УДК 517.54

В. И Рязанов, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО МЕРЕ

The main result of the paper is a criterion for the mappings which are quasi-conformal in the mean to be compact. The semi-continuity of the deformation of Sobolev class homeomorphisms is also proved.

Основним результатом є критерій компактності відображень, квазіконформних в середньому. Доведена також напівнеперервність деформації гомеоморфізмів класу Соболєва.

Различные классы квазиконформных в среднем отображений изучались в работах Л. Альфорса, О. Лехто, И. Н. Песина, С. Л. Крушкаля, Р. Кюнау, В. А. Зорича и других авторов (см., например, [1–6]). Одним из основных достижений последнего времени в этой области стало доказательство Г. Давидом [7] теоремы существования и единственности для квазиконформных отображений с ограничениями по мере экспоненциального типа на большие значения деформации.

В п. 1 дается краткий комментарий и сравнительный анализ результатов Давида – Песина. П. 2 содержит основные определения и предварительные замечания, касающиеся гомеоморфизмов класса Соболева. В п. 3 доказывается полунепрерывность деформации этого класса гомеоморфизмов (теорема 1). Одним из следствий этого результата является обобщение теоремы сходимости К. Штребеля (следствие 5). Наконец, в п. 4 приведен критерий компактности отображений, квазиконформных в среднем, для подынтегральных функций с экспоненциальным ростом на бесконечности (теорема 2). Этот критерий усиливает теорему И. Н. Песина о замкнутости.

1. О результатах Давида – Песина. В работе Г. Давида [7] была получена теорема существования и единственности нормированных гомеоморфных решений уравнения Бельтрами с ограничениями на их комплексные характеристики μ вида

$$\operatorname{mes}\{z\colon |\mu(z)| > 1-\varepsilon\} \le Ce^{-\alpha/\varepsilon} \tag{1}$$

при любых $\varepsilon \le \varepsilon_0 \in (0, 1]$; $\alpha > 0$, $C > 0$. Там же были установлены равностепенная непрерывность и открытость таких гомеоморфизмов.

Соотношение (1) можно представить в эквивалентном виде

$$\operatorname{mes}\{z\colon p(z) > t\} \le C_0 e^{-\gamma t}, \tag{2}$$

где $t \ge T = -1 + 2/\varepsilon_0 \ge 1$; $\gamma = \alpha/2 > 0$, $c_0 = Ce^{-\gamma} > 0$; $p(z) = (1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|)$. Таким образом, результаты Давида переносятся на отображения, квазиконформные в среднем:

$$\iint \Phi(p(z))dx\,dy \le M \tag{3}$$

для функций Φ с экспоненциальным ростом на ∞:

$$\Phi(t) \ge \beta e^{\gamma t}, \quad t \ge T;\ \gamma > 0, \quad \beta > 0. \tag{4}$$

Отметим, что в более ранней работе И. Н. Песина [3] были сформулированы теоремы существования, равностепенной непрерывности и замкнутости классов с интегральными ограничениями вида

$$\iint e^{[p(z)]^{1+\delta}} dx\,dy \le M \tag{5}$$

для любого $\delta > 0$, т. е. И. Н. Песин весьма близко подошел к ограничениям вида (1) – (4). Кстати, в этой работе было замечено, что для любого $n = 1, 2, \dots$, ограничения вида

$$\iint p^n(z)\,dx\,dy \le M \tag{6}$$

не дают равностепенно непрерывных классов отображений (см. также [7]).

2. О гомеоморфизмах класса Соболева. Будем говорить, что гомеоморфизм f принадлежит классу Соболева, если $f \in W^1_{1,\,\mathrm{loc}}$. Функции f класса $W^1_{1,\,\mathrm{loc}}$ абсолютно непрерывны на линиях, $f \in ACL$, т. е. на почти всех горизонтальных и вертикальных линиях f абсолютно непрерывна по x и y соответственно. Такие функции f имеют почти всюду (п. в.) обычные частные производные f_x и f_y, которые п. в. совпадают с обобщенными (см., например, [8, с. 41] или [9, с. 31]).

Любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f, который п. в. имеет частные производные, удовлетворяет п. в. некоторому уравнению Бельтрами [10, с. 10]:

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z, \tag{7}$$

где

$$|\mu(z)| \le 1 \tag{8}$$

и, как обычно, $f_{\bar z} = (f_x + if_y)/2$, $f_z = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$. Полагая $\mu(z) = 0$ при $f_z = f_{\bar z} = 0$, устраняем связанную с этим случаем неопределенность. Функцию $\mu(z)$ принято называть комплексной характеристикой отображения f.

