и только тогда, когда все подгруппы A_i локально конечны.* 3. *Если группа G локально конечна и все подгруппы A_iA_j обладают рядом вида* а), *то она локально разрешима.* 4. *В случае, когда каждая подгруппа A_i — S-группа, силовские p-подгруппы A_i, взятые по всем $p \in \pi$, попарно перестановочны и дают в произведении всю группу G. Если в этом случае все подгруппы A_i локально конечны, то группа G локально разрешима.* 5. *Если $|\mathrm{I}| < \infty$, то группа G почти разрешима тогда и только тогда, когда все A_i почти разрешимы.* 6. *При любом множестве τ простых чисел, для которого каждая A_i является τ- или τ'-группой, произведение всех A_i с $\pi_i \subseteq \tau$ — силовская τ-подгруппа группы G; оно содержит подгруппу, сопряженную с произвольными конечными p- и σ-подгруппами, где $p \in \tau$ и $\sigma \subseteq \tau$, такими что $p \notin \pi(G/L)$ и $\sigma \cap \pi(G/R) = \varnothing$.*

Доказательство. Справедливость утверждений 1 и 2 и тот факт, что G — π-группа, вытекает из предложений 3 и 4 работы [1]. Справедливость утверждений 3 и 5 вытекает из предложения 5 работы [1]. Утверждение 4 вытекает из предложения 4 и утверждения 2 предложения 2 настоящей работы. Докажем утверждение 6. Так как $\langle \bigcup_i A_i | \pi_i \subseteq \tau \rangle$ и $\langle \bigcup_i A_i | \pi_i \subseteq \tau' \rangle$ — соответственно τ- и τ'-группы, то $\langle \bigcup_i A_i | \pi_i \subseteq \tau \rangle$ — силовская τ-подгруппа группы G ввиду леммы 2.12 из [8]. Далее, в силу произвольности τ для рассматриваемой факторизации группы G выполняются условия предложения 3.3 из [7]. Поэтому подгруппы L и R факторизуемы соответственно попарно перестановочными подгруппами $L \cap A_i$, $i \in \mathrm{I}$, и $R \cap A_i$, $i \in \mathrm{I}$. Тогда справедливость утверждения 6 относительно p- и σ-подгрупп вытекает из утверждений 3 и 4 предложения 2 работы [1].

Напомним, что A-группой называется периодическая группа, все примарные подгруппы которой абелевы.

Теорема 2. *Пусть* $|A_i : Z(A_i)| < \infty$, $i \in \mathrm{I}$, *и* R — *та же, что и в теореме* 1. *Тогда*: 1. *Группа* G *локально конечна, почти локально разрешима и если* $|\mathrm{I}| < \infty$, *то почти разрешима*. 2. *В случае, когда все* A_i *нильпотентны, силовские* p-*подгруппы групп* A_i, $i \in \mathrm{I}$, *взятые по всем* $p \in \pi$, *попарно перестановочны и группа* G *является их произведением*. 3. *В случае, когда все* A_i *абелевы,* G *является* A-*группой*. 4. *Для* G *справедливо утверждение* 6 *теоремы* 1 *с заменой в нем* L *на* G *и* p *на произвольное число из* π. 5. *Группа* G *локально разрешима, а если к тому же* $|\mathrm{I}| < \infty$, *то разрешима, в каждом из случаев*: 1) $2 \notin \pi_1$; 2) $3 \notin \pi_1 \cup \pi_2$ *и подгруппа* A_1 *разрешима*; 3) *подгруппы* A_1 *и* A_2 *нильпотентны*.

Доказательство. Так как $|A_i : Z(A_i)| < \infty$, $i \in \mathrm{I}$, то все подгруппы A_iA_j (см. [8], теорема 3.5) почти разрешимы. С учетом этого теорема 2 вытекает из теоремы 1 и предложения 3 настоящей работы.

Замечание 1. В п. 4 теоремы 2 из [4] утверждается также, что соответствующее произведение является и холловой подгруппой группы G. Это утверждение, вообще говоря, неверно, как показывает следующий пример.

Ниже $\langle X^n \rangle$ — подгруппа, порожденная n-ми степенями элементов группы X, $n \in \mathbb{N}$.

Пример. Пусть p, q и r — попарно различные простые числа, P — произвольная счетная абелева p-группа, Q — произвольная счетная абелева q-группа, обладающая автоморфизмом порядка p, $P*Q$ — свободное произведение групп P и Q, h — автоморфизм порядка p группы $P*Q$, действующий на P тождественно, а на Q — как какой-нибудь ее автоморфизм порядка p, $K = [P, Q]$, $G = ((P*Q) \leftthreetimes \langle h \rangle) / K' \langle K^r \rangle$ и $F = (P*Q) / K' \langle K^r \rangle$. Так как подгруппы P и Q счетны, то и группа G счетна. Отождествим P, Q и $\langle h \rangle$ с их каноническими образами в G. Положим $A_1 = K/K' \langle K^r \rangle$. Тогда A_1 — инвариантная элементарная абелева r-подгруппа группы G.