В силу знаменитой леммы Геринга — Лехто (см., например, [9, с. 28]) любой гомеоморфизм f, имеющий п. в. частные производные, является п. в. дифференцируемым:

$$\Delta f = f_z \Delta z + f_{\bar z}\,\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)\,. \tag{9}$$

Отметим, что в случае отсутствия гомеоморфности $f \in W^1_{\beta,\,\mathrm{loc}}$ имеет п. в. дифференциал, вообще говоря, только при $\beta > 2$ (см. [11], теорема 1.3). Доказательство этого факта базируется на известном критерии Радемахера — Степанова о дифференцируемости функции п. в.

В точках дифференцируемости существуют производные по любому направлению α:

$$\partial_\alpha f = f_z + f_{\bar z} e^{-2i\alpha}. \tag{10}$$

Как легко видеть,

$$\max_{\alpha\in[0,2\pi)} |\partial_\alpha f| = |f_z| + |f_{\bar z}|, \tag{11}$$

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi)} |\partial_\alpha f| = |f_z| - |f_{\bar z}|. \tag{12}$$

Поэтому величину

$$p(z) = (1 + |\mu(z)|)\,/\,(1 - |\mu(z)|) \tag{13}$$

принято именовать деформацией отображения f в точке z [12, с. 7].

Точка дифференцируемости называется регулярной точкой отображения f, если его якобиан в этой точке отличен от нуля:

$$J(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \ne 0. \tag{14}$$

Как известно, необходимым и достаточным условием того, что гомеоморфизм, имеющий хотя бы одну регулярную точку, сохраняет ориентацию, является положительность якобиана во всех регулярных точках [10, с. 10].

В каждой регулярной точке z бесконечно малый эллипс с отношением полуосей (13) и углом

$$\theta(z) = (1/2)\arg\mu(z) + \pi/2 \tag{15}$$

между большей осью и действительной осью переходит в бесконечно малую окружность (при $\mu(z) = 0$ полагаем для определенности $\theta(z) = \pi/2$). Величины $p(z)$ и $\theta(z)$ принято называть соответственно первой и второй характеристиками Лаврентьева, который в работе [13] впервые ввел для квазиконформных отображений термин "характеристики".

Условимся считать соотношения (13) и (15) определяющими для $p(z)$ и $\theta(z)$ и в нерегулярных точках дифференцируемости отображения f. Таким образом, если $f_z = f_{\bar z} = 0$, то $\mu(z) = 0$, $p(z) = 1$, $\theta(z) = \pi/2$. Если же $|f_z| = |f_{\bar z}| \neq 0$, то $|\mu(z)| = 1$ и $p(z) = \infty$ соответственно. Итак, по определению значения величины $p(z)$ лежат на отрезке $I = [1, \infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Заметим, наконец, что гомеоморфизмы f класса Соболева могут не быть абсолютно непрерывными и потому, вообще говоря,

$$\iint\limits_B J(z)dx\,dy \le S(f(B)), \tag{16}$$

где равенство может не достигаться на некоторых борелевских множествах B [10, с. 137]. Но это имеет место локально, если только $f \in W^1_{2,\mathrm{loc}}$ [10, с. 158].

3. О полунепрерывности деформации. Функцию $\Phi\colon I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ будем называть выпуклой, если для любых $t_1, t_2 \in I$, $\lambda \in [0, 1]$

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \le \lambda\Phi(t_1) + (1-\lambda)\Phi(t_2). \tag{17}$$

При этом условимся, что $0 \cdot \infty = 0$ (см., например, [14, с. 18]). Такая функция имеет характерную точку

$$Q = \inf_{\Phi(t)=\infty} t. \tag{18}$$

В силу (17) на интервале $[1, Q)$ эта функция является обычной (конечной) выпуклой функцией и $\Phi(t) \equiv \infty$ при $t > Q$. На интервале $(1, Q)$ она непрерывна [15, с. 60].

Теорема 1. *Пусть f и f_n, $n = 1, 2, \ldots$, — сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса Соболева и $f_n \to f$ при $n \to \infty$ локально равномерно. Тогда на любом открытом множестве Ω*

$$\iint\limits_\Omega \Phi(p(z))dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_\Omega \Phi(p_n(z))dx\,dy \tag{19}$$

для любой неубывающей выпуклой функции $\Phi\colon I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна слева в точке Q в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ и

$$\lim_{t\to\infty} (\Phi(t)/t) = \infty. \tag{20}$$

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *соотношение* (19) *выполняется для любой N-функции. Таким образом, если деформации $p_n(z)$ принадлежат классу Орлича $L_\Phi(\Omega)$ равномерно относительно $n = 1, 2, \ldots$, то деформация $p(z)$ также принадлежит этому классу.*

Напомним, что функция $\Phi\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ называется N-функцией, если она строго возрастает, выпукла, четна, удовлетворяет (20) и

$$\lim_{t\to 0} (\Phi(t) / t) = 0. \tag{21}$$

Здесь мы доопределяем $\Phi(\infty) = \infty$. Функция $\Psi(z)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Орлича $L_\Phi(\Omega)$, если (см. [16, с. 16 – 19, 76])

$$\iint_\Omega \Phi(\Psi(z))dx\,dy \le M < \infty. \tag{22}$$

***Следствие* 2.** *Для любого* $\alpha > 1$

$$\iint_\Omega p^\alpha(z)dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint_\Omega p_n^\alpha(z)dx\,dy. \tag{23}$$

***Следствие* 3.** *Для любого* $\gamma > 0$

$$\iint_\Omega e^{\gamma p(z)}dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint_\Omega e^{\gamma p_n(z)}dx\,dy. \tag{24}$$

***Следствие* 4.** *Пусть функция* $p_0(z)\colon \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ *такова, что* $p_0(z) - 1$ *принадлежит некоторому классу Орлича* $L_\varphi(\Omega)$. *Если*

$$p_n(z) \le p_0(z), \ n = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

то

$$p(z) \le \limsup_{n\to\infty} p_n(z). \tag{26}$$

Этот факт следует из (19) для $\Phi(t) = \varphi(t-1)$, $t \in I = [1, \infty]$. Действительно, по теореме Лебега о почленном интегрировании [14, с. 50]:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \iint_E \Phi(p_n(z))dx\,dy \le \iint_E \varlimsup_{n\to\infty} \Phi(p_n(z))dx\,dy$$

и из (19) получаем

$$\iint_E \Phi(p\ (z))dx\,dy \le \iint_E \Phi(\varlimsup_{n\to\infty} p_n(z))dx\,dy$$

для любого открытого подмножества $E \subseteq \Omega$. Согласно теореме о дифференцировании неопределенного интеграла [14, с. 180] имеем

$$\Phi(p\ (z)) \le \Phi(\varlimsup_{n\to\infty} p_n(z))$$

для п. в. $z \in \Omega$. Отсюда получаем (26).

***Следствие* 5.** *Пусть функция* $p_0(z)\colon \mathbb{C} \to I$ *локально суммируема и* $p_n(z) \le$ $\le p_0(z)$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда п. в. выполняется неравенство* (26). *В частности, отсюда следует, что деформация* $p(z)$ *предельного отображения* $f(z)$ *также локально суммируема.*

Последнее следствие получается из предыдущего, если учесть, что каждая суммируемая на каком-либо круге Ω функция $\Psi(z)$ принадлежит некоторому классу Орлича $L_\varphi(\Omega)$ [16, с. 76 – 77].

Неравенство (26) хорошо известно в теории квазиконформных отображений. Оно было доказано К. Штребелем [17] в предположении, что п. в.

$$p_n(z) \le K < \infty, \ n = 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Как видим, здесь неравенство Штребеля обобщается на деформации с локально суммируемой мажорантой.

Для приложений теоремы 1 будет также полезен следующий факт.

Предложение 1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1, *кроме одного,* *что* $f \in W^1_{1,\,\mathrm{loc}}$. *Если при этом деформации* $p_n(z)$ *локально суммируемы равномерно относительно* $n = 1, 2, \ldots$, *то* $f \in W^1_{1,\,\mathrm{loc}}$ *и* $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\bar z} \to f_{\bar z}$ *при* $n \to \infty$ *слабо в* $L_{1,\,\mathrm{loc}}$. *В частности, это выполнено, когда* $p_n(z)$ *имеют локально суммируемую мажоранту.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что нормы $\|(f_n)_z\|_{L_1(\Omega)}$ ограничены в совокупности для любого достаточно малого круга Ω [18, с. 250]. Действительно, согласно неравенству Шварца [19, с. 161]

$$\left(\iint\limits_{\Omega} |(f_n)_z|\,dx\,dy\right)^2 \le \iint\limits_{\Omega} J_n(z)\,dx\,dy \iint\limits_{\Omega} p_n(z)\,dx\,dy,$$

а в силу (16)

$$\limsup_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} J_n(z)\,dx\,dy \le S(f(\Omega')),$$

где $\overline{\Omega} \subseteq \Omega'$ — любой круг большего радиуса. Ввиду равномерной локальной суммируемости $p_n(z)$ получаем нужную оценку норм.