Пусть φ — естественный гомоморфизм G на G/A_1. Тогда $G^\varphi = (P \langle h \rangle)^\varphi Q^\varphi$, $(P \langle h \rangle)^\varphi$ — абелева силовская p-подгруппа группы G^φ и Q^φ — инвариантная абелева силовская q-подгруппа группы G^φ. Так как группа G счетна, подгруппа A_1 инвариантна в G, $\pi(A_1) \cap \pi(G/A_1) = \varnothing$ и хотя бы одна из групп A_1 и G/A_1 локально нормальна и локально разрешима (в рассматриваемом случае A_1 даже абелева), то найдется подгруппа D такая, что $G = A_1D$ и $A_1 \cap D = 1$ (Б. В. Казачков — см., например, [5, с. 508]).

Пусть $A_2 = D \cap A_1(P \langle h \rangle)$ и A_3 — силовская q-подгруппа группы D. Тогда A_1, A_2 и A_3 — попарно перестановочные абелевы силовские соответственно r-, p- и q-подгруппы группы G, последняя является их произведением, и A_1A_2 — силовская $\{r, p\}$-подгруппа группы G. Очевидно, $A_1A_2 = A_1P\langle h \rangle$. Покажем, что A_1A_2 не является холловой $\{r, p\}$-подгруппой группы G.

Пусть g — произвольный элемент из Q такой, что $[h, g] \neq 1$. Тогда $(P\langle h \rangle)^g$ — p-группа и $(P\langle h \rangle)^g \not\subseteq A_1A_2$. Действительно, иначе было бы: $h^g \in A_1A_2$ и $[h, g] = h^{-1}h^g \in A_1A_2 \cap Q_3 = 1$. Но P^g — силовская p-подгруппа группы A_1A_2. В самом деле, если это не так, то, очевидно, некоторый элемент ha с $a \in A_1P$ централизует подгруппу P^g. Тогда $P^g = P^{gha}$ и $P = P^{h[h,g^{-1}]gag^{-1}} = P^{[h,g^{-1}]gag^{-1}}$. Так как $[h, g^{-1}] \notin A_1P$, $A_1P \trianglelefteq G$ и $gag^{-1} \in A_1P$, то $q \mid |[h, g^{-1}]\, gag^{-1}|$. Следовательно, подгруппа, порожденная $[h, g^{-1}]\, gag^{-1}$, имеет элемент b порядка q. Очевидно, $b \in F$. Тогда, поскольку $b \in N_F(P)$, то $P\langle b\rangle$ — $\{p, q\}$-группа и $P\langle b\rangle \neq P$.

Таким образом, P не является силовской $\{p, q\}$-подгруппой группы F. Последнее ввиду бесконечности групп P и Q противоречит первой из теорем, приведенных во введении к книге [14] (основанной на результатах из [15]).

Итак, группа G разложима в произведение попарно перестановочных абелевых силовских соответственно r-, p- и q- подгрупп A_1, A_2 и A_3, но подгруппа A_1A_2 не является ее холловой $\{r, p\}$-подгруппой.

В доказательстве следующей теоремы используется классификация конечных простых групп.

Теорема 3. *Пусть все подгруппы A_i почти нильпотентны и почти локально нормальны, и каждая подгруппа A_iA_j локально ступенчатая. Тогда для группы G справедливы все утверждения теоремы* 2.

Доказательство с использованием теоремы 1 и предложения 3 сводится к установлению почти разрешимости произвольной локально ступенчатой группы $F = B_1B_2$ с почти нильпотентными почти локально нормальными множителями B_1 и B_2 такими, что $\pi(B_1) \cap \pi(B_2) = \varnothing$. Пусть H — подгруппа, порожденная всеми конечными инвариантными подгруппами множителей B_i, $i = 1, 2$. Очевидно, $|B_i : (H \cap B_i)| < \infty$, $i = 1, 2$. Поэтому $|F : H| < \infty$ (Б. Амберг — см. [8], лемма 1.17) и можно считать $F = H$. Пусть теперь $L_i \trianglelefteq B_i$, $|L_i| < \infty$, $i = 1, 2$, и $L = \langle L_1 \cap L_2\rangle$. Так как B_i, $i = 1, 2$, периодические и $\pi(B_1) \cap \pi(B_2) = \varnothing$, то $L = (L \cap B_1)(L \cap B_2)$ (см. [1], лемма 1). Если L бесконечна, то она имеет такую $K \trianglelefteq L$, что L/K обладает бесконечным убывающим инвариантным рядом с конечными факторами. Так как $(L \cap B_i)\, K/K$ — периодические почти S-группы и $\bigcap_{i=1,2} \pi((L \cap B_i)\, K/K) = \varnothing$, то ввиду предложения 6 из [1] и теоремы 5 из [1] L/K конечна. Противоречие. Ввиду произвольности L F локально конечна. Далее, для произвольного p любая конечная p-подгруппа группы F содержится в некоторой L. Поэтому с учетом соотношений $L = (L \cap B_1)(L \cap B_2)$ и $\bigcap_{i=1,2} \pi(L \cap B_i) = \varnothing$ она сопряжена с подгруппой одной из групп $L \cap B_i$, $i = 1, 2$. В силу этого ее ступень разрешимости, вместе с тем ступени разрешимости всех конечных p-секций группы F ограничены константой. Тогда, как вытекает из теоремы 4.8 [14] с учетом классификации конечных простых групп, F обладает нормальной системой с линейно представимыми факторами и, значит, ввиду предложения 6 из [1] и теоремы 5 из [1], почти разрешима.