***Замечание* 1.** В частности, если $\Phi(p_n(z))$ локально суммируемы равномерно относительно $n = 1, 2, \ldots$ для некоторой неубывающей выпуклой функции $\Phi\colon I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $\Phi \not\equiv \mathrm{const}$, то $p_n(z)$ также локально суммируемы равномерно относительно $n = 1, 2, \ldots$.

Действительно, для такой функции при $t > T$: $t / \Phi(t) < C < \infty$ [15, с. 63; 16, с. 15]. Поэтому если на некотором ограниченном открытом множестве Ω

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(z))\,dx\,dy \le M < \infty,$$

то

$$\iint\limits_{\Omega} p_n(z)\,dx\,dy < CM + T \operatorname{mes} \Omega.$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме и следствиях из нее.

***Лемма* 1.** *В условиях теоремы* 1 *п. в.*

$$p(z) \le \varliminf_{h\to\infty} \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta)\,d\xi d\eta, \tag{28}$$

где $K(z; h)$ *— квадрат с центром в точке* z *и длиной стороны* h, *одна из сторон которого повернута под углом* $\theta(z)$ ($\theta(z)$ *— вторая характеристика Лаврентьева отображения* f *в точке* z). *Неравенство* (28) *выполняется по крайней мере во всех точках дифференцируемости отображения* f.

***Следствие* 6.** *В условиях и обозначениях леммы* 1 *п. в.*

$$\Phi(p(z)) \le \varliminf_{h\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} \Phi(p_n(\zeta))\,d\xi d\eta \tag{29}$$

для любой неубывающей выпуклой функции $\Phi\colon I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, *которая непрерывна слева в точке* Q *из* (18).

***Следствие* 7.** *Пусть в условиях и обозначениях предыдущего следствия* $\Phi \not\equiv \mathrm{const}$ *и*

$$\liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(\zeta))\,d\xi d\eta = M < \infty \tag{30}$$

на некотором открытом множестве Ω. *Тогда функция* $p(z)$ *п. в. конечна на* Ω *и* $p(z) \le Q$ *п. в.*

В дальнейшем используется интегральное неравенство Иенсена для выпуклых функций $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi\Big(\int t\,d\nu(t)\Big) \le \int \varphi(t)\,d\nu(t), \tag{31}$$

где ν — произвольная вероятностная борелевская мера на $\mathbb{R}$. Эта формула естественным образом распространяется на выпуклые функции $\varphi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$. Далее, если $g(z)\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — произвольная измеримая по Лебегу функция, а $E \subseteq \mathbb{C}$ — измеримое множество с $0 < \operatorname{mes} E < \infty$, то отсюда по известной теореме о замене переменной [20, с. 161] получаем неравенство

$$\varphi\left(\frac{1}{\operatorname{mes}}\iint\limits_E g(z)\,dx\,dy\right) \le \frac{1}{\operatorname{mes} E}\iint\limits_E \varphi(g(z))\,dx\,dy, \tag{32}$$

которое также принято называть интегральным неравенством Иенсена (см., например, [16, с. 78]).

Приведем еще одну лемму, которая фактически является переформулировкой леммы Фату [14, с. 50] для рядов.

Лемма 2. *Пусть* $a_{mn} \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots$, — *двойная последовательность неотрицательных чисел. Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} a_{mn} \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{33}$$

Действительно, случай рядов редуцируется к интегральному случаю введением последовательности ступенчатых функций $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, заданных на отрезке $[0, 1]$:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2a_{1n}, \ 0 \le t < 1/2, \\ 4a_{2n}, 1/2 \le t < 1/2 + 1/4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2^m a_{m,n}, 1/2+\ldots+1/2^{m-1} \le t < 1/2+\ldots+1/2^m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Как легко видеть,

$$\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$

и

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} \varphi_n(t)\,dt = \sum_{m=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} a_{mn}.$$

Таким образом, согласно теореме Фату получаем (33).