Замечание 2. Отметим, что группа, представимая автоморфизмами конечнопорожденного унитального модуля над коммутативно-ассоциативным кольцом с единицей, разложимая в произведение двух (почти) локально нильпотентных подгрупп, (почти) гиперабелева [16], и гомоморфный образ периодической группы матриц над полем, разложимый в такое же произведение, является (почти) разрешимой группой (см. [7], теорема 2.7). Учитывая это и тот факт, что всякая периодическая группа автоморфизмов конечнопорожденного унитального модуля над коммутативно-ассоциативным кольцом с единицей локально конечна (см. [17], утверждение 13.35), убеждаемся в следующем. Предложение 4 останется в силе, если потребовать, чтобы каждая подгруппа A_iA_j обладала вместо ряда типа $(\widetilde{ij})$ рядом более широкого вида — возрастающим нормальным рядом, у которого произвольный фактор удовлетворяет хотя бы одному из условий: а) π_j- или $\pi_{j'}$-замкнут; б) представим автоморфизмами какого-либо конечнопорожденного унитального модуля над коммутативно-ассоциативным кольцом с единицей; в) изоморфен фактор-группе периодической линейной группы. Останутся в силе и предложения 1—3, если потребовать, чтобы таким рядом вместо ряда типа $(\widetilde{ij})$ обладала каждая подгруппа A_iA_j, множители которой удовлетворяют условию 3) из предложения 3.

Замечание 3. В [4] анонсированы пять теорем автора. Теоремы 1 и 4 из [4] с доказательствами приведены в [1]. В [8] отмечено, что теорема 1.7 [8] сохраняет силу при более слабых предположениях (см. примечание к теореме 1.7). Нетрудно убедиться в том, что теорема 1.7 при этих ослабленных предположениях, и следствие 1.32 [8] могут быть усилены, если наложить на подгруппы-множители вместо ограничения из [8] ограничение из теоремы 5 [4]. Теорема 5 из [4] — непосредственное следствие усиленных таким образом теоремы 1.7 и следствия 1.32 [8].

Замечание 4. Так как группа $\mathbf{Sz}\,(2^{2n+1})$ не обладает факторизацией двумя собственными подгруппами и всякая конечная неабелева простая $3'$-группа изоморфна $\mathbf{Sz}\,(2^{2n+1})$ [11], то утверждения 1 из предложений 2 и 3 сохраняют силу без дополнительных предположений относительно A_1 в случае условия 2.

1. *Черников Н. С.* Группы, факторизуемые перестановочными периодическими подгруппами без элементов одинаковых простых порядков // Исслед. групп с ограничениями для подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 98—117.
2. *Черников Н. С.* Факторизация бесконечных групп при условиях конечности // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 5.— С. 26—29.
3. *Черников Н. С.* Факторизационные свойства *А*-групп // XVIII Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. сообщ. (Минск, 14—17 сент. 1983 г.). — Минск : Ин-т математики АН БССР, 1983.— С. 215—216.
4. *Черников Н. С.* Бесконечные группы, разложимые в произведение попарно перестановочных подгрупп // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 11.— С. 24—27.
5. *Курош А. Г.* Теория групп: 3-е изд. доп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
6. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math.— 1963.— **13**, N 3.— P. 775—1029.
7. *Черников Н. С.* Факторизация линейных групп и групп, обладающих нормальной системой с линейными факторами // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 3.— С. 362—369.
8. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1987.— 206 с.
9. *Wielandt H.* Über Produkte von nilpotenten Gruppen // Ill J. Math.— 1958.— **2**, N 4B.— S. 611—618.
10. *Сыскин С. А.* Об одном вопросе Р. Бэра // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 3.— С. 679—688.
11. *Glauberman G.* Factorizations in local subgroups of finite groups // Reg. Conf., ser. math.— 1977.— N 33.— 74 p. (Amer. Math. Soc., Providence, 1977).
12. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы.— М. : Наука, 1968.— 112 с.
13. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем.— М. : Наука, 1966.— 604 с.
14. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups.— Amsterdam; Lonbon : North-Holland Publ. Co., 1973.— 210 p.
15. *Heineken H.* Maximale *p*-Untergruppen lokal-endlicher Gruppen // Arch. math.— 1972.— **23**.— S. 351—363.
16. *Черников Н. С.* Факторизации групп автоморфизмов конечноророжденного модуля над коммутативным кольцом // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 5.— С. 670—671.
17. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups.— Berlin etc. : Springer, 1973.— 229 p.

Получено 15.04.91