***Доказательство леммы* 1.** Итак, пусть $\varphi(z; dz) = f_z\,dz + f_{\bar z}\,d\bar z$ и $\varphi_n(z; dz) = (f_n)_z\,dz + (f_n)_{\bar z}\,d\bar z$, $z \in E$, $dz \in \mathbb{C}$, где E — множество всех точек дифференцируемости f и f_n, $n = 1, 2, \ldots$, в которых $|f_z| + |f_{\bar z}| > 0$. Отметим, что если $|f_z| = |f_{\bar z}| = 0$, то $p(z) = 1$ и неравенство (28) автоматически выполняется.

По определению дифференциала в каждой точке $z \in E$ для любого $\varepsilon > 0$ при $h < \delta = \delta(\varepsilon, z)$ и всех $\zeta \in K(z; h)$:

$$|f(\zeta)-f(z)-\varphi(z;\zeta-z)| < h\varepsilon$$

и при $n > N = N(h)$:

$$|f_n(\zeta)-f(z)-\varphi(z;\zeta-z)| < h\varepsilon \tag{34}$$

т. е. $f_n(\zeta)$ находится в прямоугольнике с центром в точке $f(z)$ и длинами сторон $(|f_z|+|f_{\bar z}|+2\varepsilon)h$ и $(|f_z|-|f_{\bar z}|+2\varepsilon)h$ соответственно. Таким образом, площадь образов квадратов $f_n(K(z;h))$ при $n > N$ не превышает $(|f_z|+|f_{\bar z}|+2\varepsilon)\cdot(|f_z|-|f_{\bar z}|+2\varepsilon)\cdot h^2$. В силу неравенства (16) отсюда при $h<\delta(\varepsilon, z)$ и $n > N(h)$ имеем

$$\iint\limits_{K(z;h)} J_n(\zeta)d\xi d\eta \le [J(z)+4\varepsilon(|f_z|+\varepsilon)]h^2. \tag{35}$$

Обозначим через $l_n(v)$, $-h/2 \le v \le h/2$, длину образа отрезка из квадрата $K(z;h)$ при отображении f_n, заданного параметрически $z+ie^{i\theta(z)}(u+iv)$, $-h/2\le u\le h/2$, где $\theta(z)$ — вторая характеристика Лаврентьева отображения f в точке z. Поскольку $f_n \in ACL$, $n=1,2,\ldots$, то для п. в. $v\in[-h/2, h/2]$ и всех $n=1,2,\ldots$

$$l_n(v) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} |\varphi_n(z+ie^{i\theta(z)}(u+iv); ie^{i\theta(z)})|du.$$

В силу (34) имеем оценку снизу

$$l_n(v) = |\varphi(z; ihe^{i\theta(z)})| - 2h\varepsilon = (|f_z|+|f_{\bar z}|-2\varepsilon)h.$$

Интегрируя последнее неравенство по v, из теоремы Фубини [14, с. 120] получаем

$$\iint\limits_{K(z;h)} |\varphi_n(\zeta; ie^{i\theta(z)})|d\xi d\eta \ge (|f_z|+|f_{\bar z}|-2\varepsilon)h^2.$$

Отсюда в силу неравенства Шварца имеем

$$(|f_z|+|f_{\bar z}|-2\varepsilon)^2h^4 \le \iint\limits_{K(z;h)} J_n(\zeta)d\xi d\eta \iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta)d\xi d\eta.$$

Таким образом, в силу (35)

$$\frac{(|f_z|+|f_{\bar z}|-2\varepsilon)^2}{J(z)+4\varepsilon(|f_z|+\varepsilon)} \le \frac{1}{h^2}\iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta)d\xi d\eta.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу сначала по $n\to\infty$, затем по $h\to\to 0$ и, наконец, по $\varepsilon\to 0$, получаем неравенство (28).

***Доказательство следствия* 6.** Если предел справа в (29) бесконечен, то справедливость его очевидна. Если же он конечен, то предел справа в (28) не превышает величину Q из (18). Поэтому для п. в. точек z, в которых выполняется (28),

$$\Phi(p(z)) \le \varliminf_{h\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\Phi\left(\frac{1}{h^2}\iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta)d\xi d\eta\right),$$

и, используя неравенство (32), получаем (29).

***Доказательство следствия* 7.** Из следствия 6 при п. в. $z\in\Omega$ для любого $\varepsilon>0$ и любого $h<\delta=\delta(\varepsilon,z)$ получаем

$$\Phi(p(z)) < M / h^2 + \varepsilon < \infty.$$

Следовательно, $p(z) \le Q$ для п. в. $z \in \Omega$. Если $Q = \infty$, то $\Phi(Q) = \infty$, поскольку $\Phi \not\equiv \mathrm{const}$. Но тогда $p(z) < Q = \infty$ п. в. Если $Q < \infty$, то тем более $p(z) < \infty$ п. в.

***Доказательство теоремы* 1.** Если правая часть в (19) бесконечна, то доказывать нечего. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что выполняется условие (30).

1. При $\Phi(Q) < \infty$ функция $\Phi(p(z))$ согласно следствию 7 локально суммируема в Ω. Тогда по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла [14, с. 180] п. в.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} \Phi(p(\zeta))d\xi d\eta = \Phi(p(z))$$

и согласно следствию 6 выполняется (29) для $z \in E$, где $\operatorname{mes} \Omega \setminus E = 0$. Таким образом, в каждой точке $z \in E$ для любого $\varepsilon > 0$ при $h < \delta = \delta(\varepsilon, z)$

$$\iint\limits_{K(z;h)} \Phi(p(\zeta))d\xi d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{K(z;h)} \Phi(p_n(\zeta))d\xi d\eta + \varepsilon h^2,$$

где $K(z; h) \subseteq \Omega$ взято из леммы 1.

Система квадратов $K(z; h)$, $z \in E$, $h < \delta = \delta(\varepsilon, z)$, образует покрытие множества E в смысле Витали и по теореме Витали [14, с. 167] можно выбрать не более чем счетную последовательность непересекающихся квадратов $E_m = K(z_m; h_m)$ из указанного покрытия такую, что $|E \setminus \bigcup E_m| = 0$. По построению $E_m \subseteq \Omega$ и, следовательно, $\operatorname{mes} \Omega \Delta \bigcup E_m = 0$, $\operatorname{mes} \Omega = \Sigma \operatorname{mes} E_m$.

Из счетной аддитивности интеграла [14, с. 49], а также леммы 2 применительно к

$$a_{mn} = \iint\limits_{E_m} \Phi(p_n(\zeta))\, d\xi d\eta, \quad m, n = 1, 2, \dots ,$$

получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(p(\zeta))\, d\xi d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(\zeta))\, d\xi d\eta + \varepsilon \operatorname{mes} \Omega,$$

и в силу произвола $\varepsilon > 0$ приходим к (19) для ограниченных Ω.

2. При $\Phi(Q) = \infty$ найдется монотонно возрастающая последовательность $t_m \in (1, Q)$, $m = 1, 2, \dots$, такая, что $t_m \to Q$ при $m \to \infty$ и $\Phi(t)$ дифференцируема в каждой точке t_m, $\Phi'(t_m) > 0$ [15, с. 61]. Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$\Phi_m(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \le t_m; \\ \Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(t - t_m), & t \ge t_m, \end{cases}$$

и

$$\varphi_m(\tau) = \begin{cases} \tau, & \tau \le \Phi(t_m); \\ \Phi(\alpha_m + \beta_m \tau), & \tau \ge \Phi(t_m), \end{cases}$$

где коэффициенты

$$\alpha_m = t_m - \Phi(t_m) / \Phi'(t_m), \quad \beta_m = 1 / \Phi'(t_m)$$

находятся из условия

$$\alpha_m + \beta_m[\Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(t - t_m)] \equiv t$$

и, таким образом, по построению

$$\varphi_m(\Phi_m(t)) \equiv \Phi(t), \; m = 1, 2, \ldots . \tag{36}$$

Как легко видеть, все функции Φ_m и φ_m являются выпуклыми и неубывающими [15, с. 63] и в силу (20)

$$\lim_{\tau \to \infty} \varphi_m(\tau)\tau^{-1} = \infty. \tag{37}$$

Кроме того, последовательность Φ_m монотонно возрастает и стремится к Φ при $m \to \infty$.

Легко доказать суммируемость функций $\Phi_m(p(z))$, $m = 1, 2, \ldots$, для ограниченных Ω. Действительно, в силу (30), (32) и (36) для любого $E \subseteq \Omega$ с $\operatorname{mes} E > 0$ имеем

$$\varphi_m\left(\frac{1}{\operatorname{mes} E}\iint_E \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi d\eta\right) \le \frac{M}{\operatorname{mes} E} < \infty. \tag{38}$$

Если $Q < \infty$, то отсюда получаем

$$\frac{1}{\operatorname{mes} E}\iint_E \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi d\eta \le Q_m = \Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(Q - t_m)$$

и по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла [14, с. 180] $\Phi_m(p_n(z)) \le Q_m$, $m, n = 1, 2, \ldots$, для п. в. $z \in \Omega$. Таким образом, в силу следствия 6 имеем $\Phi_m(p(z)) \le Q_m$ и суммируемость $\Phi_m(p(z))$ становится очевидной.

Если $Q = \infty$, то в силу (37), (38)

$$\iint_E \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi d\eta \le M(\tau / \varphi_m(\tau)) \to 0,$$

где $\tau = \varphi_m^{-1}(M / \operatorname{mes} E) \to \infty$ при $\operatorname{mes} E \to 0$. Кроме того,

$$\| \Phi_m(p_n) \|_{L_1(\Omega)} \le \operatorname{mes} \Omega \varphi_m^{-1}(M / \operatorname{mes} \Omega).$$

Таким образом, последовательность $\Phi_m(p_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, слабо компактна в $L_1(\Omega)$ [21, с. 317, 377]. Поэтому можно считать, что $\Phi_m(p_n) \to \Psi_m \in L_1(\Omega)$ слабо в $L_1(\Omega)$ при $n \to \infty$. По следствию 6 и теореме о дифференцировании неопределенного интеграла $\Phi_m(p(z)) \le \Psi_m(z)$ для п. в. $z \in \Omega$ и, следовательно, $\Phi_m(p) \in L_1(\Omega)$.

Поэтому, в точности повторяя рассуждения первого пункта доказательства применительно к каждой из функций Φ_m, $m = 1, 2, \ldots$, имеем

$$\iint_\Omega \Phi_m(p(\zeta))d\xi d\eta \le \liminf_{n \to \infty} \iint_\Omega \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi d\eta.$$

По теореме Лебега об интегрировании монотонной последовательности функций [14, с. 48]

$$\lim_{m \to \infty} \iint_\Omega \Phi_m(p(\zeta))d\xi d\eta = \iint_\Omega \Phi(p(\zeta))d\xi d\eta,$$

$$\lim_{m \to \infty} \iint_\Omega \Phi_m(p_n(\zeta))d\xi d\eta = \iint_\Omega \Phi(p_n(\zeta))d\xi d\eta.$$

Остается только заметить, что двойная последовательность чисел

$$a_{mn} = \iint\limits_{\Omega} \Phi_m(p_n(\zeta))\, d\xi d\eta$$

монотонно возрастает по m и потому

$$\lim_{m\to\infty} \varliminf_{n\to\infty} a_{mn} \le \varliminf_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn}. \tag{39}$$

Отсюда следует соотношение (19) в случае ограниченных Ω.

Наконец, рассматривая последовательность множеств $\Omega_m = \{z \in \Omega: |z| < < m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, исчерпывающую множество Ω, и применяя неравенство (39) к другой двойной последовательности

$$a_{mn} = \iint\limits_{\Omega_m} \Phi(p_n(\zeta)) d\xi d\eta = \iint\limits_{\Omega} \chi_m(\zeta)\Phi(p_n(\zeta)) d\xi d\eta,$$

по упомянутой теореме Лебега получаем (19) в общем случае.

4. Критерий компактности. Обозначим через H совокупность всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов f плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя класса Соболева с нормировками $f(0) = 0, f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$, а через H^{Φ} — его подкласс, выделяемый интегральными ограничениями на деформацию $p(z)$ вида

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))\, dxdy \le 1, \tag{40}$$

где $\Phi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — произвольная функция, $I = [1, \infty]$.

Теорема 2. *Пусть функция* $\Phi(t)$ *имеет экспоненциальный рост на* ∞ *и* $\inf \Phi = 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) H^{Φ} *секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости;*

2) Φ *не убывает, выпукла и непрерывна слева в точке Q из* (18) *в смысле* $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Отметим, что условие $\inf \Phi = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы класс H^{Φ} был не пуст.

Доказательство теоремы 2. 2) $\to$ 1) непосредственно следует из теоремы 1, предложения 1, замечания 1, а также локально равностепенной ограниченности, непрерывности и открытости H^{Φ} [7, с. 27], теоремы Арцела – Асколи [21, с. 289].

1) $\to$ 2). При $Q < \infty$ и $\Phi(Q) < \infty$ это следует непосредственно из ранее полученных результатов [22, с. 26], поскольку согласно следствию 7 в этом случае мы имеем дело с Q-квазиконформными отображениями и с ограниченной функцией Φ на отрезке $[1, Q]$.

В силу условия экспоненциального роста (4) ситуация, когда $Q = \infty$, а $\Phi(Q) < \infty$, исключена. Поэтому остается рассмотреть случай, когда $\Phi(Q) = \infty$. Итак, пусть Q_m, $m = 1, 2, \ldots$, — монотонно возрастающая последовательность чисел из $[1, Q]$, которая стремится к Q при $m \to \infty$. Рассматривая подклассы Q_m-квазиконформных отображений из H^{Φ}, заключаем, что нарушение указанных свойств функции Φ невозможно ни на одном из отрезков $[1, Q_m]$, $m = 1, 2, \ldots$, а потому и на $[1, Q]$ [22, с. 29; 23, с. 90].

Поэтому остается только показать, что $\Phi(t) \to \infty$ при $t \to Q$ слева. Но если это не так, то $\Phi(t) \le C < \infty$ для всех $t \in [1, Q)$. При $Q = \infty$ последнее невозможно в силу условия экспоненциального роста. При $Q < \infty$ H^{Φ} — подкласс

Q-квазиконформных отображений. В частности, этому подклассу принадлежит последовательность отображений f_m с комплексными характеристиками

$$\mu_m(z) = \begin{cases} q_m, & |z| \le 1/\sqrt{\pi c}; \\ 0, & |z| > 1/\sqrt{\pi c}, \end{cases}$$

где $q_m = (Q_m - 1) / (Q_m + 1)$, $m = 1, 2, \ldots$. Однако, по построению $\mu_m(z) \to \mu(z)$ поточечно, где

$$\mu(z) = \begin{cases} q, & |z| \le 1/\sqrt{\pi c}; \\ 0, & |z| > 1/\sqrt{\pi c}, \end{cases}$$

$q = (Q - 1) / (Q + 1)$. Согласно теореме Берса — Боярского [11] $f_m \to f$ локально равномерно, где f — нормированное Q-квазиконформное отображение с комплексной характеристикой $\mu(z)$. Следовательно, $f \in H^{\Phi}$. Но это невозможно, так как $\Phi(Q) = \infty$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

Из способа доказательства теоремы 2 можно сделать заключение о точности условий теоремы 1, наложенных на функцию Φ.

Предложение 2. *Пусть* $\Phi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *имеет экспоненциальный рост на* ∞ *и* $\inf \Phi = 0$. *Если при этом не выполнено хотя бы одно из условий теоремы* 1 *на функцию* Φ, *то найдется последовательность* K*-квазиконформных отображений* $f_n \xrightarrow{\text{л.р.}} f$ *такая, что*

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(p(z))dxdy > \limsup_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(z))dxdy.$$

1. *Ahlfors L. V.* On quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1953 / 1954. – **3**. – P. 1 – 58.
2. *Lehto O.* Homeomorphisms with a given dilatation // Lect. Notes Math. – 1970. – **118**. – P. 58–73.
3. *Песин И. Н.* Отображения, квазиконформные в среднем // Докл. АН СССР. – 1969. – **187**, № 4. – С. 740 - 742.
4. *Крушкаль С. Л.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // Там же.– 1964.– **157**, № 3. – С. 517 – 519.
5. *Крушкаль С. Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения — новые методы и приложения. – Новосибирск: Наука, 1984. – 216 с.
6. *Зорич В. А.* О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М. А. Лаврентьева // Докл. АН СССР. – 1968. – **181**, № 3. — С. 530 – 533.
7. *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\| \mu \|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Al Math.– 1988. – **13**. – P. 25 – 70.
8. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.
9. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.
10. *Lehto O., Virtanen K. J.* Quasikonforme Abbildungen. – Berlin etc.: Springer, 1965. – 363 p.
11. *Боярский Б. В.* Обощенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб.– 1957.– **43**.– С. 451–503.
12. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: Наука, 1974. – 98 с.
13. *Лаврентьев М. А.* Sur une classe de representations continues // Мат. сб.– 1935.– **42**.– С. 407–423.
14. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.
15. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
16. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
17. *Strebel K.* Ein Konvergenzsatz fur Folgen quasiconformer Abbildungen // Comment. math. helv. – 1969. – **44**, № 4. – S. 469 – 475.
18. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.
19. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства.– М.: Изд-во иностр. лит., 1948.– 456 с.
20. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 291 с.
21. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
22. *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику М. А. Лаврентьева //Сиб. мат. журн.– 1990.– **31**, № 2. – С. 21–36.
23. *Рязанов В. И.* О компактификации классов с интегральными ограничениями на характеристики Лаврентьева // Там же. - 1992. – **32**, № 1. – С. 87 – 104.

Получено 22.10.92